Publications du Département de mathématiques de Lyon

Ali Deaibes

Caractérisation des mesures qui intègrent toutes les fonctions réelles mesurables

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 75-80
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_75_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-3

CARACTERISATION DES MESURES QUI INTEGRENT TOUTES LES FONCTIONS REELLES MESURABLES

PAR ALI DEAIBES

RESUME. - Etant donné un espace mesurable (X,Σ) séparant les points de X (c'est-à-dire tel que pour tout couple (x,y) de points distincts de X, il existe une partie $B \in \Sigma$ telle que $x \in B$ et $y \in X \setminus B$), on désigne par $A = \mathcal{L}(X,\Sigma)$ l'algèbre des fonctions réelles sur X, partout définies et Σ-mesurables.

On démontre ici que l'espace $\lambda(\Sigma)$ des mesures signées m sur (X,Σ), qui intègrent toutes les fonctions de A, est exactement le sous-espace vectoriel du dual algébrique A^* de A engendré par les caractères de l'algèbre A.

Plus généralement si B est un treillis vectoriel de fonctions de A, contenant les fonctions constantes et tel que A soit l'algèbre de Baire engendrée par B, alors l'espace $\lambda(\Sigma)$ est le sous-espace vectoriel du dual B^* de B engendré par les formes modulaires σ-régulières du treillis vectoriel B. C'est aussi l'espace des mesures moléculaires du δ-complété de l'espace uniforme (X,σ_B), où σ_B désigne la structure uniforme de la convergence simple sur B.

En particulier les mesures de Baire d'un espace topologique complètement régulier T, qui intègrent toutes les fonctions de Baire sont exactement les mesures moléculaires du replété υT de T.

NOTATIONS. - On munit l'ensemble X de la structure uniforme $\mu_\Sigma = \sigma_A$, définie par les fonctions $f \in A$, qui n'est autre, d'après ([1], prop. 4.5.13), que la structure uniforme définie par les partitions dénombrables extraites de Σ.

Les notations concernant les espaces uniformes et les espaces de mesures associés sont celles de [1] et [2]. En particulier $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(X,\mu)$ désigne le treillis vectoriel des fonctions réelles uniformément continues sur (X,μ).

L'auteur a montré dans ([1], p. 139) qu'une mesure $m \in \lambda(\Sigma)$, même positive, peut ne pas être une combinaison linéaire finie de points de X, autrement dit peut ne pas être moléculaire sur X. Le théorème (1.4) caractérise donc ces mesures $m \in \lambda(\Sigma)$ comme étant exactement les mesures moléculaires sur le complété $\hat{X}$ de l'espace uniforme (X,μ_Σ).

On dit qu'un sous-espace B de A est *fondamental* si B est un treillis vectoriel contenant les fonctions constantes et tel que A soit l'algèbre de Baire engendrée par B.

On appelle forme modulaire sur B toute forme linéaire u sur B telle que $u(1) = 1$ et $|u(f)| = u(|f|)$ pour toute $f \in B$.

On dit qu'une forme linéaire u, sur A ou sur B, est σ-régulière lorsque la condition $f_n \downarrow 0$ implique la condition $u(f_n) \to 0$. On désigne alors par $\mathrm{Mod}_\sigma(B)$ l'ensemble des formes modulaires σ-régulières du treillis vectoriel B.

La notion de sous-espace fondamental trouve son importance dans le théorème (2.2) offrant une caractérisation de l'espace $\lambda(\Sigma)$ à partir du treillis B. Une application en est la proposition (3.1) relative au cas d'un espace complètement régulier T.

1. CARACTERISATION DE L'ESPACE $\lambda(\Sigma)$.

(1.1) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. On suppose que l'espace* $\mathcal{U}(X,\mu)$ *est stable par passage à la limite simple des suites dénombrables. Alors l'espace topologique* X *est un* P*-espace ([3], p. 62).*

Preuve. - Soit (V_n) une suite décroissante d'ouverts de X et soit x un point de l'ensemble $V = \cap V_n$. Prouvons que V est un voisinage de x, ce qui suffira. Pour tout n, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{U}(X,\mu)$ telle que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(x) = 1$ et $f_n(X \setminus V_n) = 0$. Posons $h_1 = f_1$; $h_2 = \mathrm{Inf}(f_2,h_1)$ et $h_n = \mathrm{Inf}(f_n,h_{n-1})$. La suite (h_n) est décroissante et converge vers une fonction $h \in \mathcal{U}(X,\mu)$, qui est telle que $h(x) = 1$ et $h(X \setminus V) = 0$, ce qui démontre que V est un voisinage de x. □

On en déduit :

(1.2) THEOREME. - *La topologie du complété* $\hat{X}$ *de l'espace uniforme* (X,μ_Σ) *est celle d'un* P-*espace.*

