PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN-MARIE LEMAIRE

Modèles minimaux pour les algèbres de chaines

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 3
, p. 13-26
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_13_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-3

MODELES MINIMAUX POUR LES ALGEBRES DE CHAINES

par Jean-Marie LEMAIRE

Comme les DG-algèbres de Sullivan, les algèbres de chaînes et les algèbres de Lie différentielles (à différentielle de degré -1) admettent des modèles minimaux. La construction de Quillen [5] permet ainsi d'associer à tout espace 1-connexe une algèbre de Lie différentielle graduée minimale, son "modèle de Quillen" : ce dernier est le dual au sens d'Eckmann-Hilton du modèle de Sullivan ; en particulier, tandis que le modèle de Sullivan a un comportement simple vis-à-vis des fibrations le modèle de Quillen se comporte bien vis-à-vis des cofibrations : en fait le modèle de Quillen correspond à la décomposition homologique rationnelle [7] de l'espace, notion duale de celle de système de Postnikov.

Les résultats de cet exposé ont été obtenus en collaboration avec H. Baues. Nous renvoyons à [2] pour la construction des modèles minimaux, nous nous contenterons d'en donner la description ainsi que des applications.

1. PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES

1.1. ALGEBRES DE CHAINES.

Soit k un corps quelconque ; une algèbre de chaines A est une k-algèbre graduée augmentée, munie d'une différentielle de degré -1 qui est une dérivation. On supposera en outre A connexe, i.e $A_o = H_o(A) = k$, ces isomorphismes définissant l'unité et l'augmentation.

L'idéal d'augmentation est noté $\bar{A}$, et le quotient $QA = \bar{A}/\bar{A}^2$ est l'espace des indécomposables : c'est un espace vectoriel différentiel.

Une algèbre de chaines est *libre* si, négligeant la différentielle, elle est isomorphe à l'algèbre tensorielle $T(V)$ sur un espace vectoriel gradué V : la différentielle est alors uniquement déterminée par sa restriction à V. Une algèbre de chaînes A est *minimale* si elle est libre et si de plus $d\bar{A} \subset \bar{A}^2$: cette dernière condition revient à dire que la différentielle de QA est nulle.

On a les résultats suivants, analogues à ceux classiques pour les DG-algèbres :

PROPOSITION 1.1.1. - *Un homomorphisme* $f : A \to B$ *d'algèbres de chaînes* libres *est un quasi-isomorphisme (i.e.* $Hf : HA \xrightarrow{\cong} HB$*) ssi* $Qf : QA \to QB$ *est un quasi-isomorphisme.*

COROLLAIRE 1.1.2. - *Tout quasi-isomorphisme d'algèbres de chaînes minimales est un isomorphisme.*

1.2. ALGEBRES DE LIE.

Nous ne les considérons que pour $k = \mathbb{Q}$. Une algèbre de Lie différentielle graduée est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué L, muni d'une différentielle de degré -1 et d'un crochet $[\ ,\ ] : L \otimes L \to L$ compatible avec la différentielle et satisfaisant les versions graduées ("règle de Koszul") de l'antisymétrie et de l'identité de Jacobi. On suppose en outre $L_0 = 0$ (connexité).

Soit V un espace vectoriel gradué. L'algèbre de Lie libre sur V est la sous-algèbre de Lie $\mathbb{L}(V)$ de $T(V)$, pour le crochet

$$[x,y] = xy - (-1)^{\deg x . \deg y} yx$$

engendrée par V. Une algèbre de Lie différentielle L est *libre* si, négligeant la différentielle, $L = \mathbb{L}(V)$ pour un certain V, et *minimale* si en outre $dL = [L,L]$. On pose encore $QL = L/[L,L]$ et les analogues des propositions 1.1.1 et 1.1.2 sont vraies.

