PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CHRISTINE CHARRETTON

Type d'ordre des ordinaux de modèles non dénombrables de la théorie des ensembles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 37-52
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_37_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1978 t. 15-3

TYPE D'ORDRE DES ORDINAUX DE MODELES NON DENOMBRABLES DE LA THEORIE DES ENSEMBLES.

Christine CHARRETTON

H. Friedman a étudié dans [1] le type d'ordre des ordinaux des modèles dénombrables de la théorie des ensembles. Nous voulons prolonger cette étude et les méthodes qu'elle met en oeuvre à certains modèles non dénombrables de la théorie des ensembles : les modèles saturés.

Pour mener cette étude, nous supposerons l'hypothèse généralisée du continu, au moins jusqu'au cardinal du modèle considéré. Par suite, en supposant l'hypothèse du continu, nos résultats s'appliquent à un ultraproduit de modèles dénombrables de la théorie des ensembles via un ultrafiltre dénombrablement incomplet.

Les modèles étudiés ici sont des modèles de KP, théorie des ensembles décrite en [1] et [2], plus faible que ZF mais suffisante pour développer un certain nombre de branches des mathématiques. Par conséquent nos résultats s'appliquent à des théories plus fortes que KP, par exemple ZF. Nous diviserons notre étude en deux parties suivant que les modèles étudiés satisferont l'axiome de l'infini ou sa négation.

0 - PRELIMINAIRES.

0.1. - Si $\mathfrak{M} = \langle M,E \rangle$ est un modèle du langage de la théorie des ensembles, on dit que a est un *élément non standard*, si $a \in M$ et si il existe dans M une suite $(a_n)_{n \in N}$ telle que $\mathfrak{M} \models a_{n+1} \mathrel{E} a_n$ pour tout entier n.

$\mathfrak{M}$ est un *modèle non standard* si il existe dans M des éléments non standards.

0.2. - LEMME. -

Si a est un élément standard de M et si $\mathfrak{M} \models b \, E \, a$ alors b est standard.

L'ordinal standard d'un modèle $\mathfrak{M}$ de la théorie des ensembles est la borne supérieure des ordinaux standards des modèles.

0.3. - THEOREME. -

Si $\mathfrak{M} = \langle M, E \rangle$ est un modèle saturé de KP, c'est un modèle non standard de KP dont l'ordinal standard est ω.

Ceci découle évidemment de la remarque suivante :

l'ensemble de formules $\Gamma(x) = \{$" x est un ordinal fini et $x \in n$ " : n est un entier naturel$\}$ est un ensemble de formules consistant avec la théorie de $(\mathfrak{M}, \mathbb{N})$; $\mathfrak{M}$ étant saturé $\Gamma(x)$ est satisfait dans $(\mathfrak{M}, \mathbb{N})$; par suite il exsite des ordinaux finis dans $\mathfrak{M}$ qui majorent les entiers naturels pour E.

0.4. - DEFINITION. -

On dit qu'un ensemble totalement ordonné $(X, <)$, de cardinal ω_α, a *pour type* η_α si pour toutes parties A et B de X telles que $A < B$, $|A| < \omega_\alpha$, $|B| < \omega_\alpha$, il existe u, v, w $\in$ X tels que $u < A < v < B < w$. η_α est exactement le type saturé de l'ordre dense et l'hypothèse généralisée du continu entraîne l'existence d'ensembles de cardinal ω_α et de type η_α, pour chaque ordinal régulier ω_α (cf. [4]).

0.5. - DEFINITION. -

Soit Q_α un ensemble totalement ordonné de cardinal ω_α et de type d'ordre η_α. Soit Y une famille d'ordres totaux telle que $|Y| = \omega_\alpha$ et f une application de Q_α dans Y vérifiant : pour tout $y \in Y$, $c \in Q$, $d \in Q$, $c < d$, $\{q \in Q_\alpha : f(q) = y \text{ et } c < q < d\}$ est non vide de cardinal ω_α.

