

ALAIN BOUVIER

**Structure des anneaux à factorisation unique**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1974, tome 11, fascicule 3  
, p. 39-49

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1974\\_\\_11\\_3\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_3_39_0)

© Université de Lyon, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## STRUCTURE DES ANNEAUX A FACTORISATION UNIQUE

par Alain BOUVIER

Cet article est consacré à la démonstration d'un théorème de structure pour les anneaux à factorisation unique [5] et à des conséquences immédiates.

THEOREME DE STRUCTURE. - *Un anneau A est à factorisation unique [5] si et seulement s'il vérifie l'une des conditions :*

- (i) A est factoriel,*
- (ii) A est principal spécial [9],*
- (iii) A est local (non nécessairement noéthérien) et son idéal maximal  $\mathfrak{m}$  vérifie  $\mathfrak{m}^2 = (0)$ .*

DEMONSTRATION. - Conditions suffisantes. Si A vérifie (i) et (ii), il est à factorisation unique d'après [5]. Si A vérifie (iii), tout élément non nul de  $\mathfrak{m} = A - U(A)$  est trivialement irréductible et possède une unique factorisation en irréductibles.

Conditions nécessaires. On sait [5] qu'un anneau à factorisation unique intègre est factoriel et que si  $A$  est un anneau à factorisation unique non intègre, il est local, de radical  $\mathfrak{m} = \text{div}(A)$ . Deux cas sont alors possibles :

1)  $A$  possède un élément irréductible et premier  $p$ . Alors, tout autre irréductible  $q$  est premier. Sinon, d'après [5], on aurait  $q^2 = 0 \in pA \Rightarrow q \in pA$ , ce qui est absurde.

Donc  $A$  est D-atomique [5], présimplifiable (car à factorisation unique), non intègre, donc principal spécial [5].

2)  $A$  ne possède pas d'élément irréductible qui soit premier. Or  $A$  possède nécessairement des éléments irréductibles. D'après [5], pour tout irréductible  $p$  de  $A$ , on a  $p^2 = 0$ . Donc pour tout élément  $x \in \mathfrak{m}$ , on a  $x^2 = 0$ . D'où  $\mathfrak{m} = \text{nil}(A)$  et  $\text{spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ .

Vérifions que  $\mathfrak{m}^2 = (0)$ . Soient  $p$  et  $q$  deux irréductibles non associés (donc distincts) de  $A$ . Alors,  $pq = 0$  sinon, on a  $0 = pq^2 = p^2q$  et  $pq(q-p) = 0$ .

Comme  $A$  est présimplifiable [5], cela entraîne que  $q - p = 1 - u$  avec  $u \in U(A)$ , et  $u \neq 1$ . Par ailleurs, puisque  $pq \neq 0$  et que  $pq(q-p) = 0$  on a  $q - p \notin U(A)$ . Donc  $q-p \in A^* - U(A)$  et  $q-p$  admet une factorisation en irréductibles, :  $q - p = p_1 p_2 \dots p_n$  avec  $p_i$  irréductibles et  $n \geq 1$ .

En multipliant par  $p$ , on obtient :  $qp = p_1 p_2 \dots p_n p \neq 0$ .

Comme  $A$  est à factorisation unique, cela entraîne  $h = 1$  et  $p_1 A = qA$ .  
 Donc  $p_1 = qv$  avec  $v \in U(A)$ . Alors :  $q - p = p_1 p_2 \dots p_h = qv$  ; d'où  
 $q(1-v) = p$ . Cela prouve que  $q$  divise  $p$ , ce qui est absurde. Donc le produit  
 de deux irréductibles distincts ou non est toujours nul. Cela entraîne  
 que  $\mathfrak{m}^2 = (0)$ .

C.Q.F.D.

CONSEQUENCES IMMEDIATES.

