

SAMUEL D. EKONG

Sur les groupes algébriques affines algébriquement complets

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 71-81

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_71_0

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES AFFINES ALGEBRIQUEMENT COMPLETS

par Samuel D. EKONG

Le point de vue adopté est celui de [1], le corps de base étant algébriquement clos.

Rappelons que, d'après [2], on dit qu'un groupe algébrique affine G est algébriquement complet s'il possède les deux propriétés suivantes :

- i) Le centre de G est trivial ;
- ii) tous les automorphismes algébriques de G sont intérieurs.

PROPOSITION 1.1. - *Le produit (direct) $G = K \times H$ de deux groupes algébriques affines algébriquement complets est un groupe algébrique affine algébriquement complet si et seulement si K (ou H) est un sous-groupe caractéristique de G .*

PROPOSITION 1.2. - *Soit Γ un groupe algébrique affine algébriquement complet ; si Γ est un sous-groupe normal fermé d'un groupe algébrique affine G , alors :*

- a) Γ est un facteur direct;
- b) G est connexe et algébriquement complet si et seulement si
 - i) Γ et le centralisateur $Z_G(\Gamma)$ de Γ dans G sont des sous-groupes caractéristiques connexes de G ;
 - ii) $Z_G(\Gamma)$ est algébriquement complet.

PREUVE. - a) est un fait bien connu dans le cas des groupes abstraits la démonstration ne subit aucune modification $\forall x \in G$. Considérons l'automorphisme intérieur $F_x: g \mapsto x g x^{-1}$ de G ; Γ étant un sous-groupe

normal de G , la restriction de F_x à Γ , est un automorphisme de Γ ; puisque Γ est algébriquement complet, il existe un unique élément α de Γ tel que $x \gamma x^{-1} = \alpha \gamma \alpha^{-1}$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Par conséquent $\alpha^{-1} x \in Z_G(\Gamma) = Z$; d'où

$$G = \Gamma \cdot Z.$$

Comme $\Gamma \cap Z = Z(\Gamma)$ est le centre de Γ , on en déduit que

$\Gamma \cap Z = \{1\}$, où 1 est l'élément neutre de G . Donc G est le produit direct

$$G = \Gamma \rtimes Z.$$

b) est une conséquence de a) et de la proposition 1.1.

COROLLAIRE 1.3. - *Toute extension G d'un groupe algébrique affine algébriquement complet par un groupe algébrique affine, est triviale (i.e. toute suite exacte $1 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 1$ est fissible). Ceci est aussi une conséquence du fait que $\text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ est trivial.*

COROLLAIRE 1.4. - *Tout groupe quotient d'un groupe affine algébriquement complet par un sous-groupe caractéristique ayant la même propriété possède cette propriété.*

COROLLAIRE 1.5. - *Soit G un groupe algébrique affine; si G° , composante connexe de l'élément neutre de G , est un groupe algébriquement complet alors G est égal au produit direct $G = G^\circ \rtimes F$, où F est un sous-groupe fini de G .*

C'est clair, car G° est un sous-groupe normal, fermé et d'indice fini de G .

THEOREME 1.6. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; alors G est algébriquement complet si et seulement si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet.*

PREUVE. - On sait [4] que, sous ces hypothèses, $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine ; par conséquent l'holomorphe H de G , i.e. le produit semi-direct $H = G \rtimes \text{Aut}(G)$, où $\text{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de G , est un groupe algébrique affine.

Si un sous-groupe de Borel de G est algébriquement complet, on sait d'après [2], qu'il en est de même de tous les sous-groupes de Borel de G et que le centre de G est trivial ; il en résulte la trivialité du centre de H .

$\forall F \in \text{Aut}(G), \exists h \in H$ tel que $F = F_h/G$, où F_h est l'automorphisme intérieur $x \mapsto h x h^{-1}$ de H et F_h/G sa restriction à G . D'après le

théorème de Steinberg [7], F laisse invariant un sous-groupe de Borel B de G ; donc $F(B) = h B h^{-1} = B$.

La restriction de F à B est alors un automorphisme de B , donc

$\exists b \in B$ tel que

$$h \beta h^{-1} = b \beta b^{-1}, \quad \forall \beta \in B \quad \text{donc } b^{-1} h \in Z_H(B), \text{ où}$$

$Z_H(B)$ est le centralisateur dans H de B . La restriction à G de l'auto-

morphisme intérieur $F_{b^{-1}h}$ de H est un automorphisme de G qui laisse

invariant tous les éléments du sous-groupe de Borel B . G étant connexe,

on en déduit que $F_{b^{-1}h}/G = 1_G$; donc, pour tout $q \in G$, on a $h q h^{-1} = b q b^{-1}$, c'est-à-

dire $F_h/G = F_b/G$; donc $F = F_b$. Par conséquent G est algébriquement complet.

Pour montrer que la condition est nécessaire nous avons deux théorèmes suivants que nous utiliserons comme lemmes.

LEMME 1.7 (Niesnevič). - *Le produit libre de groupes linéaires de degré n est un groupe linéaire de degré $n+1$.*

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [8].

LEMME 1.8 (G. Higman, B.H. Neumann, Hanna Neumann). - *Soient G un groupe, A et B des sous-groupes de G et ϕ un isomorphisme de A sur B . Alors il existe un groupe H et un élément h de G tels que*

- 1) G est contenu dans H .
- 2) $\phi(a) = h a h^{-1}, \forall a \in A$.

La preuve de la réciproque du théorème énoncé est basée sur la construction de l'élément h du lemme 2 ; nous utiliserons par conséquent le procédé employé pour la démonstration de ce lemme , démonstration que l'on peut aussi trouver dans [5] (tome 2, page 17).

Soit G un groupe algébrique affine connexe. Il existe une représentation immersive de G dans $GL_n(K)$, où $GL_n(K)$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans le corps de base K , algébriquement clos, de caractéristique 0. Si $G = GL_n(K)$, alors l'application $\rho: GL_n(K) \rightarrow GL_{n+1}(K)$ qui à g fait correspondre $\rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, est une représentation immersive de G dans $GL_{n+1}(K)$; on peut par conséquent supposer que G est un sous-groupe fermé propre de $GL_n(K)$.

G étant connexe et distinct de $GL_n(K)$, on en déduit que $GL_n(K)/G$ n'est pas fini et qu'il existe un élément u de $GL_n(K)$ qui n'appartient pas à G ; on peut supposer que l'élément u est unipotent car, si l'ensemble U_n des éléments unipotents de $GL_n(K)$ est contenu dans G , alors le plongement ρ de G dans $GL_{n+1}(K)$, défini ci-dessus, prouve que $\rho(U_n)$ est strictement contenu dans l'ensemble des éléments unipotents de $GL_{n+1}(K)$; par conséquent on peut trouver un élément unipotent u qui n'appartient pas à G . La caractéristique du corps de base K étant 0, on en déduit que u est d'ordre infini.

Considérons le produit libre $K = G \ast (u)$, où (u) est le groupe cyclique libre infini engendré par u .

Soit ω un élément non trivial de G ; posons $v^{-1} = \omega u$.

Les produits libres $L = G \ast (v)$, $K = G \ast (u)$ $U = G \ast u^{-1} B u$, $v = G \ast v B v^{-1}$, où B est le sous-groupe de Borel de G qui contient ω , l'automorphisme F de B et l'isomorphisme ψ de U sur V défini par

(i) $\psi(g) = g$ pour tout $g \in G$,

(ii) $\psi(u^{-1} b u) = v F(b) v^{-1}$ pour tout $b \in B$, forment l'ensemble des éléments de la construction désirée; on a alors $h = \omega$; donc $F = F_\omega$ est un automorphisme intérieur de B ; le centre de B , étant identique au centre de G , est trivial; par conséquent B est algébriquement complet.

COROLLAIRE 1.9. - *Soit Γ un groupe algébrique affine ayant un sous-groupe de Borel algébriquement complet ; si Γ est un sous-groupe normal fermé d'un groupe algébrique affine G alors, Γ° la composante connexe de l'élément neutre de Γ est un facteur direct de G . En particulier Γ est égal au produit direct $\Gamma = \Gamma^\circ \times S$ où S est un sous-groupe fini de Γ .*

PREUVE. - Ceci découle du fait que Γ° est un sous-groupe caractéristique de Γ ; donc, si Γ est un sous-groupe normal fermé de G , il en est de même de Γ° ; les sous-groupes de Borel de Γ étant les sous-groupes de Borel de Γ° , on en déduit, d'après [2], que Γ° est algébriquement complet.

Donc $G = \Gamma^\circ \times Z_G(\Gamma^\circ)$ d'après la proposition 1.2 et $\Gamma = \Gamma^\circ \times S$ d'après le corollaire 1.5 de la proposition 1.2.

PROPOSITION 1.10. - *Soient G un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $\text{Aut}(G)$ (resp. $\text{Int}(G)$) le groupe des automorphismes (resp. groupe des automorphismes intérieurs) de G . Si G possède un sous-groupe de Borel algébriquement complet, alors :*

- a) $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine,
- b) $\text{Aut}(G)^\circ = \text{Int}(G)^\circ$ est algébriquement complet.

PREUVE. - On vient de voir que, sous ces hypothèses, G° est un groupe algébriquement complet et que $G = G^\circ \rtimes S$ est un produit direct, où S est fini. S , on l'a également vu, est le centralisateur de G° dans G ; puisqu'on est en caractéristique 0, S est formé d'éléments semi-simples. La finitude de S implique, d'après [4], que $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine (ce qui démontre a).

On a donc $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(G^\circ) \rtimes \text{Aut}(S)$.

S étant fini, $\text{Aut}(S) = H$ l'est aussi ; puisque G° est algébriquement complet,

on a $\text{Aut}(G^\circ) = \text{Int}(G^\circ)$.

L'application $\chi : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$, qui associe à tout élément x de G

$$x \longmapsto F_x$$

l'automorphisme intérieur F_x , étant un morphisme de groupes algébriques [4], on en déduit que

$$\chi(G) = \text{Int}(G) \Rightarrow \text{Int}(G)^\circ = \chi(G^\circ) = \text{Int}(G^\circ).$$

Donc $\text{Aut}(G^\circ) = \text{Int}(G^\circ)$;

D'où $\text{Aut}(G) = \text{Int}(G)^\circ \rtimes H$.

$\text{Int}(G)^\circ$ est par conséquent un sous-groupe fermé d'indice fini de $\text{Aut}(G)$; il contient donc $\text{Aut}(G)^\circ$. d'où

Par suite $\text{Aut}(G)^\circ = \text{Int}(G)^\circ = \text{Int}(G^\circ)$ donc est algébriquement complet d'après [2] .

PROPOSITION 1.11. - *Soit G un groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ; si le centralisateur $Z_G(G^\circ)$ dans G de G° est trivial, et si $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe caractéristique de $\text{Aut}(G)$, alors $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine algébriquement complet.*

PREUVE. - Le centralisateur de G° dans G étant trivial, il en est de même du centre de G° ; puisqu'on est en caractéristique 0, on en déduit que $\text{Aut}(G)$ est un groupe algébrique affine . Le reste de la proposition est un fait bien connu dans le cas des groupes abstraits ; or, si un groupe algébrique Γ , considéré comme groupe abstrait, est complet, il est naturellement algébriquement complet. D'où la proposition.

2. GROUPES ALGEBRIQUES AFFINES ALGEBRIQUEMENT COMPLETS SEMI-SIMPLES DE RANG 1.

PROPOSITION 2.1. - *Soit G un groupe algébrique affine algébriquement complet.*

1°) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *G est semi-simple ;*
- ii) *G est réductif.*

2°) *G est "adjoint" (i.e. isomorphe à son adjoint $\bar{G}$).*

3°) *Si G est semi-simple, le recouvrement central universel $\tilde{G}$ de G est semi-simple.*

PREUVE. -

1°) est immédiat, compte tenu de la trivialité du centre de G.

2°) Soit $\pi : G \longrightarrow H$ une isogénie centrale. La trivialité du centre de G implique la trivialité du centre de H et π est un morphisme bijectif ; par conséquent, si ρ est une représentation fidèle de G dans $\text{GL}_n(K)$, $\rho' = \rho \circ \pi^{-1}$ est une représentation fidèle de H dans $\text{GL}_n(K)$. On en déduit donc qu'il existe un isomorphisme du corps des fonctions rationnelles de G sur le corps des fonctions rationnelles de H ; donc, d'après ([6] exposé 18), G et H sont isomorphes.

3°) Si G est semi-simple, soient $\pi : H \longrightarrow G$ une isogénie centrale et $R(H)$ le radical de H. π étant surjectif on a

$$\pi(R(H)) = R(G) = \{1\}$$

Donc $\ker \pi$, qui par hypothèse est fini, contient $R(H)$; $R(H)$ étant connexe on en déduit que $R(H) = \{1\}$. Par conséquent H est semi-simple ; il en est donc de même du recouvrement central universel $\tilde{G}$ de G.

THEOREME 2.2. - *Tout groupe algébrique affine connexe algébriquement complet semi-simple de rang 1 est isomorphe à $\text{PGL}_2 = \text{GL}_2 / Z(\text{GL}_2)$*

PREUVE. - On sait que si G est un tel groupe, il existe un morphisme surjectif de G sur $\mathbf{PGL}_2$ dont le noyau est l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de G et que cette intersection est précisément le centre de G ([1] page 310).

Le centre de G étant trivial, on en déduit qu'il existe un isomorphisme de G sur $\mathbf{PGL}_2$.

COROLLAIRE 2.3. - *Tout groupe algébrique affine connexe réductif de rang 1 isomorphe à $\mathbf{PGL}_2$ est algébriquement complet et a tous ses sous-groupes de Borel algébriquement complets.*

PREUVE. - Cela résulte du fait que, si un groupe algébrique affine connexe a tous ses sous-groupes de Borel algébriquement complets, alors G est algébriquement complet. Théorème 2 de [2] et si ce groupe est semi-simple et de rang 1, alors d'après le théorème 2 ci-dessus il est isomorphe à $\mathbf{PGL}_2$.

PROPOSITION 2.4. - *Soit G un groupe algébrique affine connexe, réductif algébriquement complet et de rang 1. Si la caractéristique du corps de base est distincte de 2, alors tout automorphisme de G qui laisse invariant un tore maximal de G est semi-simple (au sens de [7]).*

PREUVE. - Soient F un automorphisme de G et T un tore maximal de G , F -invariant. G étant algébriquement complet, il existe un unique élément x de G tel que $F = F_x$. Désignons par $\mathcal{B}^T$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de G qui contiennent T ; on a

$$\mathcal{B}^T = \{B, B'\} \text{ avec } B \cap B' = T \text{ et}$$

$$F(T) = T \Rightarrow xTx^{-1} = xBx^{-1} \cap xB'x^{-1} = T. \text{ Il en résulte que } F$$

induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{B}^T$ sur lui-même. Donc

$$xBx^{-1} = B \text{ (et alors } xB'x^{-1} = B')$$

ou
$$xBx^{-1} = B' \text{ et alors } xB'x^{-1} = B.$$

a) si $x B x^{-1} = B$, alors F_x est quasi-semi-simple, donc semi-simple [2].
 b) si $x B x^{-1} = B'$, alors $x B' x^{-1} = B$, d'où
 $x^2 B x^{-2} = x B' x^{-1} = B$; donc $x^2 \in B \cap N_G(T)$, où $N_G(T)$ est le normalisateur dans G de T ; on en déduit alors que $x^2 \in T$ et par conséquent que $F^2 = F_2$ est semi-simple.

En fait x est semi-simple, car si $x = x_u x_s$ est la décomposition de Jordan de x , où x_u est unipotent et x_s semi-simple, $x^2 = x_u^2 x_s^2$ étant semi-simple, on en déduit que x_u^2 est semi-simple donc $x_u^2 = 1$, ce qui implique $x_u = 1$ puisque la caractéristique du corps de base est distincte de 2. Donc $x = x_s$ est semi-simple.

3. CENTRALISATEUR D'UN ELEMENT SEMI-SIMPLE.

Dans cette partie, nous nous proposons de montrer que si G est un groupe algébrique affine, connexe, réductif algébriquement complet et de rang 1 et si la caractéristique du corps de base est distincte de 2, alors le centralisateur d'un élément x semi-simple, distinct de l'élément neutre de G , est un sous-groupe réductif formé d'éléments semi-simples et, de plus, x est régulier.

THEOREME 3.1. - Soit G un groupe algébrique affine connexe algébriquement complet, réductif et de rang 1; alors, tout élément semi-simple x de G , distinct de l'élément neutre 1, est régulier et son centralisateur $Z_G(x)$ est un sous-groupe réductif de G formé d'éléments semi-simples.

PREUVE. - Soit x un élément semi-simple non trivial de G . Il existe un tore maximal T de G tel que x soit un élément de T . Soient B et B' les sous-groupes de Borel opposés de G qui contiennent T ; on a :

$$\begin{cases} B^T = \{B, B'\}, \\ B \cap B' = T. \end{cases}$$

Désignons par $Z_G(x)$ le centralisateur de x dans G ; T est abélien donc on a $T \subset Z_G(x)$.

D'autre part, G est isomorphe à PGL_2 (Théorème 2.2); donc la dimension d'un sous-groupe de Borel de G est 2 ; un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$ est par conséquent de dimension au plus égale à 2 et la dimension d'un tore maximal de $Z_G(x)$ est égale à 1.

Posons : $Z_B(x) = Z_G(x) \cap B$; x étant semi-simple $Z_B(x)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de $Z_G(x)$ et ce sous-groupe contient T ; par conséquent

$$\dim Z_B(x) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Il en est alors de même de $Z_{B'}(x) = Z_G(x) \cap B'$

a) Supposons $\dim Z_B(x) = 2$ ou $\dim Z_{B'}(x) = 2$
alors $Z_B(x) = B$ donc

$$x \in Z(B) = Z(G) = \{1\} \text{ d'où } x = 1 \text{ dans les deux cas envisagés}$$

b) Supposons $x \neq 1$; on a alors nécessairement

$$\dim Z_B(x) = \dim Z_{B'}(x) = 1 ;$$

d'où $Z_B(x) = Z_{B'}(x) = T$.

T est alors un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$; par conséquent $Z_G(x)$ est réductif. T étant un sous-groupe de Borel de $Z_G(x)$, on en déduit que le centralisateur connexe $Z_G(x)^\circ$ est un tore ; puisque $Z_G(x)^\circ$ contient T , on en déduit que $Z_G(x)^\circ = T$ et, par conséquent, x est régulier.

Il résulte alors de l'égalité $Z_G(x)^\circ = T$ que $Z_G(x)$ est un sous-groupe du normalisateur $N_G(T)$ de T dans G . Posons $Z_G(x)/T = H$; puisque $Z_G(x)/T$ est un sous-groupe de $N_G(T)/T = W(T, G)$, le groupe de Weyl de G et que, sous les hypothèses considérées, $W(T, G)$ est un groupe à deux éléments, on en déduit que le groupe H a au plus deux éléments. Posons alors $H = \{1, \bar{y}\}$. L'élément $\bar{y}$ est involutif donc y^2 est un élément de T ; si on suppose la caractéristique du corps de base nulle ou plus généralement distincte de 2, alors y est semi-simple (comme dans la proposition 2.2) et il en est de même de tout élément z de $\bar{y}$.

En conclusion, $Z_G(x)$ est formé d'éléments semi-simples.

COROLLAIRE. - Si l'on conserve les hypothèses du théorème 3 et si x et y sont des éléments non triviaux de G tels que x commute à y , alors, si l'un des deux éléments est semi-simple, il en est de même de l'autre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, W.A. Benjamin; Inc. 1969.
- [2] S.D. EKONG, *Sur les automorphismes de certains groupes algébriques affines semi-simple*, Publ. Dép. Math. Fac. Sc. LYON (1975).
- [3] G. HIGMAN, B.H. NEUMANN, HANNA NEUMANN; *Embedding theorems for groups* London Math. Society, 24 (1949), p.247-254.
- [4] G. HOCHSCHILD and G. MOSTOW, *Automorphisms of affine algebraic groups*, Journal of algebra 13 (1969), p.535-543.
- [5] A.G. KUROSH, *Theory of groups (tome 2.)*, Chelsea Publishing Company New-York.
- [6] SEMINAIRE C. CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie algébriques* E.N.S. Paris (2. Vol.).
- [7] R. STEINBERG, *Endomorphisms of linear algebraic Groups*, Memoirs of the A.M.S., n° 80 (1968).
- [8] B.A.F. WEHRFRITZ, *Infinite linear groups*, Springer-Verlag (1973).

S.D. EKONG
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE