

A. BATBEDAT

Sur la conjecture de A. Lichnerowicz

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 3
, p. 51-57

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_51_0

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONJECTURE DE A. LICHNEROWICZ

par A. BATBEDAT

INTRODUCTION.

Dans sa note [1] aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris de 1964, A. Avez cite la conjecture suivante de A. Lichnerowicz :
Si le plus grand groupe connexe de transformations conformes d'une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, n'est pas compact, la variété est globalement conforme à une sphère, et en propose une démonstration dans [1] et [2]. Mais dans [11], M. Obata montre que cette preuve est incomplète.

En 1969, J. Lelong-Ferrand expose dans [5] des résultats (qu'elle développe dans [6]) très intéressants dans ce contexte mais qui concernent surtout les homéomorphismes ; or J. Milnor a construit [9] une variété homéomorphe et non difféormorphe à S^7 .

Nous montrons ici comment la propriété d'existence d'une suite régulièrement dégénéréscente établie dans [5] et [6] permet de reprendre la démonstration de Avez.

Ajoutons que cette conjecture a été déjà démontrée dans [12] par M. Obata (avec une méthode qui utilise le revêtement riemannien) ; d'autre part, dans chacune des notes [7] et [8], J. Lelong-Ferrand dit que les propriétés présentées "permettraient de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Lichnerowicz".

1. - On considère la variété riemannienne (M, g) , compacte, de classe C^∞ , de dimension $n > 2$ et le groupe C des transformations (difféomorphismes) conformes de (M, g) (θ est conforme s'il existe une fonction $u(x)$ telle que $\theta^* g = ug$).

C est un groupe de Lie de transformations de M et sa topologie est la topologie "ouvert-compact" ; C_0 est la composante connexe de l'identité dans C . Le problème fondamental étant celui de la réductibilité éventuelle (à un groupe d'isométries) de C ou de C_0 , les propriétés suivantes (voir [3]) permettent d'éclairer la conjecture de Lichnerowicz :

PROPOSITION 1.1. - *Pour que C_0 soit réductible, il faut et il suffit qu'il soit compact.*

Pour la sphère S^n , C_0 n'est pas réductible.

D'autre part il résulte de [10] :

PROPOSITION 1.2. - *Si C_0 n'est pas compact, il contient un sous-groupe G à un parapètre, fermé et non compact.*

Soit ε un nombre réel positif : on appelle ε -*triplet* pour (M, g) un triplet $\{a_1, a_2, a_3\}$ de points de M tel que pour $i \neq j$, $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$, et ε -*transformation* une transformation θ de M pour laquelle il existe un ε -triplet dont l'image par θ est un ε -triplet.

La proposition 7.3 de [6] permet alors d'énoncer :

PROPOSITION 2.1. - *Toute famille de ε -transformations conformes de (M, g) est équicontinue.*

Dans [5], l'auteur a introduit la notion suivante (que nous adaptons au contexte actuel) :

DEFINITION 2.2. - (ϕ_p) est une suite régulièrement dégénérissante de transformations de M s'il existe a et b dans M tels que la suite $\phi_p(x)$ (resp. $\phi_p^{-1}(y)$) tende vers b (resp. a) quel que soit $x \in M' = M - \{a\}$ (resp. $y \in M'' = M - \{b\}$), la convergence étant uniforme sur tout compact de M' (resp. M'') .

Soit F une famille (de transformations) conforme non équicontinue. Il résulte de la proposition 2.1 que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta \in F$ qui n'est pas une ε -transformation ; ainsi, en donnant à ε une suite de valeurs ε_p tendant vers zéro, on obtient une suite θ_p extraite de F (méthode de [6]) La démonstration de la proposition 8.1 de [6] donne alors ici :

PROPOSITION 2.3. - *Toute famille conforme non équicontinue contient une suite régulièrement dégénéréscente.*

COROLLAIRE 2.4. - *Le groupe G de la proposition 1.2 contient une suite (ϕ_p) régulièrement dégénéréscente.*

3. - Lorsque C_o n'est pas compact, on considère le groupe G de la proposition 1.2 et la suite (ϕ_p) du corollaire 2.4 avec les points a et b de la définition 2.2 (ces points peuvent être confondus).

PROPOSITION 3.1. - *Les points fixes de G sont a et b.*

Preuve. - Il est immédiat que les points fixes éventuels de G ne peuvent être que a ou b. La réciproque se démontre de la façon suivante (communiqué par J. Lelong-Ferrand) : θ étant choisie dans G, on considère x distinct de a et de $\theta^{-1}(a)$:

$$\theta(b) = \theta(\lim \phi_p(x)) = \lim \theta \phi_p(x) = \lim \phi_p \theta(x) = b.$$

De même pour a.

Soit X le champ de vecteurs associé au groupe G. Il résulte de cette proposition que $X_a = X_b = 0$ et, pour tout x distinct de a et b, l'orbite de X passant par x est non dégénérée ; de plus a et b sont adhérents à toute vraie orbite.

Considérons maintenant un champ de tenseurs α et une fonction $\Phi(X, \alpha)$ de M

vers \mathbb{R} , tels que :

- (i) $\Phi(X, \alpha)$ est constante sur chaque orbite de X et c'est une fonction continue sur M ;
- (ii) $X_y = 0$ implique $[\Phi(X, \alpha)]_y = 0$;
- (iii) $[\Phi(X, \alpha)]_z = 0$ et $X_z \neq 0$ impliquent $\alpha_z = 0$.

Alors on montre facilement que $\alpha = 0$ sur M .

PROPOSITION 3.2. - *Si C_0 n'est pas compact, (M, g) est localement conformément plate.*

Preuve. - [1] et [12] proposent des fonctions $\Phi(X, \alpha)$ vérifiant les hypothèses précédentes et pour lesquelles α est le tenseur de Weyl (ou son analogue pour $n = 3$).

REMARQUE. - Dans la note [5], J. Lelong-Ferrand dit que l'existence d'une suite régulièrement dégénéréscente entraîne que (M, g) est conformément plate, mais cette affirmation n'est pas reprise dans [6].

PROPOSITION 3.3. - *Si C_0 n'est pas compact, M est simplement connexe.*

Preuve : (élaborée en liaison avec Y. Kerbrat).- Soient V un voisinage de b dans lequel tout lacet est homotope à un lacet nul et λ un lacet de M qui ne contient pas a (sinon une homotopie permet de l'éviter) : λ est un compact contenu dans M' (définition 2.2) sur lequel (ϕ_p) converge uniformément ; donc il existe un indice q pour lequel $\phi_q(\lambda) \subset V$. On termine en

remarquant que (puisque ϕ_q est élément de G) $\phi_q(\lambda)$ est homotope à λ .

4. -

THEOREME. - *La conjecture de A. Lichnerowicz est vraie. Si C_0 n'est pas compact, (M, g) est conforme à S^n .*

Preuve. - D'après [4], ceci résulte des propositions 3.2 et 3.3.

REFERENCES. -

- [1] A. AVEZ, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série A, t.259(1964),p.4469-4472.
- [2] A. AVEZ, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série A, t.260(1965).p.1550-1553.
- [3] C. BARBANCE, *Thèse de doctorat*, Paris (1969).p. 1-65.
- [4] N.H. KUIPER, *On conformally flat spaces in the large.*, *Ann. of Math.* t. 50(1949).p. 916-924.
- [5] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série A, t.269 (1969) p.583-586.
- [6] J. LELONG-FERRAND, *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*, Bruxelles (1971).p. 1-44
- [7] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série A.t 274 (1972),p. 483-486.
- [8] J. LELONG-FERRAND, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série A,t. 275 (1972),p.119-122.
- [9] J. MILNOR, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.**Ann. of Math.* t.64 (1956), p. 399-405.
- [10] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Existence of subgroups iso-morphic to the real number.* *Ann. of Math.* t.53 (1931).p. 298-326.

Sur la conjecture de A. Lichnerowicz

- [11] M. OBATA, *Commentaire n° 1635*, Math. Reviews, t.31 (1966).
- [12] M. OBATA, *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds*, J. Differential geometry, t. 6 (1971).p. 247-258.

A. BATBEDAT
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Montpellier
34000 - MONTPELLIER