1) Un anneau à factorisation unique non intègre est de dimension  
 de Krull nulle. C'est un anneau spécial d'indice 2 : il possède un unique  
 idéal premier  $\mathfrak{m}$  qui est nilpotent, d'indice de nilpotence égal à 2.  
 $\mathfrak{m} = \text{div}(A) = \text{rad}(A) = \text{nil}(A)$  et  $\text{spec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ .

2) Un anneau à factorisation unique non intègre  $A$  n'est pas néces-  
 sairement noéthérien. Exemple : si  $K$  est un corps et si  
 $A = K[X_n]_{n \in \mathbb{N}} / (X_n X_m)_{n, m \in \mathbb{N}}$ .

3) Soit  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non  
 intègre  $A$ . L'anneau gradué  $G_r(A)$  associé est  $G_r(A) = \bigoplus_n (\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}) = (A/\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{m}$ .  
 $0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$  est une suite exacte scindée de  $A$ -modules et  
 $A$  est une extension d'un anneau de carré nul par un corps.

4) Un anneau à factorisation unique est réduit si et seulement s'il  
 est intègre, c'est-à-dire factoriel.

5) Soit  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non  
 intègre  $A$ . Pour un  $A$ -module  $M$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)  $M$  est libre ;
- b)  $M$  est projectif ;
- c)  $M$  est plat ;
- d) l'homomorphisme canonique  $\mathfrak{M}_b \otimes_A M \longrightarrow M$  est injectif ;
- e)  $\text{Tor}_1^A (A/\mathfrak{M}_b, M) = 0$ .

REMARQUE. - Un anneau atomique [5], présimplifiable, possédant des pgcd et des ppcm, n'est pas nécessairement à factorisation unique. En effet :  $A = (\mathbb{Z} / 4 \mathbb{Z})[X_1]/(X^2 - 1)$  est un tel anneau ; mais il n'est pas à factorisation unique puisque  $(3 + 3x)^2 = 1 + 2x \neq 0$ .

On note  $K\text{-dim}(A)$  la dimension de Krull d'un anneau  $A$  et  $gb\text{-dim}(A)$  sa dimension globale.

COROLLAIRE 1. - Pour un anneau à factorisation unique non intègre  $A$  de radical  $\mathfrak{M}_b$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $A$  est noéthérien ;
- ii)  $\mathfrak{M}_b$  est de type fini ;
- iii)  $A$  est artinien.

DEMONSTRATION. - (i)  $\iff$  (ii) : Conséquence immédiate du théorème de I.S. Cohen.  
 (iii)  $\implies$  (i) : trivial ; (i)  $\implies$  (iii) puisque  $K\text{-dim}(A) = 0$ .

COROLLAIRE 2. - Soit  $\mathfrak{M}$  l'idéal maximal d'un anneau à factorisation unique non intègre  $A$ . L'anneau  $A$  est principal si et seulement si  $\mathfrak{M}$  est un idéal principal.

DEMONSTRATION. - Si  $\mathfrak{M}$  est un idéal principal, d'après le corollaire 1, l'anneau  $A$  est artinien local. Alors  $\mathfrak{M}$  principal entraîne  $A$  principal d'après [9] .

En utilisant une idée de J. HACHE, on peut énoncer :

COROLLAIRE 3. - Si  $p$  est un élément irréductible d'un anneau localement à factorisation unique [4]  $A$ , pour tout  $k \geq 1$ ,  $A/p^k A$  est un anneau présimplifiable.

DEMONSTRATION. - Si  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  et si  $p = (p_1, u_2, \dots, u_n)$  où  $p_1$  est irréductible dans  $A_1$  et  $u_i \in U(A_i)$  pour  $i \geq 2$ , on a  $A/p^k A = A_1/p^k A_1$ . On peut donc supposer  $A$  à factorisation unique.

