

D. LEHMANN

**Intégrales itérées**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1976, tome 13, fascicule 3  
, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1976\\_\\_13\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_1_0)

© Université de Lyon, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



2 - Rappel sur les formes de Maurer-Cartan.

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie réel  $G$ , et  $C^*(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^*$  l'algèbre extérieure construite sur  $\mathfrak{g}^*$ . Pour des raisons techniques qui apparaîtront un peu plus loin, nous identifierons  $C^*(\mathfrak{g})$  aux formes différentielles sur  $G$  qui sont invariantes à droite (et non à gauche comme d'habitude). La différentielle sur  $C^*(\mathfrak{g})$  diffère alors de la différentielle habituelle, par le signe : si  $\alpha \in C^p(\mathfrak{g})$  et si  $A_0, \dots, A_p \in \mathfrak{g}$ , on définit  $d\alpha$  par la formule

$$(d\alpha)(A_0, \dots, A_p) = - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([A_i, A_j], A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_p).$$

Soit  $V$  une variété  $C^\infty$  connexe et  $\omega \in A^1(V) \otimes \mathfrak{g}$  une 1-forme sur  $V$  à coefficients dans  $\mathfrak{g}$ . Il revient au même de se donner une application linéaire  $\tilde{\omega} : \mathfrak{g}^* \rightarrow A^1(V)$ , laquelle se prolonge, de façon unique, en un homomorphisme (encore noté  $\tilde{\omega}$ ) d'algèbres graduées

$$\tilde{\omega} : C^*(\mathfrak{g}) \rightarrow A^*(V)$$

(où  $A^*(V)$  désigne l'algèbre des formes différentielles sur  $V$ ). Dire que  $\tilde{\omega}$  commute aux différentielles, équivaut alors à affirmer que  $\omega$  vérifie l'équation de Maurer-Cartan :

$$(*) \quad d\omega - \frac{1}{2} \omega \wedge \omega = 0$$

(le produit extérieur  $\omega \wedge \omega$  étant défini relativement au crochet

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} \mathfrak{g} \quad \text{dans } \mathfrak{g}).$$

Exemple : Soit  $\theta_G \in A^1(G) \otimes \mathfrak{g}$  la 1-forme sur  $G$  définie par  $\theta_G(A.g) = A$  ( $A \in \mathfrak{g}, g \in G$ ), et  $f : V \rightarrow G$  une application différentiable : la 1-forme  $f^*(\theta_G)$ , notée parfois  $df.f^{-1}$  vérifie l'équation (\*). De plus, si  $g \in G$  et si  $R_g$  désigne la translation à droite par  $g$  dans  $G$ ,  $(R_g \circ f)^*(\theta_G) = f^*(\theta_G)$ .

Réciproquement, on a le

Théorème. -

Soit  $\omega \in A^1(V) \otimes \mathcal{O}_V$  une forme vérifiant l'équation (\*) de Maurer-Cartan, et  $\hat{V} \xrightarrow{p} V$  le revêtement universel de  $V$ .

(i) Il existe alors une application différentiable

$$f : \hat{V} \rightarrow G$$

telle que  $f^*(\theta_G) = p^*(\omega)$  ;

(ii) Si  $f_1$  et  $f_2$  sont 2 telles applications de  $\hat{V}$  dans  $G$ , il existe alors un élément  $g \in G$ , (nécessairement unique), tel que

$$f_2 = R_g \circ f_1.$$

Pour la démonstration, on peut se reporter à Koszul [1] (à l'adaptation près au cas des formes invariantes à droite).

Corollaire. - Soit  $\omega \in A^1(V) \otimes \mathcal{O}_V$  une forme vérifiant l'équation de Maurer-Cartan (\*),  $x_0$  un point de base dans  $V$ , et  $\hat{x}_0$  un point de base dans  $\hat{V}$  au-dessus de  $x_0$ , permettant de considérer  $\hat{V}$  comme un fibré principal de groupe  $\pi_1(V, x_0)$  et de base  $V$ .