L'ordre η_α - Mix(Y) est la somme ordonnée de types d'ordres

$$\sum_{q \in Q_\alpha} f(q).$$

0.6. - THEOREME. -

L'ordre η_α - Mix(Y) est indépendant de f.

DEMONSTRATION. -

Soient A et B deux η_α - Mix(Y) construits respectivement avec les fonctions f et g de Q_α dans Y :

$$A = \{(p_\xi, a_\xi) : \xi < \omega_\alpha\} = \sum_{q \in Q_\alpha} f(q)$$

$$B = \{(q_\xi, b_\xi) : \xi < \omega_\alpha\} = \sum_{q \in Q_\alpha} g(q)$$

Construisons un isomorphisme de A dans B qui respecte l'ordre.

Posons $(r_o, c_o) = (p_o, a_o)$ et soit (t_o, d_o) le (q_ξ, b_ξ) de plus petit indice ξ tel que $g(q_\xi) = f(p_o)$. Soit $\beta < \omega_\alpha$. Alors $\beta = \lambda+n$ où λ est un ordinal limite et n un entier, et supposons que l'on ait construit (r_ξ, c_ξ) et (t_ξ, d_ξ) pour tous les ordinaux $\xi < \beta$ et tels que : $(r_\gamma, c_\gamma) < (r_{\gamma'}, c_{\gamma'})$ si et seulement si $(t_\gamma, d_\gamma) < (t_{\gamma'}, d_{\gamma'})$ pour tous γ, $\gamma' < \beta$.

• Si n est pair :

(r_β, c_β) est l'élément (p_ξ, a_ξ) de A de plus petit indice non encore utilisé dans la construction précédente. Si $(r_\beta, c_\beta) > (r_\xi, c_\xi)$ quel que soit $\xi < \beta$ prenons pour (t_β, d_β) l'élément (q_i, b_i) de B de plus petit indice et qui majore tous les (t_ξ, d_ξ), $\xi < \beta$, et tel que $g(q_i) = f(r_\beta)$. Les propriétés de Q_α et de g rendent la construction possible.

Si $(r_\beta, c_\beta) < (r_\xi, c_\xi)$ quel que soit $\xi < \beta$, on fait une construction symétrique.

Si (r_β, c_β) est tel qu'il existe γ, $\gamma' < \beta$ pour lesquels $(r_\gamma, c_\gamma) < (r_\beta, c_\beta) < (r_{\gamma'}, c_{\gamma'})$:

les ensembles $\{\eta : \eta < \beta$ et $(r_\eta, c_\eta) < (r_\beta, c_\beta)$

$\{\nu : \nu < \beta$ et $(r_\beta, c_\beta) < (r_\nu, c_\nu)$

sont de cardinal $< \omega_\alpha$ donc, d'après les propriétés de Q_α et de g il existe (t_i, d_i) tel que $t_\eta < t_i < t_\nu$ et $g(t_i) = f(r_\beta)$. On choisit pour (t_β, d_β) le (t_i, d_i) vérifiant ces propriétés et de plus petit indice.

• Si n est impair : On part évidemment de (t_β, d_β). Il s'agit d'un procédé d'"aller-retour" classique.

Dans tout ce qui suit $\mathfrak{M} = \langle M,E \rangle$ *sera un modèle de* KP, *saturé de cardinal* ω_α *régulier.*

- 1 - $\mathfrak{M}$ satisfait la négation de l'axiome de l'infini.

1.1. - THEOREME. -

Le type d'ordre des ordinaux de $\mathfrak{M}$ est $\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha$, $\omega^\star + \omega$ désignant le type d'ordre des entiers.

DEMONSTRATION. -

Les seuls ordinaux de $\mathfrak{M}$ sont donc des ordinaux finis au sens de $\mathfrak{M}$. On définit parmi les ordinaux la relation d'équivalence usuelle : a est équivalent à b si et seulement si ils diffèrent d'un ordinal vraiment fini. Le type d'ordre des ordinaux est $\omega + (\omega^{\star}+\omega)\ Q$ où Q est un ordre total dense. Le modèle $< \mathrm{Ord}(\mathfrak{M}), E \restriction \mathrm{Ord}(\mathfrak{M}) >$ est un modèle saturé de cardinal ω_α donc $Q = \eta_\alpha$.

- 2 - $\mathfrak{M}$ satisfait l'axiome de l'infini.

Soit ω_M le premier ordinal infini de $\mathfrak{M}$. Notons $<$ la relation d'appartenance entre les ordinaux de $\mathfrak{M}$.

2.1. - THEOREME. -

L'ensemble ω_M des ordinaux finis de $\mathfrak{M}$ ordonné par la relation $<$ a pour type d'ordre $\omega + (\omega^{\star}+\omega)\eta_\alpha$.

La démonstration est la même qu'en 1.1..

2.2. - THEOREME. -

Si n est un ordinal non standard fini de $\mathfrak{M}$ le type d'ordre de $[0,n] = \{x : \mathfrak{M} \models \mathrm{Ord}(x)$ et $x \leq n\}$ est $\omega + (\omega^{\star}+\omega)\eta_\alpha + \omega^{\star}$.

DEMONSTRATION. -

$[0,n]$ est définissable dans $\mathfrak{M}$ donc de cardinal ω_α. On considère sur $[0,n]$ la relation d'équivalence connue : α et β sont équivalents si et seulement si α et β diffèrent d'un ordinal standard. La classe de 0 a pour type ω, celle de n, ${}^{\star}\omega$; il existe dans $[0,n]$ des ordinaux non standards non équivalents à n car, soit n, soit $n-1$ est égal à $2m$ et m est évidemment non équivalent à n.

Chaque classe a pour type $\omega^{\star}+\omega$. L'ensemble des classes a pour type η_α : en effet si l'on considère les suites d'ordinaux de $[0,n]$ non équivalents deux à deux $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$, $(\beta_\nu)_{\nu<\omega_\alpha}$ telles que :

$$\alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \beta_\nu < \ldots < \beta_1,\ \xi,\ \nu < \omega_\alpha$$

l'ensemble des formules $\Gamma(x) = \{ \text{"}\ \alpha_\xi < x \wedge x < \beta_\nu < \xi,\ \nu < \omega_\alpha\ \text{"} \}$ est satisfait dans $(\mathfrak{M}, M)$ par saturation. L'ordinal γ qui satisfait $\Gamma(x)$ n'est équivalent à aucun α_ξ et à aucun β_ν puisque l'on a $\alpha_\xi < \gamma < \beta_\nu$ pour tous ξ, $\nu < \omega_\alpha$; on a donc le résultat ; le type d'ordre de $[0,n]$ est donc bien $\omega + (\omega^{\star}+\omega)\eta_\alpha + \omega^{\star}$.

Dans $\mathfrak{M}$ tout ordinal se décompose de façon unique par rapport à ω_M comme suit :

$$\alpha = \omega_M^{\alpha_1} m_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} m_k \quad (\star)$$

avec $k < \omega_M$, $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, k-1$, $m_i < \omega_M$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Remarquons que, vue de l'extérieur, la somme qui figure au second membre de $(\star)$ n'est éventuellement pas vraiment finie.

Si β est un autre ordinal de $\mathfrak{M}$ tel que $\beta = \omega_M^{\beta_1} n_1 + \ldots + \omega_M^{\beta_p} n_p$ alors $\alpha < \beta$ si et seulement si pour la plus grande puissance ω^{α_i} où α et β diffèrent dans leur décomposition $m_i < n_i$.

2.3. - <u>DEFINITION</u>. -

On considère la relation d'équivalence suivante entre ordinaux de $\mathfrak{M}$: $\alpha \sim \beta$ si et seulement si α et β ne diffèrent dans leur décomposition par rapport à ω_M que pour des puissances ω_M^γ où γ est standard (donc vraiment fini). On note $[\alpha]$ la classe de α.

