

MICHEL CRÉTIN

L'espace classifiant de la K-théorie algébrique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 57-69

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_57_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_57_0)

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE CLASSIFIANT DE LA K-THEORIE ALGEBRIQUE

par Michel CRETIN

Dans son rapport [1], P. Quillen introduit la K-théorie algébrique d'un anneau A , comme des groupes d'homotopie d'un espace $BGL(A)^+$ qu'il calcule dans le cas d'un corps fini dans son article [2]; D'autre part dans [3] J.B. Wayoner montre que $K_0(A) \times BGL(A)^+$ est un "espace de lacets infinis", mais, bien qu'il donne des indications plus précises que dans [1] et [2] sur la construction de cet espace, aucun de ces articles ne contient une construction détaillée.

L'objet de cet article est d'exposer la construction de $BGL(A)^+$ en donnant des démonstrations complètes des propriétés générales de cet espace qui sont utilisées dans les articles précités.

Je voudrais remercier A. Roux pour l'aide apportée à la mise au point de cet article.

Les espaces considérés sont des espaces de Kelley, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe. Ils sont pointés, les applications et les homotopies préservent les points-bases.

PROPOSITION 1. - Soit Y un espace (connexe par arcs) dont le groupe fondamental est parfait. Il existe alors un couple (Y^+, j) où Y^+ est un espace simplement connexe et $j : Y \rightarrow Y^+$ une cofibration vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

- i) $j_* : H_*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y^+, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme,
- ii) la fibre homotopique E_j de j est acyclique (i.e. $\widetilde{H}_*(E_j, \mathbb{Z}) = 0$).

De plus, tout couple (Y^+, j) vérifiant les conditions précédentes satisfait à la propriété suivante : pour tout espace simplement connexe Z , l'application $[Y^+, Z] \rightarrow [Y, Z] \quad [g] \mapsto [g \circ j]$ est bijective.

Il en résulte en particulier que (Y^+, j) est caractérisé à homotopie près par les conditions précédentes.

CONSTRUCTION DE (Y^+, j) .

Soit $E = \Pi_1(Y)$ le groupe fondamental de Y . On commence par détruire E par adjonction de 2-cellules. On considère le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} V \\ \gamma \in E \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_Y^1} \\ \downarrow \end{array} & Y \\
 & & \downarrow \\
 \begin{array}{c} V \\ \gamma \in E \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_Y^2} \\ \downarrow \end{array} & Y'
 \end{array}$$

Le théorème de Van Kampen montre que Y' est simplement connexe et la suite exacte de Mayer-Victoris fournit des isomorphismes

$$H_k(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_k(Y', \mathbb{Z}) \quad k \neq 2$$

et une suite exacte :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_2(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(Y', \mathbb{Z}) \xrightarrow[\quad S \quad]{\quad \partial \quad} H_1\left(\bigvee_{\gamma \in E} S_Y^1, \mathbb{Z}\right) \longrightarrow 0,$$

puisque, par hypothèse, $H_1(Y, \mathbb{Z}) = \Pi_1(Y)^{ab} = 0$.

Mais $H_1\left(\bigvee_{\gamma \in E} S_Y^1, \mathbb{Z}\right)$ est un groupe abélien libre de base canonique $(e_\gamma)_{\gamma \in E}$,

où e_γ est l'image de $\text{id}_{S_Y^1}$ par l'homomorphisme de Hurewicz

$H_1(S_Y^1) \longrightarrow H_1(S_Y^1, \mathbb{Z})$. La suite $(*)$ est donc scindée et l'on désigne par S une section de ∂ ($\partial \circ S = \text{id}$).

Par adjonction de 3-cellules à Y^1 , on détruit l'image de S . Nous obtiendrons ainsi un espace simplement connexe, ayant la même homologie que Y' .