Il existe alors une (unique) application

$f_0 : \hat{V} \rightarrow G$  telle que

$$f_0^*(\theta_G) = p^*(\omega) \text{ et } f_0(\hat{x}_0) = 1_G.$$

Il existe en outre un (unique) homomorphisme de groupes,

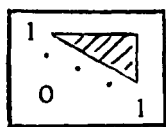
$$\rho : \pi_1(V, x_0) \rightarrow G, \text{ tel que, } \forall z \in \hat{V}, \forall [\lambda] \in \pi_1(V, x_0), f_0(z \cdot [\lambda]) = f_0(z) \cdot \rho([\lambda]).$$

Remarque : L'utilisation de formes sur  $G$  invariantes à gauche aurait conduit à la formule  $f \circ (z \circ [\lambda]) = (\rho[\lambda])^{-1} \cdot f(z)$ , qui nous aurait obligé, à inverser des matrices au § suivant.

3. Cas d'une algèbre de Lie nilpotente (Chen [2])

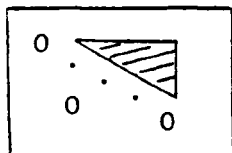
Supposons dans ce § l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  nilpotente.

Notons  $N_r$  le sous-groupe de Lie de  $GL(r, \mathbb{R})$ , formé des matrices triangulaires



n'ayant que des 1 sur la diagonale, et des 0

en dessous. Son algèbre de Lie  $N_r$  est formé des matrices triangulaires



n'ayant que des 0 sur la diagonale et en dessous.

Cette algèbre de Lie est nilpotente, ainsi que toutes ses sous-algèbres de Lie.

Réciproquement, d'après Jacobson ([3]), toute algèbre de Lie nilpotente réelle  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de  $N_r$  (pour  $r$  suffisamment grand), de sorte que toute forme  $\omega \in A^1(V) \otimes \mathfrak{g}$  peut être considérée comme une forme à coefficients dans  $N_r$ . Ceci permet de toujours se ramener au cas où  $\mathfrak{g} = N_r$ , ce que nous supposons désormais ( $r \geq 2$ ).

Notons  $A_{i,j}$  la matrice  $\in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$  ayant comme coefficients 1 à la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne, 0 ailleurs.

L'ensemble  $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq r}$  forme alors une base de  $N_r$ , et un calcul élémentaire donne :

$$[A_{i,j}, A_{k,l}] = 0 \text{ sauf si } j = k \text{ ou } i = l$$

et

$$[A_{i,j}, A_{j,k}] = A_{i,k}$$

(les couples  $(i,j)$  considérés étant toujours supposés vérifier  $1 \leq i < j \leq r$ ).

**Intégrales itérées**

Notons  $(u_{i,j})_{1 \leq i < j \leq r}$  la base duale de  $(N_r)^*$ .

De la formule  $(d\alpha)(A,B) = +\alpha([A,B])$  pour  $\alpha \in C^1(N_r) = (N_r)^*$ , on déduit :

$$du_{i,i+1} = 0$$

$$du_{i,i+2} = u_{i,i+1} \wedge u_{i+1,i+2}$$

.....

$$du_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} \wedge u_{k,j}$$

.....

$$du_{1,r} = \sum_{k=2}^{r-1} u_{1,k} \wedge u_{k,r}$$

Se donner par conséquent une forme  $\omega \in A^1(V) \otimes N_r$  vérifiant l'équation de Maurer-Cartan (\*) revient à se donner une famille  $(x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq r}$  de 1-formes  $x_{i,j} \in A^1(V)$  vérifiant :

$$dx_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k} \wedge x_{k,j}$$

Soient alors  $f_0 : \hat{V} \rightarrow N_r$  et  $\rho : \pi_1(V, x_0) \rightarrow N_r$  définis comme au corollaire du § 1, à partir de  $\omega = (x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq r}$ . On se propose de calculer  $f_0(z)$ , et en particulier  $\rho([\lambda]) = f_0(\hat{x}_0 \cdot [\lambda])$ . Soit donc  $\hat{\gamma} : [0,1] \rightarrow \hat{V}$  une courbe différentiable par morceaux d'origine  $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}_0$  et d'extrémité  $\hat{\gamma}(1) = z$  et  $\gamma = p \circ \hat{\gamma} : [0,1] \rightarrow V$  sa projection sur  $V$ . Notons  $g_{i,j}(t)$  les coefficients de la matrice  $f_0(\hat{\gamma}(t))$

$$f_0(\hat{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g_{i,j}(t) & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(i indice ligne, j indice colonne).