Notre assertion est évidente lorsque  $A$  est factoriel ou principal spécial. Supposons que  $A$  vérifie la condition (iii) du théorème de structure. Nous pouvons supposer  $k = 1$ . On note  $x'$  la classe de  $x \in A$  dans  $A/pA$  où  $p$  est un irréductible de  $A$ . Supposons que  $x'y' = 0$  avec  $x' \neq 0$ . Deux cas à considérer :

$xy \neq 0$ . Alors, d'après [5],  $xy \in pA$  avec  $xy \neq 0$  et  $x \notin pA$  entraîne  $y \in pA$ , donc  $y' = 0$ .

$xy = 0$ . Comme  $x' \neq 0$ , on a  $y \notin U(A)$  donc  $y \in A - U(A) = \mathfrak{m} \subseteq 1 - U(A)$   
 et  $y' \in 1 - U(A/pA)$ .

D'où le résultat.

REMARQUE. - Soit  $A$  un anneau à factorisation unique non intègre. La dimension de Krull de  $A[X_1, \dots, X_n]$  est toujours finie. De façon plus précise :

a) Si  $A$  est un anneau noéthérien :

$$K\text{-dim}(A[X_1, \dots, X_n]) = K\text{-dim}(A[[X_1, \dots, X_n]]) = n ;$$

b) Si  $A$  n'est pas noéthérien :  $n \leq K\text{-dim}(A[X_1, \dots, X_n]) \leq 2^n - 1$ .

COROLLAIRE . - Soit  $A$  un anneau à factorisation unique non intègre ;

a) Si  $A$  est noéthérien, sa dimension globale est infinie.

b) Si  $A$  n'est pas noéthérien, sa dimension globale est supérieure ou égale à 3.

DEMONSTRATION. - a) Comme  $A$  est local non intègre, si  $A$  est noéthérien,  $A$  ne peut pas être de dimension globale finie [2].

b) Supposons  $A$  non noéthérien ; on a  $gb\text{-dim}(A) \geq 2$  sinon  $A$  serait héréditaire. Or  $A$  est présimplifiable, donc connexe et tout anneau héréditaire connexe est intègre.

Si  $gb\text{-dim}(A) = 2$ , d'après [8] , deux cas sont possibles :

1)  $\mathfrak{m}$  est principal ou n'est pas de type fini ; alors [8]  $A$  est un

anneau intègre (de valuation) et c'est contradictoire.

2)  $\mathcal{M}$  est engendré par une suite régulière de deux éléments. D'après notre corollaire 1, l'anneau A serait noéthérien et ce serait encore contradictoire. Donc ;  $\text{gb-dim}(A) \geq 3$ .

REMARQUE . - Pour un anneau à factorisation unique noéthérien non intègre A, on a  $\text{gb-dim}(A[X_1, \dots, X_n]) = \text{gb-dim}(A[[X_1, \dots, X_n]]) = \infty$ .

COROLLAIRE 5. - Pour tout anneau localement à factorisation unique A, on a  $\text{Pic}(A) = 0$ .

DEMONSTRATION. - Soit A un anneau localement à factorisation unique, il peut se mettre sous la forme  $A = (\prod_{i=1}^n A_i) \times B$  où les  $A_i$  sont factoriels et B semi-local. D'après [7] on a alors :

$$\text{Pic}(A) = \left( \bigoplus_{i=1}^n \text{Pic}(A_i) \right) \oplus \text{Pic}(B) = 0.$$

Nous appelons *Anneaux de Fletcher* les "unique factorization rings" de [6].

COROLLAIRE 6. - Soit A un anneau localement à factorisation unique [4] .  
A est un anneau de Fletcher si et seulement si les idéaux premiers principaux sont les idéaux premiers de hauteur  $\leq 1$ .



DEMONSTRATION. - La condition est nécessaire d'après [6]. Réciproquement soit  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  un anneau localement à factorisation unique dont les idéaux premiers principaux sont les idéaux premiers de hauteur  $\leq 1$ .