Puisque Y' est simplement connexe, on a l'isomorphisme de Hurewicz $h : \Pi_2(Y') \longrightarrow H_2(Y', \mathbb{Z})$ et on considère la famille $(\gamma')_{\gamma \in E}$ d'éléments de $\Pi_2(Y')$ définie par $h(\gamma') = S(e_\gamma)$ pour tout $\gamma \in E$. On considère alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\gamma \in E} S_{Y'}^2 & \xrightarrow{c'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{\gamma \in E} B_Y^3 & \longrightarrow & Y^+ \end{array}$$

Par le théorème de Van Kampen, Y^+ est simplement connexe, et la suite exacte de Mayer-Victoris fournit des isomorphismes :

$$H_k(Y', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_k(Y^+, \mathbb{Z}) \quad (k \neq 2, 3).$$

et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_3(Y', \mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(Y^+, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2\left(\bigvee_{\gamma \in E} S_{\gamma}^2, \mathbb{Z}\right) \xrightarrow{c_*^!} H_2(Y', \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Y^+, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Mais $H_2\left(\bigvee_{\gamma} S_{\gamma}^2, \mathbb{Z}\right)$ est un groupe abélien libre de base $(e_{\gamma})_{\gamma \in E}$ où e_{γ} est l'image de $\text{id}_{S_{\gamma}^2}$ par l'isomorphisme de Hurewicz $\Pi_2(S_{\gamma}^2) \longrightarrow H_2(S_{\gamma}^2, \mathbb{Z})$.

Il en résulte que $c_*^!(e_{\gamma}) = h(\gamma')$ pour tout $\gamma \in E$. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_2\left(\bigvee_{\gamma'} S_{\gamma'}^2, \mathbb{Z}\right) & \xrightarrow{c_*^!} & H_2(Y', \mathbb{Z}) \\ \beta \uparrow & \nearrow & \\ H_1\left(\bigvee_{\gamma} S_{\gamma}^1, \mathbb{Z}\right) & & \end{array}$$

où β est l'isomorphisme canonique tel que $\beta(e_{\gamma}) = e_{\gamma}$ pour tout $\gamma \in E$.

Comme S est injectif, il en est de même de $c_*^!$, on obtient donc un isomorphisme

$$H_3(Y', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_3(Y^+, \mathbb{Z})$$

et une suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_1\left(\bigvee_{\gamma} S_{\gamma}^1, \mathbb{Z}\right) \xrightarrow{S} H_2(Y', \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Y^+, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

On obtient donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H_1 \left(\underset{Y}{V} \underset{Y}{S}^1, Z \right) & \xrightleftharpoons[\partial]{S} & H_2(Y', Z) & \longrightarrow & H_2(Y^+, Z) & \longrightarrow 0 \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & H_2(Y, Z) & & & \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & 0 & & &
 \end{array}$$

d'où il résulte que le composé $H_2(Y, Z) \longrightarrow H_2(Y', Z) \longrightarrow H_2(Y^+, Z)$ est un isomorphisme. On désigne par j la cofibration composée $Y \longrightarrow Y' \longrightarrow Y^+$ qui est acyclique.

EQUIVALENCE DE i) ET ii).

Supposons la fibre homotopique E_j de j , acyclique, la suite spectrale de Serre : $H_p(V^+, H_q(E_j, Z)) \implies H_{p+q}(Y, Z)$ dégénère et les homomorphismes extrêmes $j_* : H_*(Y, Z) \longrightarrow H_*(Y^+, Z)$ sont des isomorphismes.

Réciproquement, supposons j acyclique. Comme Y est connexe et Y^+ simplement connexe, E_j est connexe, et l'on a la suite exacte :

$H_2(Y, Z) \xrightarrow{\sim} H_2(Y^+, Z) \longrightarrow H_1(E_j, Z) \longrightarrow H_1(Y, Z) \xrightarrow{\sim} H_1(Y^+, Z)$;
 donc $H_1(E_j, Z) = 0$. Par récurrence, supposons prouvé que $H_r(E_j, Z) = 0$
 $1 \leq r \leq n-1$. On a une suite exacte :

$H_{n+1}(Y, Z) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(Y^+, Z) \longrightarrow H_n(E_j, Z) \longrightarrow H_n(Y, Z) \xrightarrow{\sim} H_n(Y^+, Z)$
 qui montre que $H_n(E_j, Z) = 0$.

PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE.

Nous démontrons pour cela, la proposition suivante, plus précise, que nous aurons à utiliser par la suite.