1.3. MODELES MINIMAUX.

Le résultat principal de [2] est le suivant :

THEOREME 1.3. - *Soit* B *une algèbre de chaînes (resp. une algèbre de Lie différentielle graduée). Il existe une algèbre minimale* A *et un quasi-isomorphisme* $f : A \to B$. *De plus, si* $f' : A' \to B$ *est un autre quasi-isomorphisme avec* A' *minimale, il existe un isomorphisme* $h : A \to A'$ *tel que le triangle suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & B \\ A' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Il y a donc unicité à homotopie près du modèle minimal : comme dans la théorie de Sullivan, il s'agit d'homotopie dans la catégorie des algèbres de chaînes (resp. des algèbres de lie différentielles), cf [2] pour la définition précise.

2. MODELE DE QUILLEN

2.1. Pour ne pas nous compliquer la vie, nous supposerons que les espaces considérés ont des nombres de Betti finis, et sont 1-connexes.

Dans [5] , Quillen définit un foncteur λ qui associe à un espace X une algèbre de Lie différentielle λ_X telle que

$$H(\lambda_X) \cong \Pi(X) = \Pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$$

comme algèbres de Lie graduées. De plus λ induit une équivalence des catégories de fractions obtenues en rendant inversibles d'un côté les équivalences d'homotopie rationnelle, de l'autre les quasi-isomorphismes.

Soit L_X le modèle minimal de λ_X.

Il résulte de 1.3 et de la théorie de Quillen la :

PROPOSITION 2.1.1. - *Le foncteur* L : $[\mathcal{C}_o] \to [Minlie]$, *où* $[\mathcal{C}_o]$ *est la catégorie d'homotopie des espaces rationnels (= o-locaux) 1-connexes, et* $[Minlie]$ *la catégorie d'homotopie des algèbres de Lie graduées minimales, est une équivalence de catégories.*

Nous dirons que L_X est le modèle de Quillen de X.

2.2 DESCRIPTION COMPAREE DES MODELES MINIMAUX DE SULLIVAN ET DE QUILLEN.

Nous présentons "en parallèle" les propriétés des deux modèles minimaux. Pour les détails, voir [6] et [2] .

Modèle de Sullivan $\mathfrak{m}_X$	*Modèle de Quillen* L_X

2.2.1

Modèle de Sullivan : isomorphisme d'algèbres commutatives
$H(\mathfrak{m}_X) \cong H^*(X,\mathbb{Q})$

Modèle de Quillen : isomorphisme d'algèbres de Lie
$H(L_X) \overset{\vee}{\cong} \Pi(X) = \Pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$

2.2.2

Modèle de Sullivan : $\mathfrak{m}_X$ est l'algèbre commutative libre sur le dual de l'homotopie rationnelle de X

$$\mathfrak{m}_X = S(\mathrm{Hom}(\Pi_*(X),\mathbb{Q})) = S(s\ \mathrm{Hom}(\Pi(X),Q))$$

Modèle de Quillen : L_X est l'algèbre de Lie libre sur l'homologie rationnelle (degrés diminués d'une unité)

$$L_X = \mathbb{L}\ (s^{-1}\check{H}_*(X,\mathbb{Q}))$$

2.2.3

Modèle de Sullivan : Soit $\phi : \overline{\mathfrak{m}}_X \to \overline{\mathfrak{m}}_X/\overline{\mathfrak{m}}_X^2 = Q\mathfrak{m}_X$ le quotient. On a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H(\overline{\mathfrak{m}}_X) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, equal] & H(Q\mathfrak{m}_X) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}(\tilde{H}_*(X),Q) \arrow[r, "{}^t h"] & \mathrm{Hom}(\Pi_*(X),\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

où h est l'homomorphisme de Hurewicz

Modèle de Quillen : Soit $\psi : L_X \to L_X/[L_X,L_X] = QL_X$ le quotient. On a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H(L_X) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, equal] & H(QL_X) \arrow[d, equal] \\ s^{-1}\Pi_*(X)\otimes Q \arrow[r, "h\otimes Q"] & s^{-1}H_*(X)\otimes Q \end{tikzcd}$$

où h est l'homomorphisme de de Hurewicz.

2.2.4

La différentielle est de degré $+1$, et sa partie quadratique $d^2 : \mathrm{Hom}(\Pi_*, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\Pi_* \otimes \Pi_* \mathbb{Q})$ est le transposé du produit de Whitehead.

La différentielle est de degré -1, et sa partie quadratique $d^2 : \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}) \to S^2\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ est la diagonale (transposée du cup-produit).

2.2.5

Soit $\bar{\xi}^n \in H^n(X;\mathbb{Q})$, représentée par $f : X \to K(\mathbb{Q},n)$ et soit X' la fibre de f.

Alors $\mathcal{M}_{X'}$ est quasi-isomorphe à

$\mathcal{M}' = \mathcal{M}_X \otimes S(\eta^{n-1})$

la différentielle d' de $\mathcal{M}'$ étant définie par

$d' | \mathcal{M}' = d$

$d'\eta^{n-1} = \xi^n$, où

$\xi^n \in \bar{\xi}^n \in H^n(\mathcal{M}_X) = H^n(X;\mathbb{Q})$

Si de plus ξ^n est décomposable, $\mathcal{M}'$ est minimale et donc

$\mathcal{M}' \simeq \mathcal{M}_{X'}$

Soit $\bar{x}_n \in \Pi_n(X) = \Pi_{n+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$, représentée par $g : S^{n+1} \to X$ et soit X'' la cofibre de g, i.e $X'' = X \cup_g e^{n+2}$

Alors $L_{X''}$ est quasi-isomorphe à

$L'' = L_X \amalg \mathbb{L}(y_{n+1})$

la différentielle d'' de L'' étant définie par

$d''/L_X = d$

$d''y_{n+1} = x_n$, où

$x_n \in \bar{x}_n \in H(L_X) = \Pi_n(X)$.

Si de plus x_n est décomposable alors L'' est minimale et $L'' \cong L_{X''}$.

2.2.6. REMARQUE. - On obtient donc un modèle de X' (resp. de X'') en ajoutant un générateur de façon à tuer la classe de cohomologie (resp. d'homotopie). On observera que le produit tensoriel est le coproduit dans la catégorie des algèbres commutatives (différentielles ou non).

Ainsi la donnée de $\mathcal{M}_X$ équivaut à celle d'une décomposition de Postnikov rationnelle de X (i.e. d'un système de Postnikov du O-localisé) tandis que la donnée de L_X correspond à une décomposition homologique de $X_{(o)}$ (qui est unique, cf [7]).

3. APPLICATION

3.1 L'HOMOMORPHISME DE KUREWICZ.

La propriété 2.2.3 de $\mathcal{M}_X$ et L_X fournit un puissant moyen d'étude de l'homomorphisme de Hurewicz rationnel

$$h : \Pi_*(X) \otimes Q \to H_*(X;Q)$$

Si X est r-connexe, au moins rationnellement, on retrouve immédiatement le résultat classique que h est un isomorphisme en degrés $\leq 2r$ et surjectif en degré $2r+1$. En interprétant la suite longue d'homologie des suites exactes d'espaces vectoriels différentiels.

$$0 \to \overline{\mathcal{M}}_X^2 \to \overline{\mathcal{M}}_X \xrightarrow{\phi} Q\mathcal{M}_X \to 0$$

$$0 \to [L_X,L_X] \to L_X \to QL_X \to 0$$

on obtient, pour $i \leq 3r+1$ la suite exacte "du type EHP".

$$\Pi_{i+1}(X) \xrightarrow{h} \tilde{H}_{i+1}(X) \xrightarrow{\delta_{i+1}} \Lambda(i-1) \xrightarrow{[\,,]} \Pi_i(X) \xrightarrow{h} \check{H}_i(X)$$

où $\Pi_i(X) = \Pi_i(X) \otimes Q$

$\forall_i \leq 3r-1$, $\Lambda(i)=(\Lambda^2\Pi_*(X))_i = (S^2\tilde{H}_*(X))_{i+2}$

$$\Lambda(3r) = (\Lambda^2\Pi(X))_{3r}/\text{ (identité de Jacobi)}$$

$$\delta_i = \Delta_i : \tilde{H}_i(X) \to (S^2\tilde{H}_*(X))_i = \Lambda(i-2)$$

est la diagonale géométrique.

A partir de la dimension 3r+3 apparaissent des opérations secondaires (Massey et Whithead)...

Le modèle minimal de l'algèbre de chaînes $C_*(\Omega X;k)$ permet d'obtenir une suite exacte analogue pour la suspension en homologie

$$\Sigma : H_i(\Omega X;k) \to H_{i+1}(X;k)$$

k étant cette fois un corps quelconque.

3.2 Le modèle de Quillen est particulièrement adapté à l'étude de l'homotopie rationnelle d'espaces dont une décomposition cellulaire est donnée, d'après 2.2.5. Ainsi, si $X = \bigvee_{i \in I} S^{n_i+1}$ est un bouquet de sphères, le modèle minimal de Quillen L_X est l'algèbre libre, non différentielle sur des générateurs en bijection avec les sphères, les degrés étant égaux aux dimensions moins un :

$$L_X = \mathbb{L}((x_{n_i})_{i \in I})$$

Le modèle de Quillen de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$, compte tenu de ce que $\mathbb{C}\mathbb{P}(2) = S^2 \cup_\eta e^4$, avec $2\eta = [\iota,\iota] \in \Pi_3(S^2)$, est

$$L_{\mathbb{C}\mathbb{P}(2)} = \mathbb{L}(x_1, y_3), \quad \begin{aligned} dx_1 &= 0 \\ dy_3 &= \frac{1}{2}[x_1, x_1] \end{aligned}$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ n'a d'ailleurs aucune importance du point de vue rationnel.

3.3. Voici une autre application du modèle de Quillen, due à H. BAUES et obtenue indépendamment par J. STASHEFF et S. HALPERIN [3] :

THEOREME 3.3. - *Soit* X *un espace -connexe dont tous les nombres de Betti d'ordre pair* ($\neq$o) *sont nuls. Alors* X *a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères de dimensions impaires.*

DEMONSTRATION. - L_X est l'algèbre de Lie libre sur $s^{-1}\tilde{H}(X;\mathbb{Q})$, par suite L_X est nulle en degrés impairs. La différentielle de L_X est donc nulle, et

$$H(L_X) = L_X = \Pi(X).$$

En choisissant un représentant de chaque générateur (de degré n_i pair), on définit une équivalence d'homotopie rationnelle

$$f : \bigvee_i S^{n_i+1} \to X$$

q.e.d.

3.4 ESPACES FORMELS.

D'après Sullivan, un espace formel est un espace X tel que $\mathcal{M}_X$ soit le modèle minimal de $H^*(X;\mathbb{Q})$.

De manière duale, on dira que X est Π-formel si L_X est le modèle minimal de l'algèbre de Lie $\Pi(X)$, munie de la différentielle nulle. Nous appellerons H-formel un espace formel au sens de Sullivant, et biformel un espace à la fois H- et Π -formel.

Les exemples fondamentaux d'espaces biformels sont les sphères et les $K(\mathbb{Q},2n)$.

3.4.1 LEMME. - *Le produit (resp. le bouquet) de deux espaces* H-*formels (resp.* Π-*formels) est* H-*formel (resp.* Π-*formel).*

En effet $\mathcal{M}_{X\times Y} = \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y$ est alors modèle minimal de $H^*(X) \otimes H^*(Y) = H^*(X\times Y)$ et de même $L_{X\vee Y} = L_X \amalg L_Y$ est un modèle minimal de $\Pi(X) \amalg \Pi(Y) = \Pi(X \vee Y)$.

Pour poursuivre nous avons besoin des foncteurs $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{C}^*$ qui relient les algèbres de Lie aux algèbres commutatives : si A est une DG-algèbre (à différentielle de degré +1), $\mathcal{L}^*$ A est l'algèbre de Lie des primitifs de l'algèbre de Hopf Ω Hom(A,$\mathbb{Q}$), où Ω est la cobar-construction d'Adams [1] . Comme algèbre de Lie, $\mathcal{L}^*$A est l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}(s^{-1}\mathrm{Hom}(\bar{A},\mathbb{Q}))$ et la différentielle est donnée sur les générateurs par la somme de la différentielle induite par celle de A et de la diagonale de $\mathrm{Hom}(\bar{A},\mathbb{Q})$, i.e la transposée du produit. En particulier, si la différentielle de A est nulle, $\mathcal{L}^*$A est minimale.

D'autre part, si M est une algèbre de Lie, $\mathcal{C}^*$M est l'algèbre des cochaînes (version graduée du complexe de Koszul) sur M : comme algèbre, on a $\mathcal{C}^*M = S(\mathrm{Hom}(sM,\mathbb{Q}))$, et la différentielle est encore somme de la différentielle induite par celle de M et de la transposée du crochet, de sorte que $\mathcal{C}^*$M est minimale si la différentielle de M est nulle.

A présent, on peut expliciter comme suit le fait que le type d'homotopie d'un espace H-formel "is a formal consequence of its cohomology ring".

PROPOSITION 3.4.2. - *Un espace* X *est* H-*formel ssi*
$L_X = \mathcal{L}^*(H^*(X))$.

et de manière duale :

PROPOSITION 3.4.3. - *Un espace* Y *est* Π-*formel ssi*

$$\mathfrak{M}_X = \mathscr{C}^*(\Pi(X)).$$

3.4.4. REMARQUE. - La différentielle de $\mathscr{L}^*(H^*(X))$ est quadratique sur $H^*(X)$ puisqu'elle est donnée par le cup-produit. Réciproquement, s'il existe un choix de générateurs de L_X , sur lesquels la différentielle soit purement quadratique, il résulte immédiatement de (2.2.4) que $L_X = \mathscr{L}^*(H^*(X))$ et donc que X est H-formel. De même Y est Π-formel si la différentielle de $\mathfrak{M}_Y$ est purement quadratique. (Je dois cette observation à une conversation avec S. Halperin). Une conséquence facile est :

3.4.5. COROLLAIRE. - *Si* $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q}) = 0$ *sauf pour* $r+1 \leq * \leq 3r+1$, *alors* X *est* H-*formel*.

En effet la différentielle de L_X est alors quadratique (pour tout choix de générateurs).

3.4.6. PROPOSITION. - *Un bouquet et un produit de deux espaces* H-*formels (resp.* Π-*formels) est* H-*formel (resp.* Π-*formel).*

Compte tenu de (3.4.1), ceci résulte de (3.4.2) et (3.4.3) comme suit : si $L_X = \mathscr{L}^*(H^*(X))$ et $L_Y = \mathscr{L}^*(H^*(Y))$, on vérifie facilement les isomorphismes :

$$L_{X\vee Y} = L_X \amalg L_Y = \mathscr{L}^*(H^*(X)) \amalg \mathscr{L}^*(H^*(Y))$$
$$= \mathscr{L}^*(H^*(X) \times H^*(Y))$$
$$= \mathscr{L}^*(H^*(X \vee Y))$$

et, de même, si $\mathfrak{M}_X = \mathscr{C}^*(\Pi(X))$ et $\mathfrak{M}_Y = \mathscr{C}^*(\Pi(Y))$,

on a : $\mathfrak{M}_{X \times Y} = \mathfrak{M}_X \otimes \mathfrak{M}_Y = \mathscr{C}^*(\Pi(X)) \otimes \mathscr{C}^*(\Pi(Y))$

$$= \mathscr{C}^*(\Pi(X) \times \Pi(Y))$$
$$= \mathscr{C}^*(\Pi(X \times Y))$$

3.4.7. EXEMPLES. -

D'après ce qui précède, les produits et les bouquets de **sphères** ou de $K(\mathbb{Q},2n)$ sont des espaces biformels. Ainsi, le modèle minimal de Sullivan du bouquet de sphères $X = \bigvee_i S^{n_i+1}$ est $\mathfrak{M}_X = \mathscr{C}^*\mathbb{L}((x_{n_i}))$ (cf. l'exposé de A. Haefliger).

La Π-formalité est en général difficile à étudier ; les "bouquets garnis" de sphères $T_k((\mathbb{S}^{n_i+1}))$, sous-espace du produit $\prod_{i=1}^{N} \mathbb{S}^{n_i+1}$ des N-uples dont N-k points sont égaux au point de base, sont H-formels, mais jamais Π-formels pour $2 \leq k \leq N-1$, car leur homotopie présente - par définition ! - des produits de Whitehead d'ordre supérieur non nuls.

On peut montrer que $\mathbb{C}P(\infty)/\mathbb{C}P(n)$ est biformel, et je pense qu'il en est de même des $\Pi S^{n_i+1}/T_k$ (smash produits généralisés) : cette conjecture présente un certain intérêt du point de vue des opérations homotopiques d'ordre supérieur.

3.4.8. Voici pour terminer un exemple de CW-complexe fini Π-formel mais non H-formel, probablement le plus simple possible :

$$Z = (S^3 \vee S^3) \cup_g e^8 \text{ , avec } g = [[\iota', \iota''] , \iota']$$

Cet espace n'est pas H-formel, car sa cohomologie est celle de $S^3 \vee S^3 \vee S^8 \neq Z$.

Le modèle minimal de Quillen de Z est :

$L_Z = \mathbb{L}(x_2' , x_2'' , y_7)$, avec

$$dx_2' = o = dx_2''$$

$$dy_7 = [[x_2', x_2''] , x_2']$$

Soit Π l'algèbre de Lie :

$$\Pi = \mathbb{L}(x_2', x_2'') / ([[x_2', x_2''] , x_2'])$$

C'est une algèbre de Lie concentrée en degrés pairs, définie par une seule relation : on peut montrer qu'une telle algèbre est de dimension globale 2, et il résulte du théorème principal de [4] que l'homomorphisme d'algèbres de Lie différentielles, Π étant munie de la différentielle nulle :

$$\begin{aligned} L_X &\longrightarrow \Pi \\ x_2' &\longmapsto x_2' \\ x_2'' &\longmapsto x_2'' \\ y_7 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

est un quasi-isomorphisme, . q.e.d.

Plus généralement, disons (avec [3]) qu'une algèbre de Lie Π est *intrinsèquement* Π*-formelle* si l'unique type d'homotopie rationnelle X tel que $\Pi(X) = \Pi$ est le type Π-formel (qui existe toujours d'après Quillen cf. 2.1.1). Alors on a la :

PROPOSITION 3.4.9. (cf.[[4] ch. 4). - *Toute algèbre de Lie graduée de dimension globale* ≤ 2 *est intrinsèquement* Π*-formelle.*

La réciproque est fausse !

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.F. ADMAS, On the cobar construction, *Proc. N.A.S.* U.S.A. 42 (1956) p. 409-412.

[2] H.J. BAUES, J.M. LEMAIRE, Minimal models in homotopy theory, to appear in Math. Ann.

[3] S. HALPERIN, J. STASHEFF, Obstructions to homotopy equivalences, to appear.

[4] J.M. LEMAIRE, Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets, *Springer Lect. Notes* n° 422.

[5] D. QUILLEN, Rational homotopy theory, *Ann. Math.* 90 (1969) p. 205-295.

[6] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology,preprint, I.H.E.S. 1975.

[7] G.H. TOOMER, Two applications of homology décompositions,*Can. J. Math.* 27-2 (1975) p. 323-329.

J.M. LEMAIRE
I.M.S.P.
Parc Valrose
F - 06034 NICE CEDEX