Preuve. - Il suffit de prouver que $\mathcal{U}(\hat{X})$ est stable par passage à la limite simple des suites dénombrables. Nous savons déjà qu'il en est ainsi pour $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(X,\mu_\Sigma)$ puisque $\mathcal{U}(X) = \mathcal{L}(X,\Sigma)$ par ([1], p. 138). Fixons donc une suite (g_n) de $\mathcal{U}(\hat{X})$ qui converge simplement, sur $\hat{X}$, vers une fonction g. Il est clair que la restriction $f = g|_X$ est une fonction élément de $\mathcal{U}(X)$, limite simple sur X des restrictions $f_n = g_n|_X$. Elle se prolonge donc de façon unique en une fonction $h \in \mathcal{U}(\hat{X})$ et il suffit de prouver que h=g. Pour cela on remarque que l'espace uniforme (X,μ_Σ) est de type (A) ([1], p. 42), de sorte que tout point $v \in \hat{X}$ définit une forme linéaire σ-régulière sur l'espace $\mathcal{U}(X) = \mathcal{L}(X,\Sigma)$ ([1], p. 113). Autrement dit v est une mesure positive élément de $\lambda(\Sigma)$. Mais la suite (f_n) constitue alors une suite de fonctions v-intégrables, dominée par la fonction v-intégrable $\varphi = \operatorname{Sup} |f_n|$. On en déduit, avec le théorème de Lebesgue, que

$$h(v) = v(f) = \lim v(f_n) = \lim g_n(v) = g(v)$$

pour tout $v \in \hat{X}$, ce qui termine tout. □

(1.3) COROLLAIRE. - *Tout sous-espace compact* K *de* $\hat{X}$ *est fini.*

On peut maintenant énoncer

(1.4) THEOREME. - *Les mesures* $m \in \lambda(\Sigma)$ *sont exactement les mesures moléculaires de* $\hat{X}$.

Preuve. - On sait que les mesures $m \in \lambda(\Sigma)$ s'identifient aux mesures de Radon $\hat{m}$ sur le compactifié de Samuel $\widehat{pX}$ de l'espace uniforme (X,μ_Σ) dont le support est contenu dans $\hat{X}$. Tout résulte donc du corollaire (1.3). □

En tenant compte du fait que l'espace uniforme (X,μ_Σ) est de type (A), ce qui implique que son complété $\hat{X}$ est l'espace des caractères de l'algèbre $A = \mathcal{U}(X,\mu_\Sigma) = \mathcal{L}(X,\Sigma)$, on obtient une autre version du théorème précédent.

(1.5) THEOREME. - *L'espace* $\lambda(\Sigma)$ *est exactement le sous-espace vectoriel du dual algébrique* A^* *de l'algèbre* A *engendré par les caractères de* A.

2. ROLE DES SOUS-ESPACES FONDAMENTAUX.

Pour toute partie $H \subset \mathbb{R}^X$, on note H^∞ l'ensemble des fonctions bornées de H.

(2.1) PROPOSITION. - *Soit* B *un sous-espace fondamental de* A. *Alors toute forme modulaire* σ*-régulière* v *sur* B *se prolonge en une seule forme modulaire (*σ*-régulière) sur* A*, et c'est une mesure élément de* $\lambda(\Sigma)$.

Preuve. - La forme modulaire v est une intégrale de Daniell sur le treillis vectoriel B^∞, donc elle se prolonge en une seule intégrale de Daniell $\overline{v}$ sur l'algèbre A^∞ ([4]). D'autre part il est facile de vérifier que la classe des fonctions $f \in A^\infty$ telles que $|\overline{v}(f)| = \overline{v}(|f|)$ est stable par passage à la limite simple des suites dénombrables uniformément bornées et contient B^∞. On a donc $\mathscr{C} = A^\infty$, ce qui signifie que $\overline{v}$ est une forme modulaire σ-régulière sur $A^\infty = \mathscr{U}^\infty(X,\mu_\Sigma)$. C'est donc un caractère de l'algèbre A, donc un point de $\hat{X}$, et par conséquent une mesure élément de $\lambda(\Sigma)$ ([2], th. 1.4). □

(2.2) THEOREME. - *Soit* B *un sous-espace fondamental de* A. *Alors l'espace* $\lambda(\Sigma)$ *est le sous-espace vectoriel du dual algébrique* B^* *de* B *engendré par l'ensemble* $\mathrm{Mod}_\sigma(B)$. *C'est aussi l'espace des mesures moléculaires du* δ*-complété* $\delta X = \delta(X,\sigma_B)$ *de l'espace uniforme* (X,σ_B).

Preuve. - D'après (1.5) et (2.1) il suffit de prouver l'égalité des ensembles $\mathrm{Mod}_\sigma(B)$ et δX. Soit G l'adhérence de B^∞ dans $\mathbb{R}^X$ pour la topologie de la convergence uniforme sur X. Alors G est un treillis vectoriel contenant les constantes, qui sépare les points de X (car l'algèbre de Baire engendrée par G les sépare). On en déduit, avec ([1], prop. 1.2.11) que $G = \mathscr{U}(X,\sigma_G)$ et avec ([2]) que $\delta(X,\sigma_G) = \mathrm{Mod}_\sigma(G)$. La structure uniforme σ_B est comprise, au sens de la relation de finesse, entre deux structures uniformes σ_G et $\sigma_A = \mu_\Sigma$, telles que $\delta(X,\sigma_A) = \delta(X,\sigma_G)$. Il en résulte que σ_B a le même δ-complété et tout est dit. □

Remarque. - Si nous considérons des sous-algèbres B de A contenant les constantes, séparant les points de X, et telles que A soit l'algèbre de Baire engendrée par B, nous aurions un résultat analogue au théorème précédent : *l'espace* $\lambda(\Sigma)$ *est le sous-espace du dual algébrique* B^* *de* B *engendré par les caractères* σ*-réguliers de* B. Toutefois, si le sous-espace B de A est fermé dans $\mathbb{R}^X$ pour la topologie de la convergence uniforme sur X, alors B est un treillis vectoriel si et seulement si c'est une sous-algèbre de A et dans ce cas les caractères de B sont les formes modulaires de B. Enfin si B=A les caractères sont forcément σ-réguliers.

3. APPLICATIONS.

Nous appliquons les résultats précédents aux espaces topologiques complètement réguliers T, aux espaces uniformes (X,μ) et aux espaces mesurables produits.

(3.1) PROPOSITION. - *Soit* T *un espace topologique complètement régulier. Alors les mesures de Baire sur* T *qui intègrent toutes les fonctions de Baire sont exactement les mesures moléculaires du replété* υT *de* T.

Preuve. - Il suffit de voir que l'algèbre $\mathscr{C}(T)$ des fonctions continues sur T est un sous-espace fondamental de l'algèbre Ba(T) des fonctions de Baire sur T, de sorte que le résultat provient de l'égalité $\upsilon T = \mathrm{Mod}_\sigma(\mathscr{C}(T))$. □

Une généralisation intéressante est fournie avec :

(3.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Alors les mesures de Baire sur* X *qui intègrent toutes les fonctions de Baire sont exactement les mesures molécualaires de l'espace* δX, *δ-complété de l'espace uniforme affaibli de* (X,μ).

Preuve. - Il suffit de voir que $\mathscr{U}(X)$ est un sous-espace fondamental de Ba(X) et que $\mathrm{Mod}_\sigma(\mathscr{U}(X)) = \delta X$ avec [2]. □

(3.3) THEOREME. - *Soient* (X,Σ) *et* (Y,Ω) *deux espaces mesurables séparés. Alors l'espace mesurable produit* $(X\times Y,\ \Sigma\otimes\Omega)$ *est séparé. On a de plus :*

a) L'espace $\lambda(\Sigma\otimes\Omega)$ *est le produit tensoriel algébrique de* $\lambda(\Sigma)$ *et* $\lambda(\Omega)$.

b) L'espace $\lambda(\Sigma\otimes\Omega)$ *est l'espace des mesures moléculaires du produit* $\hat{X}\times\hat{Y}$.

Preuve. - On munit l'ensemble X×Y de la structure uniforme produit $\psi = \mu_\Sigma \otimes \mu_\Omega$, d'où l'égalité $\hat{X}\times\hat{Y} = (\widehat{X\times Y},\ \psi)$. Par ailleurs toute fonction $f \in \mathscr{U}(X\times Y,\ \psi)$ est $\Sigma\otimes\Omega$-mesurable car il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une partition $P = (V_p)$ extraite de Σ et une partition $Q = (W_q)$ extraite de Ω telles que f varie au plus de ε sur chaque ensemble $V_p \times W_q$. Il en résulte que $\mathscr{U}(X\times Y,\ \psi)$ est un sous-espace fondamental de $\mathcal{L}(X\times Y,\ \Sigma\otimes\Omega)$ contenant $\mathscr{U}^\infty(X)\otimes\mathscr{U}^\infty(Y)$. On en déduit que toute forme modulaire σ-régulière u de $\mathcal{L}(X\times Y,\ \Sigma\otimes\Omega)$ est déterminée par sa restriction $\bar{u}$ sur $\mathscr{U}(X\times Y,\ \psi)$ et que $\bar{u}$ est un point de $(\widehat{X\times Y},\ \psi) = \hat{X}\times\hat{Y}$. D'où les deux propriétés a) et b). □

★ ☆ ★

[1] A. DEAIBES, *Espaces uniformes et espaces de mesures,* Publ. Dép. Math. Lyon, 12-4, 1975, p. 1-165.

[2] A. DEAIBES et R. PUPIER, *δ-complétion et G_δ-densité,* Publ. Dép. Math. Lyon, 9-3, 1972, p. 1-12.

[3] L. GILLAMN et N. JERISON, *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, 1960.

Ali DEAIBES

Faculté des Sciences
Université libanaise

HADATH-BEYROUTH
Liban