PROPOSITION 2. - Soient $i : A \rightarrow B$ une cofibration acyclique, avec B simplement connexe et C un espace simplement connexe.

i) Pour tout $f : A \rightarrow C$, il existe $g : B \rightarrow C$ (avec $g \circ i = f$).

ii) Soient $g_0, g_1 : B \rightarrow C$ deux applications et $F : A \times I \rightarrow C$ une homotopie entre $g_0 \circ i$ et $g_1 \circ i$. Il existe une homotopie $G : B \times I \rightarrow C$ entre g_0 et g_1 prolongeant F .

Considérons le carré cocartésien suivant:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{f'} & D \end{array} \quad .$$

Le théorème de Van Kampen montre que D est simplement connexe, et la suite exacte de Mayer-Victoris nous fournit des isomorphismes

$$j_* : H_*(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(D, \mathbb{Z}).$$

Par suite, j est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead. Mais j est une cofibration, donc admet une rétraction

$r : D \rightarrow C$ ($r \circ j = \text{id}_C$). On a alors $g \circ i = f$ avec $g = r \circ f'$.

Pour obtenir ii), il suffit d'appliquer i) à la situation :

$$\begin{array}{ccc} B \times O \cup B \times I \cup A \times i & \xrightarrow{\quad} & B \times I \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array} \quad \begin{array}{c} g_0 \cup g_1 \cup F \\ . \end{array}$$

THEOREME. - Soient X un espace (connexe par arcs) et E un sous-groupe distingué et parfait du groupe fondamental $G = \Pi_1(X)$ de X . Alors il existe un couple (X^+, i) où X^+ est un espace et $i : X \rightarrow X^+$ une cofibration vérifiant les propriétés suivantes :

a) la suite $1 \rightarrow E \rightarrow \Pi_1(X) \xrightarrow{\Pi_1(i)} \Pi_1(X^+) \rightarrow 1$ est exacte et, pour tout système localement constant de coefficients abéliens $\mathcal{A}$ sur X^+ , $i_* : H_*(X, i^{-1}(\mathcal{A})) \rightarrow H_*(X^+, \mathcal{A})$ est un isomorphisme.

b) Pour tout espace Z , l'application $[X^+, Z] \rightarrow [X, Z]$ $[g] \mapsto [g \circ i]$ est une bijection de $[X^+, Z]$ sur l'ensemble des $[f]$ de $[X, Z]$ tels que $E \subset \text{Ker } \Pi_1(f)$.

c) La propriété (a) caractéristique (X^+, i) de manière unique à homotopie près.

d) Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement associé au sous-groupe E de G .

Alors $p^+ : Y^+ \rightarrow X^+$ est, à homotopie près, un revêtement universel.

e) La fibre homotopique E_i de $i : X \rightarrow X^+$ est acyclique.

DEMONSTRATION. - a) Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement associé à E . le groupe fondamental de Y est parfait et on peut obtenir, d'après la proposition 1,

un couple (Y^+, j) où Y^+ est simplement connexe et $j : Y \rightarrow Y^+$ une cofibration acyclique. On considère le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & Y^+ \\ \downarrow p & & \downarrow p^+ \\ X & \xrightarrow{i} & X^+ \end{array} .$$

Puisque $\Pi_1(Y^+)$ est simplement connexe, le théorème de Van Kampen fournit la suite exacte :

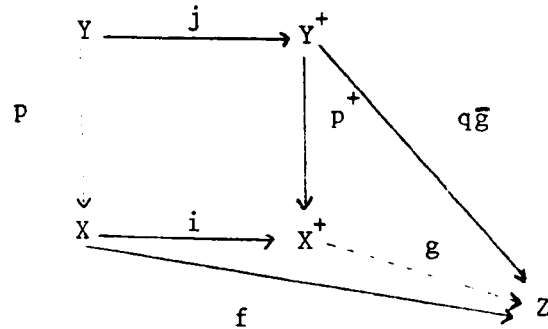
$$1 \rightarrow \Pi_1(Y) \xrightarrow{\Pi_1(p)} \Pi_1(X) \xrightarrow{\Pi_1(c)} \Pi_1(X^+) \rightarrow 1.$$

Et, par définition de Y , on a $\text{Im } \Pi_1(p) = E$. D'après le théorème des coefficients universels, $j_* : H_*(Y, A) \rightarrow H_*(Y^+, A)$ est un isomorphisme pour tout groupe abélien A . Soit $\mathcal{A}$ un système localement constant de coefficients sur X^+ , le système $(p^+)^{-1}(\mathcal{A})$ est constant puisque Y^+ est simplement connexe, il résulte alors de la suite exacte de Mayer-Victoris que $i_* : H_*(X, i^{-1}\mathcal{A}) \rightarrow H_*(X^+, \mathcal{A})$ est un isomorphisme.

b) Soient Z un espace (connexe par arcs) et $f : X \rightarrow Z$ une application telle que $E \subset \text{Ker } \Pi_1(f)$. Désignons par $q : \bar{Z} \rightarrow Z$ un revêtement universel. On obtient un diagramme commutatif

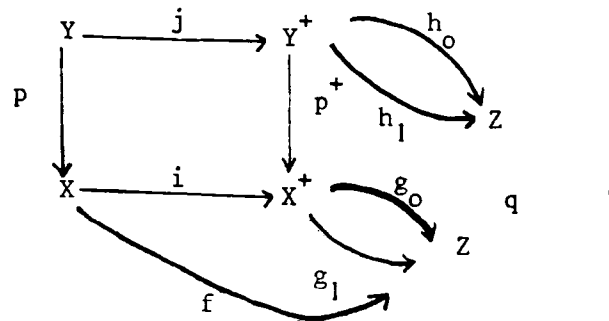
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{Z} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} .$$

D'après la proposition 2, il existe $\bar{g} : Y^+ \rightarrow \bar{Z}$ tel que $\bar{g} \circ j = \bar{f}$ et par suite il existe $g : X^+ \rightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme :



En particulier $g \circ i = f$.

Soient $g_0, g_1 : X^+ \rightarrow Z$ telles que $[g_0 \circ i] = [g_1 \circ i]$. Puisque i est une cofibration, on peut supposer que $g_0 \circ i = g_1 \circ i$, et il existe donc des applications $h_0, h_1 : Y^+ \rightarrow \bar{Z}$ telles que $h_0 \circ j = h_1 \circ j$.



La proposition 2 montre qu'il existe une homotopie H entre h_0 et h_1 telle que $H|_{Y \times I} : Y \times I \rightarrow Z$ soit $(y, t) \mapsto h_t \circ j(y) = h_1 \circ j(y)$

c) Soit (X', i) vérifiant les conditions de (a). D'après (b) il existe $f : X^+ \rightarrow X'$ tel que $f \circ i = i'$, et pour tout système localement constant $\mathcal{A}$ sur X' , $f_* : H_*(X^+, f^{-1}\mathcal{A}) \rightarrow H_*(X', \mathcal{A})$ est un isomorphisme.

Il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{X^+} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{X'} \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ X^+ & \xrightarrow{f} & X' \end{array} ,$$

où q et q' sont des revêtements universels. On a donc un isomorphisme de systèmes de coefficients : $f^{-1}\mathcal{H}_0(q') \simeq \mathcal{H}_0(q)$. Les suites spectrales de Serre de q et q' fournissent des isomorphismes :

$$H_*(X^+, \mathcal{H}_0(q)) \xrightarrow{\sim} H_*(\overline{X^+}, \mathbb{Z}) \text{ et}$$

$$H_*(X', \mathcal{H}_0(q')) \xrightarrow{\sim} H_*(\overline{X'}, \mathbb{Z})$$

donc $\overline{f}_* : H_*(\overline{X^+}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(\overline{X'}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Donc $\overline{f}$ est une équivalence d'homotopie, d'après le th. de Whitehead. Puisque q et q' sont des revêtements et que $\Pi_1(f) : \Pi_1(X^+) \rightarrow \Pi_1(X')$ est un isomorphisme, f est aussi une équivalence d'homotopie.

d) Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X^+ \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{i} & X^+ \end{array} ,$$

où q est un revêtement universel. Alors p est un revêtement tel que

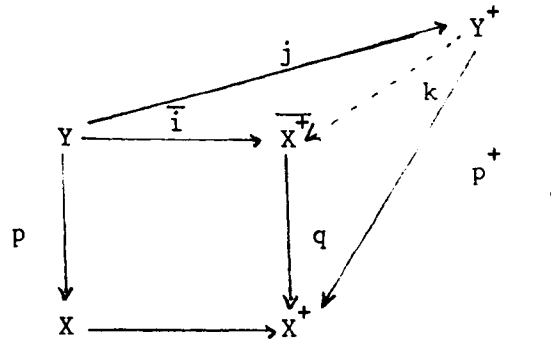
$\Pi_1(X)/\text{Im } \Pi_1(p) = \Pi_1(X^+)$. Il en résulte que p est un revêtement associé à E . De plus, on a un isomorphisme de systèmes localement constant de coefficients : $i^{-1}\mathcal{H}_0(q) \simeq \mathcal{H}_0(p)$. Les suites spectrales de Serre donnent des isomorphismes $H_*(Y, \mathcal{H}_0(p)) \simeq H_*(Y, \mathbb{Z})$

$$H_*(X^+, \mathcal{H}_0(q)) \simeq H_*(X^+, \mathbb{Z}) ;$$

donc $\bar{i}_* : H_*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X^+, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

D'après la proposition 1, il existe $k : Y^+ \rightarrow X^+$ tel que $k \circ j = \bar{i}$.

Par suite $k_* : H_*(Y^+, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X^+, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et k est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead.



Mais $p^+ \circ j = i \circ p = q \circ \bar{i} = q \circ k \circ j$ d'où $[p^+] = [q] \circ [k]$.

e) Le diagramme précédent et le fait que k est une équivalence d'homotopie, montre que les fibres homotopiques E_i et E_j ont le même type d'homotopie.

EXEMPLE. - Soit G un groupe quasi-parfait (i.e. $E = [G, G]$ est parfait, ce qui signifie que $E = [E, E]$). On désigne par BG l'espace classifiant de G ; c'est la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial $[n] \mapsto \text{Mor}([n], G)$. Puisque $\Pi_1(BG) \cong G$, on peut appliquer le théorème. On obtient donc un espace BG^+ et une cofibration $i : BG \rightarrow BG^+$ tels que :

$$(i) \quad \Pi_1(BG)^+ = G/[G, G] ,$$

$$(ii) \quad i_* : H_*(BG, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(BG^+, \mathbb{Z}) \text{ est un isomorphisme.}$$

Rappelons que $H_*(BG, \mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $H_*(G, \mathbb{Z})$.

(iii) BG^+ représente le foncteur défini par $Z \mapsto [BG, Z]$ où Z parcourt les espaces dont le groupe fondamental est abélien.

$$(iv) \quad BE^+ \rightarrow BG^+ \text{ est, à homotopie près, un revêtement universel.}$$

Pour le point (iv), on utilise le diagramme cocartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} BE^+ & \xrightarrow{\quad} & BE^+ \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ Y & \xrightarrow{j} & Y^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i} & X^+ \end{array} .$$

$BE \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie et j une cofibration ; donc $BE^+ \rightarrow Y^+$ est une équivalence d'homotopie. On applique alors le théorème (d).

En particulier, on peut appliquer ce qui précède au cas où $G = GL(A)$, où A est un anneau unitaire (resp. $G = {}_{\epsilon}O(A)$, où A est un anneau hermitien) et obtenir ainsi l'espace classifiant $K_0(A) \quad BGL(A)^+$ (resp. ${}_{\epsilon}L_0(A) \times B{}_{\epsilon}O(A)^+$) de la K-théorie (resp. L-théorie) algébrique.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] D. QUILLEN, *Cohomology of groups*, Act. Congr. Inst. Math., 1970, T.2,
p. 47-51.
- [2] D. QUILLEN, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups
over a finite field*, Ann. of Math., 96 (1972), p. 552-586.
- [3] J.B. WAGONER, *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*.
Top. vol. 11 (19) p. 349-370.

M. CRETIN
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE