

BERNARD JACQUOT

**Caractérisation des compacts métriques contenant un arc**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1978, tome 15, fascicule 1  
, p. 109-114

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1978\\_\\_15\\_1\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_1_109_0)

© Université de Lyon, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION DES COMPACTS METRIQUES

CONTENANT UN ARC

par Bernard JACQUOT

1. - Soit  $E$  un compact, de métrique  $d$ . Un ensemble de points  $(a_k)$  tel que  $a_0 = a, a_n = b$  et  $d(a_k, a_{k+1}) \leq \delta$  sera dit  $\delta$ -chaîne de  $a$  à  $b$ .  $\mathcal{C}_\delta(a,b)$  dénotera l'ensemble des  $\delta$ -chaînes de  $a$  à  $b$ .

Nous dirons que  $E$  possède la propriété  $P(a,b,f,D)$  si l'on peut trouver :

Deux points  $a$  et  $b$  de  $E$  tels que, pour tout  $\delta$ ,  $\mathcal{C}_\delta(a,b) \neq \emptyset$  ;

Une fonction  $f$  de  $E^2$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des réels positifs, telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0, x) = 0,$$

$$\text{et que } D(a,b) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_k f(a_k, a_{k+1}), (a_k) \in \mathcal{C}_\delta(a,b) \right\} \text{ est fini et}$$

non nul.

Le but de ce travail est d'utiliser la propriété  $P(a,b,f,D)$  afin d'établir une condition nécessaire et suffisante sur  $E$  pour qu'il contienne un arc.

2. - Nous démontrons d'abord la

PROPOSITION. - Soit  $E$  un compact, de métrique  $d$ , où l'on peut trouver  $a, b$  et  $f$  tels que  $P(a,b,f,D)$  soit vérifiée. Soient  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow D(x,y) = 0$ , et  $x^*$  la classe de  $x$  pour  $\mathcal{R}$ . Alors :

- (a) Il existe dans  $E$  un compact  $G_{ab}$  où  $D(a, \cdot)$  est continue ;
- (b)  $D'(x^*, y^*) = D(x,y)$  est une distance sur  $G_{ab} / \mathcal{R}$  ;
- (c)  $G_{ab} / \mathcal{R}$ , muni de la métrique  $D'$ , est un arc.

La démonstration se trouve dans les numéros 3 à 8.

3. - Soit  $e(A,B)$  la distance de Hausdorff séparant  $A$  et  $B$ , sous compacts non vides de  $E$ . Elle est définie par

$$\begin{aligned} \nu(a,B) &= \inf \{ d(a,x), x \in B \} , \\ e'(A,B) &= \sup \{ \nu(y,B), y \in A \} , \\ e(A,B) &= \sup [ e'(A,B), e'(B,A) ] . \end{aligned}$$

Tout d'abord, remarquons qu'il existe une suite de  $\delta_n$ -chaînes  $(a_j^n, j=1, k(n))$  telle que

$$\begin{aligned} \lim_n \delta_n &= 0, \\ \lim_n \sum_{j < k(n)} f(a_j^n, a_{j+1}^n) &= D(a,b). \end{aligned}$$

Chacune de ces  $\delta_n$ -chaînes est compacte, donc d'après le théorème de sélection de Blaschke (voir (1), p. 91) il existe une suite de  $\delta_{n_k}$ -chaînes, extraite de la première, convergeant avec la métrique de Hausdorff vers un compact  $G_{ab}$ . Ce compact sera dit, dans la suite, issu de la propriété  $P(a,b,f,D)$ . Or  $G_{ab}$  est bien enchaîné (cela résulte du fait que si  $e(G_{ab}, (a_j^n))$  est inférieur à  $\epsilon$ , alors pour tout  $x$  de  $G_{ab}$  il existe un  $a_j^n$  tel que  $d(x, a_j^n) < \epsilon$ , et inversement).  $G_{ab}$  est donc un continu (i.e. un compact connexe).

4. -  $D(x,y)$  est un écart sur  $G_{ab}$ . En effet, clairement,  $D(x,x) = 0$  et  $D(x,y) = D(y,x)$ . Quant à l'inégalité triangulaire, elle résulte du fait que si  $(a_k) \in \mathcal{C}_\delta(a,b)$  et  $(b_j) \in \mathcal{C}_\delta(b,c)$ , alors  $(a_k) \cup (b_j) \in \mathcal{C}_\delta(a,c)$ . Ainsi (b) est démontré.

5. - Si  $x \in G_{ab}$ , alors  $D(a,x) + D(x,b) = D(a,b)$ .

En effet, considérons la suite des chaînes  $(a_j^n)$  du n° 3. On peut y changer chaque élément de façon que, à  $p$  donné, les  $a_j^p$  soient distincts deux à deux.

La somme associée converge toujours vers  $D(a,b)$ .

Soit  $x \in G_{ab}$ . A chaque  $\mathcal{E}$ , on peut associer  $p(\mathcal{E})$  tel que pour tout  $p > p(\mathcal{E})$ ,  $(a_j^p)$  soit une  $\mathcal{E}$ -chaîne et que  $e(G_{ab}, (a_j^p)) < \mathcal{E}$ . Soient  $(a_{r(x)}^p, \dots, a_{q(x)}^p)$  les éléments, rangés dans l'ordre croissant de leurs indices inférieurs, situés à moins de  $\mathcal{E}$  de  $x$  pour  $d$ . Les chaînes  $(a_0^p, a_1^p, \dots, a_{r(x)}^p, x)$  et  $(x, a_{q(x)}^p, \dots, a_n^p = b)$  ont  $x$  et  $a_{r(x)}^p$  en commun quand  $a_{r(x)}^p = a_{q(x)}^p$ , et  $x$  seul sinon. Mais

$$\inf \left\{ \sum_j f(b_j, b_{j+1}); (b_j) \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}(a, x) \right\} \leq \sum_{k < r(x)} f(a_k^p, a_{k+1}^p) + f(a_{r(x)}^p, x) ,$$

$$\inf \left\{ \sum_h f(c_h, c_{h+1}), (c_h) \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}(x, b) \right\} \leq \sum_{i \geq q(x)} f(a_i^p, a_{i+1}^p) + f(x, a_{q(x)}^p).$$

Additionnant ces deux inégalités membre à membre et prenant la limite pour  $\mathcal{E} = 0$ , il vient  $D(a,x) + D(x,b) \leq D(a,b)$ .

C.Q.F.D.

6. - Soit  $x \in G_{ab}$ . Alors, si  $D(ax) \neq D(a,b)$  et  $D(a,x) \neq 0$ ,  $E$  possède les propriétés  $P(a,x,f,D)$  et  $P(x,b,f,D)$  et  $G_{ax} \cup G_{xb} = G_{ab}$ . (Les deux continus du premier membre de cette égalité étant issus des propriétés correspondantes).

En effet, il existe une suite  $(n_i)$  d'entiers naturels telle que les chaînes  $(a_0^{n_i}, \dots, a_{r(x)}^{n_i})$  convergent vers un compact  $(r(x))$  à la même signification qu'au n° 5). On peut extraire des  $(n_i)$  une suite  $(n'_k)$  telle que

$$\lim_k \sum_{j < r(x)} f(a_j^{n'_k}, a_{j+1}^{n'_k}) + f(a_{r(x)}^{n'_k}, x) = D(a,x).$$

En effet, dans cette égalité, la limite du premier membre est supérieure ou égale à  $D(a,x)$ ; si elle était strictement plus grande, alors

$\sum_i f(a_i^P, a_{i+1}^P)$  tendrait vers un nombre strictement supérieur à  $D(a,b)$ .

Traitant de la même façon le couple  $(x,b)$  à partir de la suite  $(n'_k)$  on a bien construit les continus  $G_{ax}$  et  $G_{xb}$ . On vérifie facilement que leur réunion vaut  $G_{ab}$ .

Enfin remarquons, en vue du n° 9, que si  $P(u,v,f,D)$  est vraie pour tous  $u, v \in G_{ab}$ , alors  $D$  est une distance sur  $G_{ab}$ .

7. -  $D(a, \cdot)$  est continue sur  $G_{ab}$ . En effet, soit  $M = \{y, D(a,y) \leq \alpha\}$ .

Soit  $x_n$  une suite de points de  $M$  convergeant vers  $x$ . Alors

$$D(a,x) \leq \lim_{\delta=0} \left[ \inf \left\{ \sum_k f(a_k, a_{k+1}) + f(x_{n(\delta)}, x), (a_k) \in \mathcal{C}_{\delta}(a, x_{n(\delta)}) \right\} \right],$$

dès que  $d(x, x_{n(\delta)}) \leq \delta$ .

$$\text{Mais } \inf \left\{ \sum_k f(a_k, a_{k+1}), (a_k) \in \mathcal{C}(a, x_{n(\delta)}) \right\} \leq D(a, x_{n(\delta)}).$$

Donc  $D(a,x) \leq \alpha$  et  $M$  est fermé.

De même,  $\{x, D(a,x) \geq \beta\}$  est fermé, car  $D(a,x) \geq \beta \iff D(b,x) \leq D(a,b) - \beta$ .

(a) est donc démontré.

8. -  $G_{ab}/\mathcal{R}$  est un arc pour la métrique  $D'$ .

en effet, si  $x^* \in G_{ab}/\mathcal{R}$ , associons-lui  $\xi(x^*) = D'(a^*, x^*)/D'(a^*, b^*)$ .

$\xi$  est injective et bicontinue, par les n° 5 et 6. (car, si  $p = \xi^{-1}(u)$  et  $q = \xi^{-1}(v)$  le n° 6 indique, que, par exemple,  $p \in G_{aq}/\mathcal{R}$  et le n° 5 nous dit que  $D'(p,q) = |D'(a^*, p) - D'(a^*, q)|$ ).

$\xi$  est surjective, car la connexité de  $G_{ab}$  pour  $d$  et la continuité de  $D(a, \cdot)$  sur cet ensemble impliquent que l'image de  $G_{ab}/\mathcal{R}$  par  $\xi$  est connexe donc égale à  $[0, 1]$ .

Cela prouve (c) et termine la démonstration de la proposition du n° 2.

9. - Nous pouvons maintenant démontrer le

**THEOREME.** - Soit  $E$  un compact de métrique  $d$ . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(a)  $E$  contient un arc.

(b) Il existe  $a, b, f$  tels que  $E$  possède  $P(a, b, f, D)$ , et  $P(u, v, f, D)$  est vérifié pour tous  $u, v$  d'un certain continu issu de  $P(a, b, f, D)$ .

**DEMONSTRATION DE (b)  $\Rightarrow$  (a).** Soit  $G_{ab}$  le continu de  $P(a, b, f, D)$  où (cf. n° 6)  $D$  est une distance. Si  $x \in G_{ab}$ , il existe deux continus  $G_{ax}$  et  $G_{xb}$  tels que  $G_{ab} = G_{ax} \cup G_{xb}$ . De plus, si  $y \in G_{ax} \cap G_{xb}$ , et  $y \neq x$ , alors  $D(a, y) < D(a, x)$  et  $D(b, y) < D(b, x)$ , ce qui est impossible. Ainsi  $G_{ax} \cap G_{xb} = \{x\}$ , et (voir (2), p. 179)  $G_{ab}$  est un arc pour  $d$ .

**DEMONSTRATION DE (a)  $\Rightarrow$  (b).**  $E$  contient un arc  $A$ , dont nous appellerons  $a$  et  $b$  les extrémités. Soit  $\xi$  l'homéomorphisme échangeant  $A$  et  $[0, 1]$ . A chaque valeur entière  $n$ , soit  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des boules de rayon  $1/n$  et centrées en chaque point de  $A$ . A tout point  $x$  de  $E$  attachons

$$t(x) = \sup \{ n : \exists B \in \mathcal{B}_n, x \in B \},$$

Soit  $\mathcal{F}(n, x)$  l'ensemble des boules de  $\mathcal{B}_n$  qui contiennent  $x$ .

A chaque couple  $(x, y)$  attachons

$$- m(x, y) = \inf(t(x), t(y))$$

-  $p(x) = p(y)$ , point de  $A$  situé dans une boule commune à  $\mathcal{F}(m(x, y), x)$  et

$\mathcal{F}(m(x, y), y)$  quand il y en a une ; ou bien  $p(x)$  et  $p(y)$ , quelconques, situés respectivement dans  $A \cap \mathcal{F}(m(x, y), x)$  et  $A \cap \mathcal{F}(m(x, y), y)$  quand ces deux ensembles

sont disjoints. Nous imposons en outre que  $p(x)=x$  si  $x \in A$ .

$$\text{Posons } f(x,y) = |\xi(p(x)) - \xi(p(y))|.$$

Soit  $x_n$  une suite de points de  $E$  tendant vers  $x$ . Si  $x \notin A$ , à partir d'un certain  $n_0$ , tous les  $x_n$  sont dans une boule de  $\mathcal{S}(t(x),x)$ , auquel cas

$f(x,x_n) = 0$ . Si  $x \in A$

$$- \text{ ou bien } x_n \in A, \text{ alors } f(x,x_n) = |\xi(x) - \xi(x_n)|$$

$$- \text{ ou bien } x_n \notin A, \text{ et } f(x,x_n) = |\xi(x) - \xi(p(x_n))|;$$

mais  $d(x,p(x_n)) \leq d(x,x_n) + 1/t(x_n)$ .  $f$  vérifie donc la seconde propriété requise dans la définition de  $P(a,b,f,D)$ .

Maintenant, si  $(u_i^k)$  est une subdivision de  $[0,1]$  de pas  $1/k$ ,

$$D(a,b) \leq \lim_k \sum_i f(\xi^{-1}(u_i^k), \xi^{-1}(u_{i+1}^k)) = 1.$$

Puis

$$\sum_k f(a_k, a_{k+1}) = \sum_k |\xi(p(a_k)) - \xi(p(a_{k+1}))| \geq |\xi(p(a)) - \xi(p(b))| = 1.$$

$D(a,b)$  vaut donc 1 et  $A$  est issu de  $P(a,b,f,D)$ . Enfin,  $D$  est bien une distance sur  $A$ .

REMARQUE. - On peut s'inspirer de cette dernière démonstration pour trouver une réciproque à la proposition du n° 2. Toutefois, sa formulation est lourde et peu parlante.

REFERENCES. -

- (1) C.A. ROGERS, Hausdorff Measures, Cambridge University Press (1970).
- (2) K. KURATOWSKI, Topology II, Academic Press (1966).

B. JACQUOT  
14, rue C. Monier  
13800 ISTRES