2.4. - THEOREME. -

Si $\alpha \sim \beta$ alors α et β ne diffèrent que d'un nombre vraiment fini de termes dans leur décomposition par rapport à ω_M.

DEMONSTRATION. -

L'ensemble des ordinaux γ tels que α et β aient des coefficients différents relativement à ω_M^γ dans leur décomposition est un ensemble définissable dans $\mathfrak{M}_0$ formé d'ordinaux standards donc de rang standard ; donc il est vraiment fini.

2.5. - THEOREME. -

Le type d'ordre de $[0]$ est $\sum_1^\infty \left[\omega + (\omega^\star + \omega)\eta_\alpha\right]^n$ où n est un entier naturel.

DEMONSTRATION. -

Si $\alpha \in [0]$ il existe un ordinal vraiment fini, c'est-à-dire un entier naturel n tel que :

$$\alpha = \omega_M^n m_n + \dots + \omega_M m_1 + m_o$$

donc $\alpha \text{ E } \omega_M^{n+1}$, et réciproquement.

$[0]$ est donc une partition ordonnée par ω d'ensemble de types :

$$[\omega + (\omega^\star +)\eta_\alpha]^n$$

.../...

2.6. - THEOREME. -

L'ensemble des classes $[\alpha]$ d'ordinaux infinis ordonné par $<$ a pour type d'ordre η_α.

DEMONSTRATION. -

Soient $(\alpha_\xi)_{\xi < \omega_\alpha}$ et $(\beta_\eta)_{\eta < \omega_\alpha}$ deux suites d'ordinaux infinis de $\mathfrak{M}$ telles qu'aucun couple d'ordinaux pris parmi ces deux suites ne soit dans la même classe d'équivalence modulo $\sim$, et tels que $\alpha_\xi < \beta_\eta$, $\xi, \eta < \omega_\alpha$

Les ensembles de formules

$$\Sigma(u) = \{u < \alpha_\xi \; : \; \xi < \omega_\alpha\}$$

$$\Sigma'(v) = \{\alpha_\xi < v \; : \; \xi < \omega_\alpha\} \cup \{v < \beta_\eta \; : \; \eta < \omega_\alpha\}$$

$$\Sigma''(w) = \{\beta_\eta < w \; : \; \eta < \omega_\alpha\}$$

sont consistants avec $Th(\mathfrak{M}, (\alpha_\xi), (\beta_\eta))$ donc réalisés dans $(\mathfrak{M}, (\alpha_\xi), (\beta_\eta))$ puisque $\mathfrak{M}$ est saturé de cardinal ω_α donc il existe des ordinaux γ, δ, τ de $\mathfrak{M}$ tels que pour tous ξ, η, $\gamma < \alpha_\xi < \delta < \beta_\eta < \tau$. δ ne peut être équivalent à aucun α_ξ car sinon il ne les majorerait pas tous puisque deux à deux ils ne sont pas équivalents. De même δ n'est équivalent modulo $\sim$ à aucun des β_η.

Si γ était équivalent modulo $\sim$ au plus petit des α_ξ remplaçons-le par γ' de la façon suivante :

$$\gamma = \omega_M^{\gamma_1} p_1 + \dots + \omega_M^{\gamma_r} p_r$$

Soit α le plus petit des α_ξ.

Alors α et β ne diffèrent que pour des puissances standards γ_i dans leur décomposition. Soit ρ un ordinal non standard $< \gamma_1$. γ' est obtenu en laissant tomber dans la décomposition de γ toutes les puissances de ω_M inférieures à ρ et l'on a $\gamma' < \gamma$.

De même on peut assurer que l'ordinal τ n'est équivalent à aucun des ordinaux β_η.

On a donc le résultat.

2.7. - DEFINITION. -

On définit dans l'ensemble des classes d'équivalence $[\alpha]$ la relation d'équivalence suivante :

$[\alpha] \approx [\beta]$ si et seulement si α et β diffèrent dans leur décomposition par rapport à ω_M en un nombre vraiment fini de termes ω_M^γ d'exposant γ standard, les parties des décompositions formées de ω_M^γ où γ est non standard n'étant pas prises en considération. On note $[\,[\alpha]\,]$ les classes.

2.8. - THEOREME. -

Toute classe $[\,[\alpha]\,]$ vérifie :

Pour toutes classes $[\beta]$ et $[\gamma]$ telles que $[\beta] < [\gamma]$ il existe ω_α classes $[\delta]$ telles que :

$$[\beta] < [\delta] < [\gamma] \quad \text{et} \quad [\,[\delta]\,] = [\,[\alpha]\,]$$

DEMONSTRATION. -

β et γ ne sont pas équivalents modulo $\sim$, donc ils diffèrent dans leur décomposition par rapport à ω_M pour des puissances non standards de ω_M.

Soit ρ la plus grande puissance de ω_M où ils diffèrent :

$$\beta = \dots + \omega_M^\rho\, n + \dots + \omega_M^{\rho'}\, n' + \dots$$
$$\gamma = \dots + \omega_M^\rho\, m + \dots + \omega_M^{\rho'}\, m' + \dots$$

On a évidemment $n < m$.

Soit ρ' un ordinal non standard $< \rho$

Soit $\beta^{\star}$ obtenu en abandonnant dans β les puissances de ω_M strictement inférieures à ρ'.

Soit α obtenu en abandonnant dans α les puissances de ω_M supérieures ou égales à ρ'.

Soit $\delta = \beta^{\star} + \omega^{\rho'} + \alpha^{\star}$.

δ a les mêmes termes que β dans sa décomposition, jusqu'à la puissance ρ' où le coefficient de δ est $n'+1$. Donc $\beta < \delta$.

δ est identique à β jusqu'à la puissance ρ et on a $n < m$. Donc $\delta < \gamma$.

δ a la même partie standard que α. Donc $[\delta] \in [\,[\alpha]\,]$.

Au lieu de considérer δ on peut considérer $\delta_k = \beta^{\star} + \omega^{\rho'}k + \alpha^{\star}$ où k est un ordinal fini quelconque de $\mathfrak{M}_b$. δ_k satisfait les mêmes propriétés que δ, et il y a autant de δ_k que d'ordinaux finis de $\mathfrak{M}_b$, soit ω_α. De plus ils ne sont pas deux à deux équivalents modulo $\sim$.

2.9. - A chaque ordinal α on peut associer une fonction partielle f_α de ω dans ω définie de la façon suivante :

$f_\alpha(n) = k$ si k est le coefficient de ω_M^n dans la décomposition de α et k est standard.

$f_\alpha(n)$ est indéfini si k est non standard.

f_α est la trace sur ω de la fonction de ω_M dans ω_M qui à tout ordinal fini de $\mathcal{M}$ associe le coefficient k de ω_M^n dans la décomposition de α.

Si f est une fonction partielle de ω dans ω, elle est représentable dans $\mathcal{M}$ s'il existe un ordinal α tel que $f = f_\alpha$.

2.10. - THEOREME. -

Si $\mathcal{M}$ est un modèle saturé de KP, toute fonction partielle de ω dans ω est représentable dans $\mathcal{M}$.

DEMONSTRATION. -

Soit f une fonction partielle de ω dans ω ; μ étant un ordinal fini non standard du modèle, associons à f la fonction f' de ω dans $\omega \cup \{\mu\}$ telle que :

$f'(n) = f(n)$ si $f(n)$ est défini

$f'(n) = \mu$ si non

Considérons l'ensemble des formules $F_n(\varphi)$ suivantes : " φ est une fonction de ω_M dans ω_M qui prolonge $f' \upharpoonright [0,n]$ ".

L'ensemble $\{F_n(\varphi) : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de formules consistant avec $Th(\mathcal{M}, \mathbb{N})$; par saturation il existe donc une fonction φ de ω_M dans ω_M qui prolonge f'.

Etant donné β un ordinal fini non standard de $\mathcal{M}_0$, soit $\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} \omega^i \varphi(i)$, alors f_α représente la fonction partielle f.

2.11. - DEFINITION. -

Comme dans [1], associons à chaque fonction partielle f l'ordre total L(f) suivant :

$$\sum_{-n \in \omega^\star} \tau_{-n} + \sum_{1}^{\omega} \left[\omega + (\omega^\star + \omega)\eta_\alpha\right]^n$$

$$\text{avec} \quad \tau_{-n} = \begin{cases} \left[\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha\right]^n f(n) & \text{si } f(n) \text{ est défini} \\ \left[\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha\right]^n \left[\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha + \omega^\star\right] & \\ & \text{si } f(n) \text{ est indéfini.} \end{cases}$$

L(f) est une somme de sommes infinies de type d'ordre au sens de Cantor (cf. Sierpinski, [5])

2.12. - THEOREME. -

$([\alpha], <)$ a pour type d'ordre $L(f_\alpha)$.

DEMONSTRATION. -

Considérons $[\alpha]^+$ l'ensemble des ordinaux β de $[\alpha]$ plus grands que α.

Alors $\beta = \alpha+\gamma$ et $\gamma \in [0]$

On peut construire un isomorphisme préservant l'ordre entre $[0]$ et $[\alpha]^+$.

Considérons $[\alpha]^-$ l'ensemble des ordinaux de $[\alpha]$ inférieurs à α. Soit F_n^α l'ensemble des ordinaux de β de $[\alpha]^-$ tels que : n est le plus grand entier tel que α et β diffèrent en ω_M^n dans leur décomposition. Les F_n^α sont des chaînes disjointes qui constituent un recouvrement de $[\alpha]^-$ et l'on a :

$$\ldots F_{n+1}^\alpha < F_n^\alpha < \ldots < F_0^\alpha$$

Cherchons le type d'ordre de F_n^α.

• Si le coefficient de ω_M^n dans la decomposition de α est l'ordinal standard m, le type d'ordre de F_n^α est celui de $\omega_M^n\, m$ soit celui de l'ensemble formé de m copies de $[\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha]^n$ compte tenu du théorème 2.1..

• Si le coefficient de ω_M^n dans la décomposition de α est l'ordinal fini non standard k de $\mathfrak{M}$ le type d'ordre de F_n^α est le produit de types d'ordre suivant compte tenu des théorèmes 2.1 et 2.2.

$$[\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha]^n \ [\omega + (\omega^\star+\omega)\eta_\alpha + \omega^\star]$$

En remarquant que $[\alpha] = [\alpha]^- \cup [\alpha]^+$, on a le type de $[\alpha]$.

2.13. - <u>DEFINITION</u>. -

Associons à chaque ordinal α de $\mathfrak{M}$ une fonction f^α de ω dans ω_M définie par $f^\alpha(n) = k$ si k est le coefficient de ω_M^n dans la décomposition de α.

Considérons $(f^\alpha)^+$ l'ensemble des fonctions de ω dans ω_M presque partout égales à f^α et considérons dans $(f^\alpha)^+$ la relation d'ordre suivante : $f < g$ si, n étant le plus grand entier où f et g diffèrent, $f(n) < g(n)$.

.../...

2.14. - LEMME. -

$((f^{\alpha})^{+}, <)$ est isomorphe à $([\alpha], <)$. On associe à chaque fonction f de $(f^{\alpha})^{+}$ l'ordinal de $\mathfrak{M}$ dont la décomposition par rapport à ω_M est précisément

$$\ldots \omega_M^n f(n) + \omega_M^{n-1} f(n-1) + \ldots + \omega_M f(1) + f(0)$$

2.15. - THEOREME. -

Si $[\alpha] \approx [\beta]$ alors $[\alpha]$ et $[\beta]$ sont isomorphes. On a donc $f^{\beta} \in (f^{\alpha})^{+}$ et le résultat découle du lemme 2.14..

2.16. - THEOREME. -

$\mathfrak{M}$ étant un modèle saturé de KP + Axiome de l'infini, de cardinal $\omega_\alpha > \omega$, l'ensemble de ses ordinaux ordonné par E a pour type d'ordre :

$$\sum_{1}^{\infty} [\omega + (\omega^{\star}+\omega)\eta_\alpha]^n + \eta_\alpha - \mathrm{Mix}\{L(f)\}$$

où $\{L(f)\}$ représente l'ensemble des ordres totaux associés à toutes les fonctions partielles f de ω dans ω.

La première somme infinie qui figure ci-dessus est évidemment le type d'ordre de $[0]$.

L'ensemble des classes d'ordinaux infinis $[\alpha]$ est un ensemble de cardinal ω_α et de type d'ordre η_α d'après 2.6. Une classe $[\alpha]$ est de type $L(f_\alpha)$, et tout type $L(f_\alpha)$ est représenté ω_α fois entre deux classes $[\beta]$ et $[\gamma]$ distinctes de $[\alpha]$, d'après 2.6 et 2.8..

Par suite $\mathrm{Ord}(\mathfrak{M})$ a pour type la somme ordonnée suivante

$$\sum_{1}^{\infty} [\omega + (\omega^{\star}+\omega)\eta_\alpha]^n + \sum L(f_\alpha)$$

où $\Sigma L(f_\alpha)$ est une somme ordonnée par un ensemble de type η_α et de cardinal ω_α comme en 0.5.. D'après 2.10. l'ensemble des ordres $L(f_\alpha)$ où α est un ordinal de $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des ordres $L(f)$ où f est une fonction partielle de ω dans ω.

Le type d'ordre des ordinaux d'un modèle saturé de KP + Infini ne dépend que du cardinal du modèle et de l'ordre dense saturé correspondant.

2.17. - THEOREME. -

La théorie de l'ordre des ordinaux d'un modèle de KP + Infini est une théorie complète.

D'après les résultats précédents, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont des modèles saturés de KP+Infini, $\langle \mathrm{Ord}(\mathfrak{M}), E \rangle$ et $\langle \mathrm{Ord}(\mathfrak{M}'), E \rangle$ sont deux modèles saturés de cardinal ω_1 et sont isomorphes (si $|M| = |M'| = \omega_1$).

Par suite la théorie est complète (cf. [6]). Ce résultat est valide *sans hypothèse du continu :* dans la mesure où l'énoncé d'arithmétique "toute fonction partielle de ω dans ω est représentable dans $\mathfrak{M}$" démontré en supposant l'hypothèse du continu peut être démontré sans cet axiome (cf. [7] p. 128).

En admettant l'hypothèse du continu nous avons démontré (cf. [6]) que : " la théorie des ordinaux d'un modèle de KP + Infini est une théorie complète ". Comme ce dernier énoncé est arithmétique, il reste vrai sans l'hypothèse du continu (cf. [7] p. 128).

BIBLIOGRAPHIE

[1] - FRIEDMAN H, Countable models of set theories Cambridge Summer School in Math. Logic, p.539-573 (Lectures Notes in Math ; vol.337) Berlin-Heidelberg. New-York : Springer 1973.

[2] - BARWISE J, Admissible Sets and Structures. Perspectives in Math. Logic, Springer Berlin-Heidelberg. New-York : Springer 1975.

[3] - BELL J.L., Slomson, A.B, Models and ultraproducts, Amsterdam London, North-Holland Publishing company - 1969.

[4] - KURATOWSKI K., MOSTOWSKI A., Set Theory. Amsterdam, New-York, Oxford North-Holland Publishing company, 1968.

[5] - SIERPINSKI W., Cardinal and Ordinal Numbers, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie 1958.

[6] - CHANG CC., KEISLER H.J., Model Theory, Amsterdam. New-York Oxford, North-Holland Publishing company 1977.

[7] - KRIVINE J.L., Théorie axiomatique des ensembles, Presses Universitaires de France, 1979.

C. CHARRETON
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE