PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

KHALIL NOUREDDINE

Topologies sur $C(T)$ et $C^\infty(T)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 1
, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_1_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t.14-1

TOPOLOGIES SUR C(T) et $C^{\infty}(T)$

par Khalil NOUREDDINE

INTRODUCTION . L'objet de ce travail est d'étudier une topologie du genre "strict" sur l'espace C(T), espace de toutes les applications continues d'un espace complètement régulier T dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels . Pour tout espace localement convexe E, Collins ([8]) appelle topologie stricte la topologie localement convexe la plus fine sur E coïncidant sur les bornés de E avec leurs topologies propres .
Une telle topologie a été appelée dans [14] topologie de b-espace associé à E . La topologie "stricte" qui est l'objet de ce travail est la topologie de b-espace (ou topologie stricte au sens de Collins) associée à la topologie de la convergence compacte sur C(T) . Cette topologie (notée γ) induit sur $C^{\infty}(T)$, espace des applications continues et bornées de T dans $\mathbb{R}$, une topologie γ^{∞} moins fine que la topologie sous-stricte β_0 de [19] . On montrera que le dual de C(T) muni de la topologie γ est l'espace des mesures de Borel t-additives dont le support est un borné warnérien au sens de Buchwalter ([4]) . Au lieu de l'expression "borné warnérien" on utilisera le mot "dominé", notion qui sera précisée par l'introduction de la notion de recouvrement dominant sur T . A tout recouvrement dominant est associé un borné de $C_c(T)$ (i.e. C(T) muni de la topologie de la convergence compacte); et les bornés ainsi obtenus constituent une base des bornés de cet espace .

1. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES . Tout espace topologique considéré dans ce travail est supposé complètement régulier et séparé . Pour un tel espace T on pose les notations suivantes :

C(T) (resp. $C^{\infty}(T)$) est l'algèbre des applications continues (resp. continues et bornées) de T dans le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

Pour tout $f \in C^{\infty}(T)$, $\| f \| = \operatorname{Sup} \{|f(t)|, t \in T\}$. L'application $f \longrightarrow \| f \|$ est la norme de la convergence uniforme sur $C^{\infty}(T)$. $B^{\infty} = \{f \in C^{\infty}(T) ; \| f \| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de $C^{\infty}(T)$.

$C_c(T)$ (resp. $C_c^{\infty}(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie de la convergence compacte.

$C_s(T)$ (resp. $C_s^{\infty}(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie de la convergence simple.

Pour toute partie $A \subset T$, $\bar{A}$ est l'adhérence de A dans T.

Pour toute partie $A \subset T$, ϕ_A est la fonction caractéristique de A (i.e, $\phi_A(t) = 1$ si $t \in A$ et $\phi_A(t) = 0$ si $t \in T \setminus A$).

Un K_σ dans T est une partie de T qui est une réunion d'une suite de compacts dans T.

Pour toute partie A de T et toute application ϕ de T dans $\mathbb{R}$

$$\| \phi \|_A = \operatorname{Sup} \{|\phi(t)|, t \in A\} \text{ et } \| \phi \| = \| \phi \|_T .$$

Une partie A de T est dite bornée ([3],[5]) si, pour tout $f \in C(T)$, $\| f \|_A$ est fini. L'espace T est dit de type μ ([3]) si tout borné dans T est relativement compact.

βT est le compactifié de Stone-Čech de T ([2], [5], [9]).

υT est le replété de T ([2], [5], [9]).

θT est le c-replété de T ([2], [5]).

θT et υT sont des espaces de type μ.

Pour toute application f de T dans $\mathbb{R}$, $S_o(f)$ est le support strict de f (i.e, l'ensemble des $t \in T$ tels que $f(t) \neq 0$) et $S(f)$ est le support de f ($S(f)$ est l'adhérence de $S_o(f)$ dans T).

D'autre part, si E est un espace localement convexe (elc) séparé et si V est un disque (resp. un tonneau) de E, alors on dit que V est un b-disque (resp. un b-tonneau) si pour tout disque borné B de E, $V \cap B$ est un voisinage de zéro dans B. On dit que l'elc E est un b-espace (resp. un espace b-tonnelé) si tout b-disque (resp. b- tonneau) dans E est un voisinage de zéro. On dit que E est un b'-espace si toute forme linéaire sur E, continue sur les bornés de E, est continue. L'espace E est un b-espace si et seulement si E est un b'-espace b-tonnelé. Un b-espace qui admet une base dénombrable de bornés est appelé D_b-espace. Ces différentes classes d'espaces localement convexes ont été étudiées dans [12], [13], [14] et [15].

Pour la suite, on a besoin du résultat suivant :

(1.1) LEMME. *Soient* E *un elc et* F *un sous-espace vectoriel de* E *tel que tout borné de* E *soit contenu dans l'adhérence d'un borné de* F.

(a) *Si* g *est une application linéaire de* F *dans un elc complet* G *et si la restriction de* g *à tout disque borné de* F *est continue, alors* g *est prolongeable d'une manière unique en une application linéaire* f *de* E *dans* G *telle que la restriction de* f *à tout disque borné de* E *soit continue.*

(b) E *est un* b-*espace (resp.* b'-*espace) si et seulement si* F *est un* b-*espace (resp.* b'-*espace).*

(c) *Si* V *est un* b-*tonneau dans* F, *alors son adhérence* $\overline{V}$ *est un* b-*tonneau dans* E.

(d) E *est* b-*tonnelé si et seulement si* F *est* b-*tonnelé.*

PREUVE. La démonstration de (a) n'offre aucune difficulté et (b) résulte de (a), en tenant compte du théorème 2 de [14] en ce qui concerne la condition b-espace.
Pour démontrer (c) il suffit de prouver que, pour tout disque borné B dans E, $\overline{V} \cap B$ est un voisinage de zéro dans B. Or par hypothèse il existe un disque borné B_0 dans F tel que $B \subset \overline{B_0}$ et, il existe un voisinage de zéro W, ouvert et tel que $W \cap B_0 \subset V$. Mais alors $W \cap \overline{B_0} \subset \overline{W \cap B_0} \subset \overline{V}$.

D'où $W \cap B \subset \overline{V} \cap B$ et l'assertion est démontrée .

(d): la condition suffisante est évidente car F est partout dense dans E et la condition nécessaire est une conséquence de (c) .

On sait d'après [17] que tout borné de $C_c(T)$ (resp. $C_s(T)$) est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_c^{\infty}(T)$ (resp. $C_s^{\infty}(T)$) .
On a donc le corollaire suivant :

<u>*(1.2.) Corollaire.*</u> *(a) L'espace* $C_c(T)$ *est un* b*-espace (resp.* b'*-espace,* b*-tonnelé) si et seulement si* $C_c^{\infty}(T)$ *est un* b*-espace (resp.* b'*-espace,* b*-tonnelé) .*

(b) L'espace $C_s(T)$ *est un* b*-espace (resp.* b'*-espace,* b*-tonnelé) si et seulement si* $C_s^{\infty}(T)$ *est un* b*-espace (resp.* b'*-espace ,* b*-tonnelé).*

<u>*2. RECOUVREMENTS SIMPLES D'UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER .*</u>

<u>*(2.1) Définition.*</u> *Soit* T *un espace complètement régulier séparé . On appelle recouvrement simple de* T *toute suite croissante* $\rho = (R_n)_{n\geq 1}$ *de fermés de* T *recouvrant* T *. Une partie* A *de* T *est dite dominée par le recouvrement simple* ρ *s'il existe un entier* $n_o \geq 1$ *tel que* $A \subset R_{n_o}$ *.*

Un recouvrement simple $\rho = (R_n)_{n\geq 1}$ est dit fini s'il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que $R_{n_o} = T$.(Ce qui revient à dire aussi que T est dominé par ρ) .

Toute partie finie de T est dominée par tout recouvrement simple de T.
Réciproquement on a :

<u>*(2.2.) Proposition ([7]).*</u> *Si* A *est une partie de* T *, dominée par tout recouvrement simple de* T *, alors* A *est finie .*

<u>*Preuve .*</u> Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit infinie .
D'après le lemme (1.3) de [7], il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A, deux à deux distincts; et il existe une suite $(V_n)_{n\geq 1}$ de parties fermées de T telle que, pour tout $n \geq 1$, V_n soit un voisinage de x_n et les V_n soient

deux à deux disjoints . Pour tout entier $n \geq 1$, posons
$R_n = (\bigsqcup_{i \leq n} V_i) \cup (T - \bigsqcup_{i \geq 1} \mathring{V}_i)$; où pour tout $i \geq 1$, $\mathring{V}_i$ désigne l'intérieur de V_i . Il est clair que la suite $(R_n)_{n\geq 1}$ est un recouvrement simple de T qui ne domine pas A; ce qui contredit l'hypothèse et parsuite démontre la proposition .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $[-n, n] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ -n \leq x \leq n\}$.
Si $\rho = (R_n)_{n\geq 1}$ est un recouvrement simple de T, on pose
$B^{\rho} = \{f \in C(T)\ ;\ f(R_n) \subset [-n , n]$ pour tout entier $n \geq 1\}$. Les bornés de $C_s(T)$ et les recouvrements simples de T sont liés par la proposition suivante :

<u>*(2.3.) Proposition .*</u> *Les ensembles B^{ρ} , lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements simples de T , forment une base de bornés dans $C_s(T)$.*

<u>*Preuve .*</u> Il est immédiat que B^{ρ} est un borné dans $C_s(T)$. Réciproquement, si B est borné dans $C_s(T)$ et si on pose
$R_n(B) = \{t \in T\ ;\ -n \leq f(t) \leq n$ pour tout $f \in B\}$, alors $\rho(B) = (R_n(B))_{n\geq 1}$ est un recouvrement simple de T et B est contenu dans $B^{\rho(B)}$.

La proposition suivante exprime d'une autre manière un cas particulier du lemme 4 de [16] :

<u>*(2.4.) Proposition .*</u> *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(a) L'espace $C_s(T)$ admet une base dénombrable de bornés .*
- *(a') L'espace $C_s^{\infty}(T)$ admet une base dénombrable de bornés .*
- *(b) Tout recouvrement simple de T est fini .*
- *(c) L'espace T est fini .*

<u>*Preuve .*</u> (c) $\Longrightarrow$ (a) et (a) $\Longleftrightarrow$ (a') sont évidents et (b) $\Longrightarrow$ (c) résulte de la proposition (2.2.) . Reste à démontrer que (a') implique (b) :

En effet, si $\rho = (R_n)_{n\geq 1}$ est un recouvrement de T qui n'est pas fini, alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe $t_n \in T$ et $t_n \notin R_n$. D'autre part, si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une base de bornés dans $C_s^{\infty}(T)$ et si $r_n = \text{Sup}\ \{|f(t_n)|\ ,\ f \in B_n\}$, alors d'après la complète régularité de T il existe une application continue f_n de T dans l'intervalle $[0\ ,\ r_n + 1] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 0 \leq x_n \leq r_n + 1\}$ telle que $f_n(t_n) = r_n + 1$ et $f_n \equiv 0$ sur R_n. Il est clair alors que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $C_s^{\infty}(T)$, mais elle est telle que, pour tout $n \geq 1$, $f_n \notin B_n$; ce qui est absurde, et par suite la proposition est démontrée.

3. RECOUVREMENTS DOMINANTS, PARTIES DOMINEES D'UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER.

(3.1.) Définition. *Soit T un espace complètement régulier (séparé). On appelle recouvrement dominant (ou k-dominant) de T, tout recouvrement simple ρ qui domine les parties compactes de T. Une partie A de T est dite dominée (ou k-dominée) si A est dominée par tout recouvrement dominant.*

(3.2.) Remarque. *Il est clair que la famille des parties dominées de T est héréditaire à gauche (pour la relation d'inclusion) et est stable par passage à l'adhérence et à l'union finie. Elle n'est autre que la famille des bornés warnériens de T introduits et étudiés par H. Buchwalter dans [4]. Cette famille est généralement strictement plus large que la famille des parties relativement compactes de T, comme le montre le travail de Buchwalter. La notion de borné warnérien est liée à la notion de saturation d'une famille de parties de T ([4]). Dans ce travail on utilise le terme "dominé" au lieu de "borné warnérien" pour des raisons de facilité de terminologie.*

A tout recouvrement dominant $\rho = (R_n)_{n\geq 1}$ de T on associe l'ensemble $B^{\rho} = \{f \in C(T)\ ;\ f(R_n) \subset [-n\ ,\ n]\ ,$ pour tout entier $n \geq 1\}$. Il est évident que B^{ρ} est un borné dans l'espace $C_c(T)$. Réciproquement, à tout borné B de $C_c(T)$ on associe le recouvrement $\rho(B) = (R_n(B))$, où pour tout entier $n \geq 1$, $R_n(B) = \{t \in T \; ; \; f(t) \in [-n , n]$ pour tout $f \in B\}$. Le recouvrement $\rho(B)$ est dominant et $B \subset B^{\rho(B)}$. On a donc la proposition suivante :

<u>(3.3.) Proposition .</u> *Les ensembles* B^{ρ}, *lorsque* ρ *décrit l'ensemble des recouvrements dominants de* T, *forment une base de bornés dans* $C_c(T)$.

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on a le corollaire suivant .

<u>(3.4.) Corollaire .</u> *L'ensemble* A *est une partie dominée de* T *si et seulement si tout borné dans* $C_c(T)$ *est uniformément borné sur* A . *En particulier, si* A *est dominée, alors toute application* $f \in C(T)$ *est bornée sur* A .

Ce corollaire est l'une des caractérisations données dans [4] pour les parties dominées .

<u>(3.5.) Proposition .</u> *Soient* T , S *deux espaces complètement réguliers séparés et* f *une application continue de* T *dans* S . *Si* A *est une partie dominée dans* T , *alors* f(A) *est une partie dominée dans* S .

<u>*Preuve .*</u> Cette proposition est le corollaire 3.8. de [4] . Cependant elle peut être démontrée ici de la façon triviale suivante : soit $\rho' = (R'_n)$ un recouvrement dominant de S. Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose $R_n = f^{-1}(R'_n)$, alors la suite (R_n) est un recouvrement dominant de T . Parsuite il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que $A \subset R_{n_o} = f^{-1}(R'_{n_o})$. Ce qui montre que $f(A) \subset R'_{n_o}$; et la proposition est démontrée .

Un espace complètement régulier séparé T est dit dominé si T est une partie dominée de T (ce qui revient à dire aussi que tout recouvrement dominant de T est fini) . Un espace dominé est nécessairement pseudocompact (i.e, $C(T) = C^{\infty}(T)$) car, pour tout $f \in C(T)$, le recouvrement

$\rho(f) = (R_n(f))$, où $R_n(f) = \{t \in T \; ; \; -n \leq f(t) \leq n\}$, est un recouvrement dominant dans T ; parsuite $\rho(f)$ est fini et f est donc borné . Si T est dominé il en est de même de tout sous-espace de βT contenant T .

La proposition suivante est une autre façon d'exprimer le théorème 11 de [21] :

(3.6.) Proposition . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'espace $C_c(T)$ *admet une base dénombrable de bornés .*

(a') L'espace $C_c^{\infty}(T)$ *admet une base dénombrable de bornés .*

(b) L'espace T *est dominé .*

Preuve . (a) <===> (a') est évident . D'autre part si T est dominé, alors tout recouvrement dominant de T est fini; parsuite les ensembles $B_n = \{f \in C(T) \; ; \; f(T) \subset [-n , n] \}$ forment une base de bornés dans $C_c(T)$; ce qui montre que (b) implique (a) . Enfin la démonstration de l'implication (a') ===> (b) est identique à celle de (a') ===> (b) dans la proposition (2.4) .

(3.7.) Remarque . *Les espaces dominés sont les espaces de Warner pseudo-compacts de* [4] . *On sait, d'après* [4] , *que tout produit d'espaces dominés est dominé et si* S *est un fermé d'un espace dominé tel que* S *soit égal à l'adhérence de son intérieur, alors* S *est aussi un espace dominé .*

4. MESURES DE RADON A SUPPORT DOMINE .

Soit toujours T un espace complètement régulier séparé . On entend par mesure de Borel positive sur T toute mesure(*) (finie et dénombrablement additive) positive définie sur la tribu de Borel de T telle que, pour tout borélien A de T, $\mu(A) = \text{Inf} \; \{\mu(U), \; U$ ouvert contenant $A\}$. Une mesure de Borel signée est une différence de deux mesures de Borel positives . Pour une telle mesure μ sur T on note μ^+ (resp. μ^-) la partie positive (resp. négative) de la décomposition de Jordan-Hahn de μ . La mesure $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ est la variation totale de μ . On appelle mesure de Radon ([1]) sur T toute mesure de Borel sur T telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|\ (T \setminus K) \leq \varepsilon$. Il en résulte que; pour tout borélien A dans T et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ tel que $|\mu|\ (A \setminus K) \leq \varepsilon$. On montre ([1] , [20]) que μ est une mesure de Radon sur T si et seulement si μ^+ et μ^- le sont; et par définition même, μ est de Radon si et seulement si $|\mu|$ l'est .

(4.1.) Lemme : *Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert dans T, alors* $|\mu|\ (U) = \mathrm{Sup}\ \{\int f\, d|\mu|\ ;\ f \in C(T),\ 0 \leq f \leq 1$ *et* $S(f) \subset U\}$.

Preuve . La mesure μ étant de Radon, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset U$ tel que $|\mu|(U \setminus K) \leq \varepsilon$. La compacité de K et la complète régularité de T assurent l'existence d'un ouvert V tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Si l'on pose $F = T \setminus V$, alors F est un fermé de T disjoint de K . Donc, par complète régularité de T, il existe une application continue f de T dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ telle que $f \equiv 1$ sur K et $f \equiv 0$ sur F . Il en résulte que $S(f)$ est inclus dans $\overline{V}$ qui est inclus dans U et parsuite $|\mu|\ (K) \leq \int f\, d|\mu| \leq |\mu|(U)$ et $|\mu|(U) - \int f\, d|\mu| \leq \varepsilon$. Le lemme est donc démontré .

Soit μ une mesure de Radon sur T . On appelle support de μ (et on note $S(\mu)$) le plus petit fermé F de T tel que $|\mu|(T \setminus F) = 0$. Il est clair qu'un tel fermé existe et est caractérisé aussi comme étant le plus petit fermé F de T tel que $\int f\, d\mu = 0$ chaque fois que $f \in C^{\infty}(T)$ avec $f \equiv 0$ sur F . Le support de μ est l'adhérence d'un K_σ dans T .

(4.2.) Lemme . *Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert dans T tel que $U \cap S(\mu) \neq \emptyset$, alors il existe $f \in C^{\infty}(T)$ tel que* $S(f) \subset U$ et $\int f\, d\mu = 1$.

Preuve . Il suffit de montrer qu'il existe $f \in C^{\infty}(T)$ tel que $S(f) \subset U$ et $\int f\, d\mu \neq 0$. En effet, si pour tout $f \in C^{\infty}(T)$ tel que $S(f) \subset U$, on avait $\int f\, d\mu = 0$; alors pour tout $f \in C^{\infty}(T)$ tel que $0 \leq f \leq 1$ et $S(f) \subset U$, on aurait

$\int f \, d|\mu| = \operatorname{Sup} \{ \, |\int g \, d\mu \, | , \, g \in C^{\infty}(T)$ et $0 \le |g| \le f \, \} = 0$.

Il en résulte (d'après le lemme précédent) que $|\mu|(U) = 0$ et parsuite $U \cap S(\mu) = \emptyset$; ce qui est absurde .

On sait (d'après [1] et [20]) qu'il existe une isométrie linéaire entre l'espace des mesures de Radon μ sur T et l'espace des formes linéaires L sur $C^{\infty}(T)$ continues sur la boule unité B^{∞} munie de la topologie de la convergence compacte - Les deux espaces sont supposés munis des normes respectives $\mu \longrightarrow \|\mu\| = |\mu|(T)$ et $L \longrightarrow \|L\| = \operatorname{Sup} \{ |L(f)| , f \in B^{\infty} \}$ - . Le théorème suivant montre qu'il y a une isométrie analogue entre l'espace des mesures de Radon à support dominé sur T et l'espace des formes linéaires continues sur les bornés de $C_c^{\infty}(T)$ ou $C_c(T)$:

<u>(4.3.) Théorème .</u> *(a) Si* L *est une forme linéaire continue sur les bornés de* $C_c^{\infty}(T)$*, alors la mesure de Radon correspondante est à support dominé .*

(b) Si μ *est une mesure de Radon à support dominé sur* T *, alors la forme linéaire* $f \longrightarrow L(f) = \int f \, d\mu$ *est continue sur les bornés de* $C_c^{\infty}(T)$.

<u>*Preuve.*</u> (a) Soit μ la mesure de Radon sur T identifiée à L et soit $S(\mu)$ son support . Si $S(\mu)$ n'est pas dominé dans T, alors il existe un recouvrement dominant $\rho = (R_n)$ de T tel que, pour tout $n \ge 1$, $S(\mu) \cap (T \setminus R_n) \ne \emptyset$. D'après le lemme (4.2), il existe $f_n \in C^{\infty}(T)$ tel que $S(f_n) \subset T \setminus R_n$ et $\int f_n \, d\mu = 1$. La suite (f_n), ainsi obtenue, converge vers zéro dans $C_c^{\infty}(T)$ et est donc bornée . Comme L est continue sur les bornés de $C_c^{\infty}(T)$, la suite $(\int f_n \, d\mu)$ doit converger vers zéro; d'où la contradiction.

(b) Puisque les ensembles $B^{\rho} \cap C^{\infty}(T)$ forment une base de bornés dans $C_c^{\infty}(T)$ il suffit de montrer que, si $\rho = (R_n)$ est un recouvrement dominant quelconque de T, alors la restriction de L à $B^{\rho} \cap C_c^{\infty}(T)$ est continue . Et puisque le borné $B^{\rho} \cap C_c^{\infty}(T)$ est un disque, il suffit donc de démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ et un nombre réel $r > 0$ tels que, si $f \in B^{\rho} \cap C^{\infty}(T)$ avec $\|f\|_K \le r$, on ait $| \int f \, d\mu | \le \varepsilon$. Or le support de μ

est dominé dans T, donc il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que $S(\mu) \subset \Omega_{n_o}$; et puisque μ est de Radon, il existe un compact $K \subset S(\mu)$ tel que $|\mu|\ (S(\mu) \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2n_o}$. Posons $r = \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}$ (on suppose que $\|\mu\| > 0$, car le cas $\|\mu\| = 0$ est trivial). Si $f \in B^{\rho} \cap C^{\infty}(T)$ avec $\|f\|_K \leq r$, on a alors ,

$$|L(f)| = \left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|d|\mu| = \int_{S(\mu)} |f|d|\mu| = \int_K |f|d|\mu| + \int_{S(\mu)-K} |f|d|\mu|$$

$$\leq r.|\mu|(K) + n_o.|\mu|(S(\mu) \setminus K) \leq {}^{\varepsilon}/_2 + {}^{\varepsilon}/_2 = \varepsilon .$$

Et le théorème est démontré .

Dans la suite, $M_\gamma(T)$ désigne l'espace des mesures de Radon à support dominé sur T . $M_\gamma(T)$ est un sous-espace de $M_t(T)$, espace des mesures de Radon sur T . Le théorème précédent et le lemme (1.1) montrent que $M_\gamma(T)$ est l'espace des formes linéaires continues sur les bornés de $C_c(T)$

5. UNE TOPOLOGIE STRICTE SUR C(T) .

Soit T un espace complètement régulier séparé . On désigne par Φ l'ensemble des applications bornées ϕ de T dans $\mathbb{R}$, à support dominé et telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T \setminus K} \leq \varepsilon$. Pour tout $\phi \in \Phi$ on note $\|\ \|_\phi$ la semi-norme sur C(T) définie par $\|f\|_\phi = \|f\phi\|$ pour tout $f \in C(T)$. Les semi-normes $\|\ \|_\phi, \phi \in \Phi$, déterminent sur C(T) (resp. $C^{\infty}(T)$) une topologie localement convexe notée γ (resp. γ^{∞}) . Un système fondamental de voisinages de zéro pour γ (resp. γ^{∞}) est donné par les ensembles

$$V_\phi = \{f \in C(T)\ ;\ \|f\|_\phi = \|f\phi\| \leq 1\} \quad (\text{resp. } V_\phi^{\infty} = V_\phi \cap C^{\infty}(T)\}\ ) .$$

On désigne par $C_\gamma(T)$ (resp. $C_\gamma^{\infty}(T)$) l'espace C(T) (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie γ (resp. γ^{∞}) .

(5.1.) Proposition . *(a) La topologie γ est plus fine que la topologie de la convergence compacte .*

(b) La topologie γ^{∞} *est moins fine que la topologie sous-stricte* β_o *([19]).*

Preuve . (a) est évident et (b) résulte du fait que la topologie β_o est définie par les semi-normes $\| \ \|_{\phi}$; où ϕ décrit l'ensemble de toutes les applications bornées de T dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\| \phi \|_{T \setminus K} \leq \varepsilon$; sans aucune restriction sur le support de ϕ .

(5.2.) Proposition : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) La topologie γ *est la topologie de la convergence compacte*

(a') La topologie γ^{∞} *est la topologie de la convergence compacte*

(b) Tout K_σ *dominé dans* T *est relativement compact .*

Preuve . (a) $\Longrightarrow$ (a') et (b) $\Longrightarrow$ (a) sont évidents; démontrons que (a') implique (b) en suivant la preuve de la proposition 1. (b) de [16]; comme dans [10], soit $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de compacts dans T telle que la réunion $\bigsqcup_{n \geq 1} K_n$ soit dominée dans T sans qu'elle soit relativement compacte . Alors, pour tout compact K de T, on a $\bigsqcup_{n\geq 1} K_n \not\subset K$ et parsuite il existe $x_K \in \cup K_n$ et $x_K \notin K$. Soit n_K le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x_K \in \mathring{K}_n$ et soit f_K une application continue de T dans $[0 , n_K]$ telle que $f_K(x_K) = n_K$ et $f_K \equiv 0$ sur K . La suite généralisée (f_K) converge vers zéro dans $C_c^{\infty}(T)$. D'autre part soit ϕ l'élément de Φ défini par : $\phi \equiv 0$ sur $T \setminus \bigsqcup_{n \geq 1} K_n$, $\phi \equiv 1$ sur K_1 et $\phi \equiv \frac{1}{n}$ sur $K_n \setminus K_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Pour tout compact $K \subset T$, on a $\| f_K \phi \| \geq |\phi(x_K) f_K(x_K)| = 1$. Parsuite (f_K) ne converge pas vers zéro pour la topologie γ^{∞} . Cette contradiction achève la démonstration de la proposition .

(5.3.) Proposition . La topologie γ *coïncide sur les bornés de* $C_c(T)$ *avec la topologie de la convergence compacte. En particulier* $C_c(T)$ *et* $C_\gamma(T)$

ont les mêmes bornés .

Preuve . Il suffit de prouver que si $\rho = (R_n)$ est un recouvrement dominant quelconque de T, alors sur le disque borné B^{ρ} la topologie γ est moins fine que la topologie de la convergence compacte . De fait, soit $\phi \in \Phi$, $\phi \neq 0$ et $V_{\phi} = \{f \in C(T) ; \| f\phi \| \leq 1\}$. Puisque le support de ϕ est dominé, il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset R_{n_o}$. D'autre part il existe un compact $K \subset T$ tel que $\| \phi \|_{T\setminus K} \leq \frac{1}{n_o}$. Si l'on pose $W = \{f \in C(T) ; \|f\|_K \leq \frac{1}{\|\phi\|}\}$, alors on a $W \cap B^{\rho} \subset V\phi \cap B^{\rho}$ et l'assertion est démontrée . Ce qui démontre la proposition car la deuxième assertion est évidente .

(5.4.) Corollaire . *La topologie* γ^{∞} *est identique à la topologie sous-stricte* β_0 *si et seulement si l'espace* T *est dominé .*

Preuve . La condition est suffisante car si T est dominé , alors tout K_{σ} est dominé dans T . Réciproquement si $\gamma^{\infty} = \beta_0$, alors l'espace $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ admet une base dénombrable de bornés et il en est de même de $C^{\infty}_{c}(T)$. Ce qui implique que T est dominé d'après la proposition (3.6) .

Le corollaire suivant est une autre conséquence immédiate de la proposition précédente :

(5.5.) Corollaire . *Tout borné dans* $C_{\phi}(T)$ *est contenu dans l'adhérence d'un borné de* $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ *. En particulier* $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ *est partout dense dans* $C_{\gamma}(T)$ *et a le même dual .*

On sait, avec le théorème 1 de [21] que les conditions suivantes sont équivalentes : 1) L'espace $C_c(T)$ est complet, 2) l'espace $C_c(T)$ est quasi-complet, 3) T est un $k_{\mathbb{R}}$-espace (i.e, toute application de T dans $\mathbb{R}$, continue sur les compacts de T, est continue) . La proposition suivante montre que ces conditions équivalentes sont nécessaires et suffisantes pour que $C_{\gamma}(T)$ soit complet ou quasi-complet .

<u>*(5.6.) Proposition .*</u> *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'espace* $C_{\gamma}(T)$ *est complet*

(b) *L'espace* $C_{\gamma}(T)$ *est quasi-complet*

(b') *L'espace* $C_{c}(T)$ *est quasi-complet .*

(a') *L'espace* $C_{c}(T)$ *est complet .*

(c) *L'espace* T *est un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace .*

<u>*Preuve .*</u> Les deux implications (a) $\Longrightarrow$ (b) et (b) $\Longrightarrow$ (b') sont évidentes ; et on sait que les assertions (a'), (b') et (c) sont équivalentes. démontrons seulement que (a') implique (a) : en effet, il est facile de voir que, pour tout $\phi \in \Phi$, l'ensemble $V_{\phi} = \{f \in C(T) \; ; \|f\phi\| \leq 1\}$ est un tonneau dans $C_c(T)$ (c'est même un tonneau dans $C_s(T)$). Il en résulte que $C_{\gamma}(T)$ admet un système fondamental de voisinages de zéro fermés dans $C_c(T)$ et que l'implication résulte d'un théorème classique sur les groupes topologiques complets .

<u>*(5.7.) Corollaire .*</u> *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'espace* $C_{\gamma}^{\infty}(T)$ *est complet*

(b) *L'espace* $C_{\gamma}^{\infty}(T)$ *est quasi-complet .*

(c) *L'espace* T *est un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace dominé .*

<u>*Preuve .*</u> (a) $\Longrightarrow$ (b) est évident et (c) implique (a) d'après la proposition précédente; reste à démontrer que (b) implique (c) : en effet, si $C_{\gamma}^{\infty}(T)$ est quasi-complet, alors il en est de même de $C_c^{\infty}(T)$. Donc tout disque borné fermé B de $C_c^{\infty}(T)$ engendre un sous-espace vectoriel de $C_c^{\infty}(T)$, qui est un espace de Banach pour la norme jauge . Ce qui implique facilement que $C_c^{\infty}(T)$ admet une base dénombrable de bornés et parsuite T est dominé . Il est clair alors que l'égalité $C(T) = C^{\infty}(T)$ et la proposition précédente montrent que l'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$-espace .

6. DUAL DE $C_\gamma(T)$ ET $C_\gamma^\infty(T)$.

On a déjà remarqué que les deux espaces $C_\gamma(T)$ et $C_\gamma^\infty(T)$ ont le même dual . Plus précisément on a :

(6.1.) Théorème. *Le dual de $C_\gamma(T)$ (ou $C_\gamma^\infty(T)$) est l'espace $M_\gamma(T)$, espace des mesures de Radon sur T , à support dominé .*

Preuve . Si L est une forme linéaire continue sur $C_\gamma^\infty(T)$, alors sa restriction à tout borné de $C_c^\infty(T)$ est continue . Parsuite elle peut être identifiée à une mesure de Radon à support dominé d'après le théorème (4.3.) . Réciproquement, soit μ une mesure de Radon à support dominé sur T et soit $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de compacts contenus dans $S(\mu)$ telle que $|\mu|(T \setminus K_n) \leq 2^{-2n}$ pour tout entier $n \geq 1$. La fonction $\phi = \sum_{n\geq 1} 2^{-2n} \phi_{K_n}$, où ϕ_{K_n} est la fonction caractéristique de K_n appartient à Φ et, pour tout $f \in C^\infty(T)$ tel que $\|f\phi\| \leq 1$, on a $\|f\|_{K_{n+1}\setminus K_n} \leq 2^n$. Il en résulte que, pour des tels f, on a

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d|\mu| = \int_{K_1} |f|\,d|\mu| + \sum_{n\geq 1} \int_{K_{n+1}\setminus K_n} |f|\,d|\mu|$$

$$\leq |\mu|(K_1) \cdot \|f\|_{K_1} + \sum_{n\geq 1} 2^{-2n} \|f\|_{K_{n+1}\setminus K_n} \leq |\mu|(T) + 1 .$$

Parsuite la forme linéaire $f \longrightarrow \int f\,d\mu$ est continue pour γ^∞ et le théorème est démontré .

Pour toute partie H de $M_t(T)$ (espace des mesures de Radon sur T), on appelle support de H, et on note S(H), le plus petit fermé F de T tel que $|\mu|(T \setminus F) = 0$ pour toute mesure $\mu \in H$. Le support de H n'est autre que l'adhérence dans T de la réunion $\bigcup_{\mu\in H} S(\mu)$ des supports de toutes les mesures μ appartenant à H . Le théorème suivant caractérise les parties γ^∞-équicontinues de $M_\gamma(T)$ au moyen des supports de ces parties :

(6.2.) Théorème . *Soit* H *une partie de* $M_{\gamma}(T)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'ensemble* H *est* γ*-équicontinu .*

(a') *L'ensemble* H *est* γ^{∞}*-équicontinu .*

(b) *L'ensemble* H *est fortement borné dans* $M_{\gamma}(T)$ *et il existe une partie dominée fermée* S *de* T *telle que, pour tout recouvrement dominant* $\rho = (R_n)$ *de* T *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset S$ *tel que* $|\mu|(|f|) \leq \varepsilon$ *pour tout* $\mu \in H$ *et tout* $f \in B^{\rho} \cap C^{\infty}(T)$ *avec* $f \equiv 0$ *sur* K .

(c) *Sup* $\{ |\mu|(T) , \mu \in H \}$ *est fini, le support* S(H) *est dominé et, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset T$ *tel que* $|\mu|(T \setminus K) \leq \varepsilon$ *pour tout* $\mu \in H$.

Preuve . Il est clair que (a) est équivalente à (a'); il suffit donc de prouver l'équivalence entre (a') et les autres assertions en suivant [18] ou [19] : (a') $\Longrightarrow$ (b) : d'abord H est évidemment borné dans le dual fort de $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ (qui est aussi le dual fort de $C_{\gamma}(T)$) . D'autre part la γ^{∞}-équicontinuité (ou la γ-équicontinuité) de H implique l'existence d'une fonction $\phi \in \Phi$ telle que $H \subset V^{\circ}_{\phi}$, où V°_{ϕ} désigne le polaire de V_{ϕ} (ou de $V^{\infty}_{\phi} = V_{\phi} \cap C^{\infty}(T)$) dans $M_{\gamma}(T)$. Comme le support $S(\phi)$ est dominé; alors pour le recouvrement $\rho = (R_n)$, il existe un entier $n_{\circ}$ tel que $S(\phi) \subset R_{n_{\circ}}$; et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S(\phi)$ tel que $\| \phi \|_{T \setminus K} \leq \frac{\varepsilon^{\circ}}{2n_{\circ}}$. Donc, si $f \in B^{\rho} \cap C^{\infty}(T)$ avec $f \equiv 0$ sur K, $\frac{2}{\varepsilon} f$ appartient à V_{ϕ} et pour toute mesure $\mu \in H$ on a $|\mu(f)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il en résulte que $|\mu|(|f|) = \mu^{+}(|f|) + \mu^{-}(|f|) \leq \varepsilon$. (b) $\Longrightarrow$ (c) : il est clair que $\operatorname{Sup} \{ |\mu|(T) , \mu \in H \}$ est fini; et par hypothèse il existe une partie dominée fermée S de T telle que, pour le recouvrement trivial $\omega = (R_n)$ (où $R_n = T$ pour tout entier n) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $|\mu|(|f|) \leq \varepsilon$ pour tout $\mu \in H$ et tout $f \in B^{\infty}$ avec $f \equiv 0$ sur K . Or $|\mu|(T \setminus K) = \operatorname{Sup} \{|\mu|(K'), K' \text{ compact} \subset T \setminus K\}$. Mais pour tout compact

$K' \subset T - K$, il existe $f \in B^\infty$ tel que $f \equiv 0$ sur K et $f \equiv 1$ sur K'.
Ce qui implique que $|\mu|(K') = \int_{K'} |f| \, d|\mu| \leq |\mu|(|f|) \leq \varepsilon$. Parsuite on a $|\mu|(T \setminus K) \leq \varepsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$. Il en résulte que le support $S(H)$ est contenu dans S et l'assertion (c) est démontrée.

(c) $\Longrightarrow$ (a') : soit (K_n) une suite croissante de compacts contenus dans $S(H)$ telle que $\text{Sup}\{ |\mu|(T \setminus K_n), \mu \in H\} \leq 2^{-2n}$, pour tout entier $n \geq 1$.
La fonction $\phi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \phi_{Y_n}$ appartient à Φ et, pour tout $f \in V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)$, on a $\| f \|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq 2^n$. Donc pour tout $f \in V_\phi^\infty$ et tout $\mu \in H$, on a

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d|\mu| = \int_{K_1} |f| \, d|\mu| + \sum_{n\geq 1} \int_{K_{n+1} \setminus K_n} |f| \, d|\mu|$$

$$\leq |\mu|(K_1) \cdot \|f\|_{K_1} + \sum_{n\geq 1} 2^{-2n} \cdot \|f\|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq |\mu|(T) + 1 .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

7. AUTRES PROPRIETES DE $C_\gamma(T)$ ET $C_\gamma^\infty(T)$.

Le théorème suivant montre bien que les deux topologies γ et γ^∞ sont des topologies strictes au sens de Collins ([8]).

(7.1.) Théorème. *Les deux espaces* $C_\gamma(T)$ *et* $C_\gamma^\infty(T)$ *sont des* b-*espaces*.

Preuve. Le corollaire (5.2) et le lemme (1.1.) montrent qu'il suffit de prouver que $C_\gamma^\infty(T)$ est un b-espace. En effet, soit γ' la topologie localement convexe la plus fine sur $C^\infty(T)$ qui coïncide avec γ^∞ sur les bornés de $C_\gamma^\infty(T)$. Il est clair que γ' est plus fine que γ^∞ ; mais ces deux topologies sur $C^\infty(T)$ donnent le même dual $M_\gamma(T)$ et parsuite ont les mêmes tonneaux. On note $C_{\gamma'}^\infty(T)$ l'espace $C^\infty(T)$ muni de la topologie γ'. Le théorème serait prouvé si on démontre que, si V est un voisinage disqué et fermé de zéro dans $C^{\infty}_{\gamma'}(T)$, alors son polaire V° dans $M_{\gamma}(T)$ vérifie la condition (c) du théorème (6.2) . D'abord V est un tonneau bornivore (i.e, V absorbe les bornés) dans $C^{\infty}_{\gamma}(T)$. Donc $\sup\{|\mu|(T),\ \mu \in V^{\circ}\}$ est fini . D'autre part, la topologie sous-stricte β_0 est une topologie de b-espace ([19]) et est plus fine que γ^{∞}, et parsuite plus fine aussi que γ'([14]) . Il en résulte que V° est β_0-équicontinu et le théorème 5.1. de [19] montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T \setminus K) \leq \varepsilon$ pour toute mesure $\mu \in V^{\circ}$. Reste à démontrer que le support $S(V^{\circ})$ est dominé, et il suffit d'utiliser alors la technique de la preuve du théorème (3. 11) de [4] : soit en effet $\rho = (R_n)$ un recouvrement dominant de T ne dominant pas $S(V^{\circ})$. Pour tout entier $n \geq 1$ on a alors $S(V^{\circ}) \cap (T \setminus R_n) \neq \emptyset$. Comme $S(V^{\circ}) = \overline{\bigcup}\{S(\mu),\ \mu \in V^{\circ}\}$, il existe donc $\mu_n \in V^{\circ}$ tel que $S(\mu_n) \cap (T \setminus R_n) \neq \emptyset$; et d'après le lemme (4.2), il existe $f_n \in C^{\infty}(T)$ tel que $S(f_n) \subset T \setminus R_n$ et $\int f_n\, d\mu_n = n$. La suite (f_n) ainsi formée est bornée dans $C^{\infty}_c(T)$ et parsuite elle est bornée aussi dans $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ (Elle converge même vers zéro dans $C^{\infty}_c(T)$ et $C^{\infty}_{\gamma}(T)$). Comme V est un tonneau bornivore dans $C^{\infty}_{\gamma}(T)$; alors V° est uniformément borné sur la suite (f_n) . D'où la contradiction, et par conséquent la démonstration du théorème est achevée .

<u>*(7.2.) Corollaire .*</u> *L'espace* $C_{\gamma}(T)$ *(resp.* $C^{\infty}_{\gamma}(T)$ *) est le* b-*espace et l'espace* b-*tonnelé associés à* $C_c(T)$ *(resp.* $C^{\infty}_c(T)$.

<u>*Preuve .*</u> Le fait que $C_{\gamma}(T)$ (resp. $C^{\infty}_{\gamma}(T)$) est le b-espace associé à $C_c(T)$ (resp. $C^{\infty}_c(T)$) résulte trivialement du théorème précédent et de la définition du b-espace associé à un espace localement convexe ([12] , [14]). D'autre part les ensembles V_{ϕ} (resp. $V^{\infty}_{\phi} = V_{\phi} \cap C^{\infty}(T)$) qui forment un système fondamental de voisinages de zéro dans $C_{\gamma}(T)$ (resp. $C^{\infty}_{\gamma}(T)$), sont des b-tonneaux dans $C_c(T)$ (resp. $C^{\infty}_c(T)$) . Sachant alors que tout b-espace est b-tonnelé, le théorème précédent et la définition de l'espace b-tonnelé associé à un elc ([12] , [14]) montrent que $C_{\gamma}(T)$ (resp. $C^{\infty}_{\gamma}(T)$) est l'espace b-tonnelé associé à $C_c(T)$ (resp. $C^{\infty}_c(T)$) .

Le théorème et le corollaire précédents permettent d'énoncer le théorème de caractérisation suivant :

(7.3.) Théorème . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'espace* $C_c(T)$ *est un* b-*espace* .

(b) *L'espace* $C_c(T)$ *est* b-*tonnelé* .

(a') *L'espace* $C_c^{\infty}(T)$ *est un* b-*espace* .

(b') *L'espace* $C_c^{\infty}(T)$ *est* b-*tonnelé* .

(c) *Tout* K_σ *dominé dans* T *est relativement compact* .

Preuve . Ce théorème résulte immédiatement du corollaire (7.2) et de la proposition (5.2), sachant bien entendu qu'un elc E est un b-espace (resp. un espace b-tonnelé) si et seulement si E est égál à son b-espace (resp. espace b-tonnelé) associé .

Le corollaire suivant a été déjà démontré dans [15] et généralisé dans [16] :

(7.4) Corollaire . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L'espace* $C_c(T)$ *est un* D_b-*espace* .

(a') *L'espace* $C_c^{\infty}(T)$ *est un* D_b-*espace* .

(b) *Tout* K_σ *dans* T *est relativement compact* .

Preuve . L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (a') étant évidente; démontrons que (a') implique (b) : en effet, si $C_c^{\infty}(T)$ est un D_b-espace, alors il admet une base dénombrable de bornés ; donc T est dominé et parsuite toute partie de T est dominée dans T . En particulier les K_σ sont dominés dans T, et l'assertion (c) du théorème (7.1) montrent qu'ils sont relativement compacts . Réciproquement, pour démontrer que (b) implique (a) ou (a'), il suffit de prouver (compte tenu du théorème précédent) que (b) implique que l'espace T est dominé . Raisonnons par l'absurde et supposons que T ne soit pas dominé . Soit alors $\rho = (R_n)$ un recouvrement dominant de T tel que $R_n \neq T$ pour tout $n \geq 1$. Ce qui fait que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $t_n \in T - R_n$. Mais l'ensemblè $\{t_n , n \geq 1\}$ est un K_σ et est donc relativement compact . Parsuite il existe un entier $n_o \geq 1$ tel que

$\{t_n \ , n \geq 1\} \subset P_{n_o}$; ce qui est absurde et le corollaire est démontré .

(7.5.) Remarque . *On sait d'après* [17] *que la condition (c) du théorème (7.3.) est équivalente à dire que l'espace* $C_c(T)$ *est* d-*infratonnelé* ([7]) *et on sait aussi que la condition (b) du corollaire précédent est équivalente à dire que* $C_c(T)$ *est un espace DF (*[21]*)* .

(7.6.) Corollaire . *Si dans l'espace* T *toute partie dominée est relativement compacte - En d'autres termes si l'espace* $C_c(T)$ *est infratonnelé (*[4] , [21]*) -, alors* $C_c(T)$ *et* $C_c^{\infty}(T)$ *sont des* b-*espaces* .

Preuve . Ce corollaire est évident si l'on tient compte du théorème (7.3), du théorème de Warner ([4], [21]) et du fait que $C_c(T)$ et $C_c^{\infty}(T)$ sont simultanément infratonnelés ou non .

(7.7.) Remarque. Le corollaire précédent montre, en particulier, que si l'espace T *est paracompact, ou replet, ou* C-*replet, ou plus généralement de type* (μ)*, alors* $C_c(T)$ *et* $C_c^{\infty}(T)$ *sont des* b-*espaces. Dans chacun de ces cas et dans le cas du corollaire (7.6.) la topologie* γ^{∞} *coïncide sur* $C^{\infty}(T)$ *avec la topologie de la convergence compacte et est une topologie d'espace infratonnelé. Par suite dans tous ces cas l'espace* $C_{\gamma}^{\infty}(T)=C_c^{\infty}(T)$ *est un espace de Mackey.*

Pour la suite de ce paragraphe on a besoin de rappeler que l'espace $C_c(\ \mu T\ )$ est l'espace tonnelé associé à $C_c(T)$ ([3] , l'espace μT est le plus petit sous-espace de type μ de υT contenant l'espace T). D'autre part on vient de démontrer que $C_{\gamma}(T)$ est l'espace b-tonnelé associé au même espace $C_c(T)$. Il en résulte donc que la topologie γ est moins fine que la topologie de $C_c(\ \mu T\ )$. Parsuite, si l'on veut chercher une famille $\mathfrak{P}$ de parties de υT telle que γ soit la topologie de $\mathfrak{P}$-convergence (i.e, topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{P}$), alors tout élément de cette famille devrait être une partie relativement compacte dans μT . Comme dans [16] le théorème suivant montre que, si une telle famille $\mathfrak{P}$ existe, alors elle serait nécessairement une sous-famille de la famille des parties relativement compactes de T .

(7.8.) Théorème . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La topologie* γ *est la topologie de la convergence compacte .*

(a') *La topologie* γ^{∞} *est la topologie de la convergence compacte .*

(b) *La topologie* γ *(ou* γ^{∞}*) est une topologie de* $\mathfrak{P}$*-convergence, où* $\mathfrak{P}$ *est une famille de parties relativement compactes dans* μT .

Preuve . Il est clair que (a) <===> (a') et (a') ===> (b) sont évidents ; reste à prouver que, si γ^{∞} est une topologie de $\mathfrak{P}$ -convergence (où $\mathfrak{P}$ est une famille de parties relativement compactes dans μT), alors γ^{∞} est moins fine que la topologie de la convergence compacte sur $C^{\infty}(T)$; et pour cela, il suffit de démontrer que tout élément de $\mathfrak{P}$ est une partie relativement compacte dans T . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément $A \in \mathfrak{P}$ tel que A ne soit pas une partie relativement compacte dans T . Pour tout compact $K \subset T$, il existe alors un élément $x_K \in A$ tel que $x_K \notin K$. Par complète régularité de T, il existe une application continue f_K de T dans $[0 , 1]$ telle que $f_K(x_K) = 1$ et $f_K \equiv 0$ sur K . On obtient ainsi une suite généralisée (f_K) dans la boule unité B^{∞} de $C^{\infty}(T)$ qui converge vers zéro dans $C_c^{\infty}(T)$. Comme la topologie γ^{∞} coïncide sur B^{∞} avec la topologie de $C_c^{\infty}(T)$, alors la suite généralisée (f_K), K décrivant l'ensemble des compacts de T, converge vers zéro pour la topologie γ^{∞}. Ce qui n'est pas le cas car on a $\|f_K\|_A = 1$ pour tout compact $K \subset T$. Cette contradiction achève la démonstration du théorème .

(7.9.) Corollaire . *Si l'espace* $C_{\gamma}(T)$ (ou $C_{\gamma}^{\infty}(T)$) *est infratonnelé, alors la topologie* γ *est la topologie de la convergence compacte .*

Preuve . D'abord il est facile de démontrer que, moyennant le corollaire (5.5), les deux espaces $C_{\gamma}(T)$ et $C_{\gamma}^{\infty}(T)$ sont en même temps infratonnelés ou non. D'autre part on sait avec le corollaire (7.2) que $C_{\gamma}(T)$ est l'espace b-tonnelé associé à $C_c(T)$. Comme tout espace infratonnelé est b-tonnelé, alors la topologie γ est moins fine que la topologie de l'espace infratonnelé associé à $C_c(T)$. Ce qui fait que, si $C_{\gamma}(T)$ est infratonnelé, alors il est l'espace infratonnelé associé à

$C_c(T)$; et dans ce cas γ est une topologie de convergence uniforme sur une famille de parties relativement compactes de μT (comme on le sait d'après [6]) . Donc le corollaire résulte du théorème précédent .

(7.10.) Remarque . *Le théorème (7.8) montre que, si* $C_c(T)$ *n'est pas un* b-*espace, alors la topologie* γ *associée à* $C_c(T)$ *n'est pas une topologie de convergence uniforme sur une famille de parties de* μT *ou* υT . *Le plan de Tychonoff* $\mathbf{T}$ *([2] , [9]) donne l'exemple d'un espace complètement régulier, pseudocompact et dans lequel il existe un* K_σ *qui n'est pas relativement compact . Or il est facile de démontrer que* $\mathbf{T}$ *est un espace dominé . Parsuite* $C_c(\mathbf{T})$ *est un espace localement convexe qui admet une base dénombrable de bornés et qui n'est pas un* b-*espace ou un* D_b-*espace .*

(7.11.) Remarque . *On peut noter (comme cas analogue à celui du corollaire (7.9)) que si l'espace* $C_\gamma(T)$ *est séparable, alors la topologie* γ *est la topologie de la convergence compacte . Car dans ce cas l'espace* $C_c(T)$ *est séparable aussi, et le théorème 5 de* [21] *montre qu'il existe sur* T *une topologie métrisable séparable moins fine que la topologie de* T . *Mais alors l'espace* T *est* c-*replet ([5]) et parsuite l'espace* $C_c(T)$ *est un* b-*espace d'après la remarque (7.7) .*

8. GENERALISATIONS AUX ESPACES $C_p(T)$.

Soit P une famille de parties relativement compactes de T . On suppose que P est héréditaire à gauche, stable par réunion finie et par passage à l'adhérence, et en plus recouvrant T . Une partie A de T est dite un K_{p_σ} si A est une réunion d'une suite de compacts appartenant à P . On pose aussi les notations et les définitions suivantes :

- $C_p(T)$ (resp. $C_p^{\infty}(T)$) désigne l'espace C(T) (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie de convergence uniforme sur les éléments de P . (On sait d'après [17] que tout borné dans $C_p(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné dans $C_p^{\infty}(T)$.

- Un recouvrement simple ρ de T est dit p-dominant si ρ

domine tout élément de $\mathcal{P}$; et une partie de T est dite p-dominée si elle est dominée par tout recouvrement p-dominant .

- $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la famille des parties p-dominées de T. Tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}$ est une partie bornée de T et $\tilde{\mathcal{P}}$ est la famille saturée de $\mathcal{P}$ ([4]) . $\mathcal{P}$ est dite saturée si $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$. Il est à noter que les éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$ ne sont pas nécessairement relativement compacts dans T ([4]).

- Φ_p désigne l'ensemble des applications bornées ϕ de T dans $\mathbb{R}$, à support p-dominé et telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \in \mathcal{P}$ tel que $\|\phi\|_{T\setminus K} \leq \varepsilon$.

- γ_p est la topologie localement convexe définie sur C(T) par la famille des semi-normes $\|\ \|_{\phi}$, $\phi \in \Phi_p$. γ_p^{∞} est la topologie induite sur $C^{\infty}(T)$ par la topologie γ_p .

- $C_{\gamma_p}(T)$ (resp. $C^{\infty}_{\gamma_p^{\infty}}(T)$) est l'espace C(T) (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie γ_p (resp. γ_p^{∞}) .

- $M_{\gamma_p}(T)$ est l'espace des mesures de Radon sur T, à support p-dominé .

Avec les notations et les définitions précédentes, les théorèmes (4.3), (6.1), (6.2), (7.1) et (7.3), et le corollaire (7.2) restent vrais lorsqu'on y remplace : c par p, dominé par p-dominé, dominant par p-dominant, γ par γ_p , γ^{∞} par γ_p^{∞} , compact par compact appartenant à $\mathcal{P}$, K_{σ} par $K_{p\sigma}$, et relativement compact par "appartient ou appartenant à $\mathcal{P}$"

Comme conséquence du théorème (7.3) adapté à la famille $\mathcal{P}$, on a

<u>*(8.1) Théorème .*</u> *Si la famille $\mathcal{P}$ est saturée (i.e, $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$), alors l'espace $C_p(T)$ est un b-espace infratonnelé .*

<u>*Preuve*</u> . En effet, $C_p(T)$ est un b-espace d'après le théorème (7.3) et est infratonnelé d'après le corollaire 1 du théorème 1 de [6] .

<u>*(8.2) Corollaire*</u> . *L'espace $C_s(T)$ est un b-espace .*

Preuve . Ce corollaire est évident car la famille des parties finies de T est saturée comme l'a montré la proposition (2.2) . (voir [7])

(8.3.) Remarque . *Le corollaire précédent montre, en particulier, que l'espace* $C_s(T)$ *est un* b'*-espace . Parsuite le dual fort de* $C_s(T)$ *est complet - Ce résultat est dû à Gulick* ([11]) .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et mesures cylindriques, Lecture notes in Mathematics, 139 (1970).

[2] H. BUCHWALTER, Problèmes de complétion topologiques, D.E.A. Math. Pures, Ed. Ronéotypée, Lyon, 1969-1970.

[3] H. BUCHWALTER, Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier, séminaire Choquet, 9, n° 14, 15 pages (1969-1970).

[4] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, J. Math. pures et app. 51, 399-418 (1972).

[5] H. BUCHWALTER, Topologies et compactologies, Pub. Dép. Math., Lyon, 6-2, 1-74 (1969).

[6] H. BUCHWALTER et K NOUREDDINE, Topologies localement convexes sur les espaces de fonctions continues, C.R.A.S. Paris. 274 (A), 1931 - 1934 (1972).

[7] BUCHWALTER H. et J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace $C_s(T)$, *J. Math. pures et appl.* 52, p. 337-552 (1973).

[8] H. S. COLLINS, Strict, Weighted, and mixed topologies, and applications, *à paraître*.

[9] L. GILLMAN et M. JERISON, Rings of continuous functions, University series in higher Math. Van Nostrand, Princeton N.J. (1960).

[10] D. GULICK, The σ-compact - open topology and its relatives, *Math. scand.* 30, p. 159-176. (1972).

[11] GULICK D., Duality theory for the topology of simple convergence, *à paraître dans J. Math. pures et appl.*

[12] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes, *C.R. Acad. Sc. Paris.*, 276 (A), p. 1209-1212 (1973).

[13] K. NOUREDDINE, Espaces du type D_b , *C. R. Acad. Sc. Paris,* 276 (A), p. 1301-1303 (1973).

[14] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes. 2e coll. NAnal. Fonct. Bordeaux, *Pub. Dép. Math. Lyon,* 10-3, p. 259-277 (1973).

[15] K. NOUREDDINE, Note sur les espaces D_b , *Math. Ann.* 219-, p. 97-103 (1976).

[16] K. NOUREDDINE, et W. HABRE, Topologies P-strictes, *à paraître.*

[17] J. SCHMETS, Espaces associés à un espace linéaire à semi-normes, application aux espaces de fonctions continues, *Notes du cours tenu à la réunion d'ecole d'été d'analyse fonctionnelle (20 aout - 8 sept. 1973) Faculté des sciences de l'Université Libanaise - Hadath - Beyrouth (Liban).*

[18] J. SCHMETS et J. ZAFARANI, Topologie stricte faible et mesures discrètes, Bull. Soc. Roy. Liège, 43, p. 405-418, (1974).

[19] F.D. SENTILLES, Bounded continuours functions on a completely regular space, *Trans. Amer. Math. Soc.,* p. 168, 311-336 (1972).

[20] V.S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* 48, p. 161-228 (1965)?

[21] Warner, S. The topology of compact convergence on continuous functions spaces, *Duke Math. J.* 25, p. 265-282 (1958).