Plongeant  $N_r$  et  $N_r$  dans  $g\ell(r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{(r^2)}$ , la courbe  $t \rightarrow f(\hat{\gamma}(t))$  dans  $N_r$  admet comme vecteur tangent la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g'_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } g'_{i,j}(t) = \frac{d}{dt} g_{i,j}(t))$$

en les points  $t$  où  $\gamma$  est différentiable. Posons aussi, en ces points  $t$  :

$$x_{i,j} \left( \frac{d\hat{\gamma}}{dt} \right)_t = x_{i,j}(t) .$$

Puisque  $p^*(x_{i,j}) \left( \frac{d\hat{\gamma}}{dt} \right)_t = x_{i,j} \left( \frac{d\hat{\gamma}}{dt} \right)_t$ , l'équation  $p^*\omega = f_o^*(\theta_{N_r})$

implique alors l'égalité matricielle (en les points  $t$  où  $\gamma$  est différentiable) :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g'_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g'_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & g_{i,j}(t) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(car la translation à gauche par  $f_o(\hat{\gamma}(t))$  est une application linéaire dans  $g\ell(r, \mathbb{R})$ , donc égale à son application linéaire tangente).

On en déduit, en les points  $t$  où  $\gamma$  est différentiable

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_{i,i+1}(t) = x_{i,i+1}(t) \\ g'_{i,i+2}(t) = x_{i,i+2}(t) + x_{i,i+1}(t) \cdot g_{i+1,i+2}(t) \\ \dots\dots\dots \\ g'_{i,j}(t) = x_{i,j}(t) + \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}(t) \cdot g_{k,j}(t) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Notant  $\gamma_t : [0, t] \rightarrow V$  la restriction de  $\gamma$  à  $[0, t]$ , et pour tout 1-forme  $y \in A^1(V)$ , notant  $\int_{\gamma} y$  la fonction (continue)  $t \rightarrow \int_{\gamma_t} y$ , on obtient, compte tenu de ce que  $g_{i,j}(0) = 0$  ( $f_0(\hat{\gamma}(0)) = f_0(\hat{x}_0) = I_{N_r}$ ), les fonctions  $g_{i,j}$  par récurrence sur  $j-i = p$  :

$$g_{i,i+1} = \int_{\gamma} x_{i,i+1}$$

$$g_{i,i+2} = \int_{\gamma} x_{i,i+2} + \int_{\gamma} \left( \int_{\gamma} x_{i+1,i+2} \right) x_{i,i+1}$$

$$g_{i,i+p}(t) = \int_{\gamma_t} x_{i,i+p} + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{\gamma_t} g_{i+k,i+p} \cdot x_{i,i+k}$$

On obtient en particulier  $f_0(z)$  pour  $t = 1$  et  $\rho([\lambda])$  pour  $z = \hat{x}_0 \cdot [\lambda]$ .

Exemple : Pour  $r = 3$ , se donner  $\omega$  consiste à se donner des 1-formes  $a, b$  et  $c \in A^1(V)$  vérifiant  $da = 0 = db$ ,  $dc = a \wedge b$ .

L'homomorphisme  $\rho : \pi_1(V, x_0) \rightarrow N_3$  est alors donné par la formule :



$$\rho([\lambda]) = \begin{pmatrix} 1 & \int_{\lambda} a & \int_{\lambda} c + \int_{\lambda} \left( \int_{\lambda} b \right) a \\ 0 & 1 & \int_{\lambda} b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

( $\lambda$  désignant un lacet en  $x_0$  sur  $V$ , différentiable par morceaux).

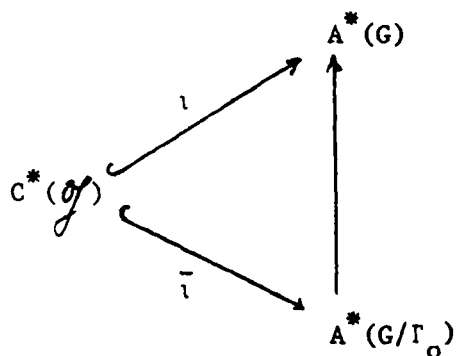
4. Interprétation en termes de modèles minimaux (Sullivan).

Supposons que  $\Gamma$  soit un groupe discret, nilpotent, de présentation finie. Il existe alors un groupe de Lie nilpotent  $G$ , contractile, tel que  $G = \Gamma \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$  (ce "produit tensoriel" a un sens parce que  $\Gamma$  est nilpotent, c'est-à-dire limite d'une suite finie d'extensions centrales par des groupes abéliens ; la "tensorisation" se définit par récurrence sur chacune de ces extensions, en tensorisant chacun des groupes abéliens). Notons alors

$$\Gamma_0 = \Gamma / (\text{éléments d'ordre fini})$$

le groupe nilpotent limite de la suite finie d'extensions centrales obtenue à partir de celle de  $\Gamma$  en quotientant chaque groupe abélien de la suite par sa torsion : on a encore  $G = \Gamma_0 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$ ,  $\Gamma_0$  s'identifie alors à un sous-groupe discret de  $G$ , et  $G/\Gamma_0 = K(\Gamma_0, 1)$ . Puisque  $G$  est nilpotent,

l'algèbre différentielle graduée  $C^*(\mathcal{G})$  est nilpotente. Puisque l'on a identifié  $C^*(\mathcal{G})$  aux formes différentielles sur  $G$  qui sont invariantes à droite, l'inclusion naturelle  $\iota : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow A^*(G)$  se factorise à travers  $A^*(G/\Gamma_0)$  (par des inclusions). D'après Sullivan ([4]), l'inclusion  $\bar{\iota}$  induit un isomorphisme en cohomologie, c'est-à-dire que



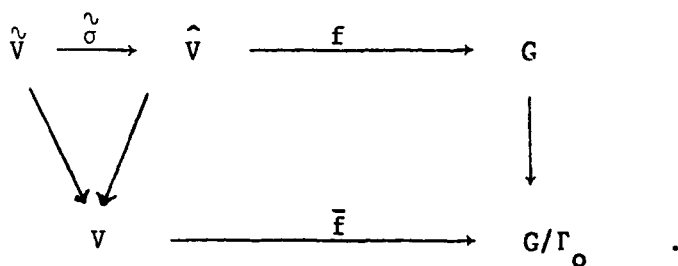
$C^*(\mathfrak{g})$  est le modèle minimal de  $G/\Gamma_0 = K(\Gamma_0, 1)$

[en outre, la variété  $G/\Gamma_0$  est compacte].

Exemple :  $\Gamma = \Gamma_0 = (N_r)_{\mathbb{Z}}$  (sous groupe de  $N_r$  formé des matrices à coefficients entiers) ; on a alors  $G = N_r$ ,  $K((N_r)_{\mathbb{Z}}, 1) = N_r / (N_r)_{\mathbb{Z}}$  et  $C^*(N_r) \hookrightarrow A^*(N_r / (N_r)_{\mathbb{Z}})$  est une réalisation du modèle minimal de  $K((N_r)_{\mathbb{Z}}, 1)$ .

Supposons alors donné un revêtement galoisien  $\tilde{V} \rightarrow V$ , de groupe structural  $\Gamma_0$  ; ce revêtement est associé à un homomorphisme de groupes  $\sigma : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \Gamma_0$  (bien défini à conjugaison près), et on peut toujours choisir son application classifiante (bien définie à homotopie près) différentiable :

$\bar{f} : V \rightarrow G/\Gamma_0$ , d'où le diagramme commutatif :



Soit alors  $\omega \in A^1(V) \otimes \mathfrak{g}$  la forme de Maurer-Cartan définie par la composition des applications

$$C^*(\mathcal{G}) \xleftarrow{\bar{i}} A^*(G/\Gamma_0) \xrightarrow{(\bar{f})^*} A^*(V) .$$

$\omega$

L'application  $f_0 : \tilde{V} \rightarrow G$  déduite de  $\omega$  par le procédé du § 2 est alors égale à  $f \circ \tilde{\sigma}$  (avec  $\bar{f}_0 = \bar{f}$ ), tandis que l'application  $\rho : \pi_1(V, x_0) \rightarrow G$  est la composée de  $\sigma$  avec l'inclusion de  $\Gamma_0$  dans  $G$ . Lorsque  $\omega$  sera construite par ce procédé, on la dira "normalisée". Dans ce cas, on voit alors que  $\rho$  prend ses valeurs dans les sous-groupe  $\Gamma_0$  de  $G$ .

Exemple :

Supposons donné un revêtement galoisien de groupe  $(N_3)_{\mathbb{Z}}$  au-dessus de  $V$ , classifié par une application différentiable  $\bar{f} : V \rightarrow N_3/(N_3)_{\mathbb{Z}}$ . Soient  $a, b, c$  les 1-formes, images par  $(\bar{f})^* \circ \bar{i}$  de la base  $(u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,3})$  de  $N_3$ . Pour tout lacet  $\lambda$  de  $V$  en  $x_0$ , différentiable par morceaux, les nombres réels  $\int_{\lambda} a, \int_{\lambda} b$  et  $\int_{\lambda} c + \int_{\lambda} (\int_{\lambda} b)a$  sont en fait entiers.

Dans le cas général, il se peut que  $\omega$  ne soit pas normalisée. Cependant, si l'espace topologique sous-jacent à  $V$  est nilpotent, la situation est la même que dans le cas normalisé, après  $\mathbb{Q}$ -localisation. En effet, l'homomorphisme  $\tilde{\omega}$  défini par  $\omega$

$$C^*(\mathcal{G}) = \mathcal{M}_{K(\Gamma_0, 1)} \xrightarrow{\tilde{\omega}} A^*(V)$$

$\tilde{\omega}$

$$\mathcal{M}_{K(\Gamma_0, 1)} \xrightarrow{\tilde{\omega}} \mathcal{M}_V$$

$\tilde{\omega}$

se relève, de façon unique à homotopie près, en un homomorphisme

$$\tilde{\omega} : \mathcal{M}_{K(\Gamma_0, 1)} \rightarrow \mathcal{M}_V \text{ à valeurs dans le modèle minimal } \mathcal{M}_V \text{ de } A^*(V).$$

Un tel homomorphisme entre modèles minimaux réels provient nécessairement d'un homomorphisme entre modèles minimaux rationnels (cf. par exemple Halperin-Stasheff [5]), et par conséquent correspond, d'après la théorie de Sullivan, à une classe d'homotopie d'application

$$\bar{f}_Q : V_Q \longrightarrow [K(\Gamma_0, 1)]_Q = K(G_Q, 1)$$

entre les espaces localisés (où l'on a noté  $G_Q$  le sous-groupe  $\Gamma_0$  "0"  $Q$  de  $G$ ).

Construction de formes  $\omega$  particulières :

(i) Si  $\pi_1(V, x_0)$  est un groupe nilpotent, de présentation finie, sans éléments d'ordre fini, on peut prendre pour  $\omega$  la forme normalisée correspondant à une application classifiante du revêtement universel

$$\bar{f} : V \longrightarrow K(\pi_1(V, x_0), 1) .$$

L'application  $\rho$  que l'on en déduit est alors l'identité dans  $\pi_1(V, x_0)$ , d'où le calcul de  $[\lambda]$  dans  $\pi_1(V, x_0)$  en termes d'intégrales itérées.

(ii) Dans le cas général, on considère la suite centrale descendante de  $\pi_1(V, x_0)$

$$\pi_1(V, x_0) = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_n \supset \dots ,$$

la  $n$ <sup>ième</sup> troncature nilpotente  $\Gamma^{(n)} = \Gamma/\Gamma_n$  de  $\pi_1(V, x_0)$  et  $\Gamma_0^{(n)} = \Gamma^{(n)}/(\text{éléments d'ordre fini})$ .

Soit  $\rho_0^{(n)} : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \Gamma_0^{(n)}$  l'application canonique de passages aux quotients ; et  $V_0^{(n)} \rightarrow V$  le revêtement galoisien de groupe  $\Gamma_0^{(n)}$  associé

à  $\rho_0^{(n)}$  ; si l'on prend pour  $\omega$  la forme normalisée correspondant à une application classifiante de  $V_0^{(n)}$  ( $\Gamma_0^{(n)}$  étant supposé de présentation finie), l'application  $\rho$  que l'on en déduit est égale à  $\rho_0^{(n)}$  ; on sait ainsi calculer  $\rho_0^{(n)}([\lambda])$  en termes d'intégrales itérées, pour  $[\lambda] \in \pi_1(V, x_0)$ .

BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] J.L. KOSZUL - *Lectures on Differential Geometry.*  
(Tata Institute - Bombay - 1960).
- [2] K.T. CHEN - *Algebras of iterated path integrals and fundamental groups.*  
(Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971) p. 359).
- [3] JACOBSON - *Lie algebras.*
- [4] D. SULLIVAN - *Infinitesimal computations in Topology*  
(à paraître).
- [5] S. HALPERIN et J. STASHEFF - *Obstructions to homotopy equivalence*  
(à paraître).