L'anneau  $A_1$  est factoriel ou principal spécial ; sinon, d'après le théorème de structure,  $A_1$  est local et son idéal maximal  $\mathfrak{m}_1$  est non principal et de hauteur nulle dans  $A_1$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{F} = \mathfrak{m}_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  est un idéal premier non principal et de hauteur nulle dans  $A$  ce qui est absurde.

Par conséquent, tous les  $A_i$  sont factoriels ou principaux spéciaux, donc de Fletcher [6] et il en est de même de  $A$ .

c.q.f.d.

COROLLAIRE 7. - Soit  $S$  une partie multiplicative d'un anneau localement à factorisation unique  $A$  ; alors,  $S^{-1}A$  est localement à factorisation unique et l'image canonique de  $A$  dans  $S^{-1}A$  est intégralement fermée.

DEMONSTRATION. - L'anneau  $A$  peut se mettre sous la forme  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  où les

$A_i$  sont des anneaux à factorisation unique. Alors  $S^{-1}A$  est de la forme

$\prod_{i=1}^n S_i^{-1}A_i$ , donc est localement à factorisation unique [5].

Soient  $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$  et  $\phi_i : A_i \longrightarrow S_i^{-1}A_i$  les homomorphismes canoniques et  $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$  un élément entier sur  $\phi(A)$ . Il peut se mettre sous la forme  $(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n})$  et  $\frac{a_i}{s_i}$  est entier sur  $\phi_i(A_i)$ . On peut supposer

$S_i^{-1} A_i$  non nul.

Si  $A_i$  est factoriel,  $\frac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$  ; si  $A_i$  est principal spécial ou vérifie (iii) du théorème de structure,  $S_i^{-1} A_i \neq 0$  entraîne  $S_i^{-1} A_i = A_i$  et  $\frac{a_i}{s_i} \in \phi_i(A_i)$  d'où  $\frac{a}{s} \in \phi(A)$ .

Soient  $B$  un système représentatif d'éléments irréductibles [5] d'un anneau  $A$  et  $\phi_B$  l'application  $X \longmapsto X^{-1}A$  de l'ensemble des parties non vides de  $B$  dans l'ensemble des anneaux de fractions de  $A$ . En correction à une erreur de [9] , on peut énoncer ([1] et [3]) :

*Pour un anneau atomique  $A$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

*$A$  est D-atomique ;*

*Il existe un système représentatif d'éléments irréductibles  $B$  tel que  $\phi_B$  soit bijective ;*

*Pour tout système représentatif d'éléments irréductibles  $B$ ,  $\phi_B$  est bijective.*

Le théorème suivant permet de donner, pour des anneaux autres que les anneaux atomiques, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\phi_B$  soit bijective lorsque  $B$  est un système représentatif d'éléments *indécomposables* [5] .

THEOREME 2. - Soit  $A$  un anneau localement à factorisation unique ;

les assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $A$  est D-atomique,

ii) Pour tout système représentatif d'éléments indécomposables  $B$  ,  
 $\Phi_B$  est bijective ;

iii) Il existe un système représentatif d'éléments indécomposables  
 $B$  , tel que  $\Phi_B$  soit bijective.

DEMONSTRATION. - Le résultat étant trivial si  $A$  est intègre, on suppose que  $A$  n'est pas intègre. Comme dans un anneau atomique non intègre, les systèmes représentatifs d'éléments irréductibles sont les systèmes représentatifs d'éléments indécomposables [5] , il est clair que (i)  $\implies$  (ii) et que (ii)  $\implies$  (iii).

(iii)  $\implies$  (i). Supposons qu'il existe un système représentatif d'éléments indécomposables  $B$  tel que  $\Phi_B$  soit bijective.  $A$  est atomique. Sinon,  $A$  est de type  $(k,h)$  avec  $k \geq 2$  [5] . Donc  $A = A_1 \times A_2$  où  $A_1$  est un anneau intègre et n'est pas un corps et où  $A_2$  est localement à factorisation unique. Il existe nécessairement dans  $B$  un indécomposable de la forme  $(0,u)$  avec  $u$  unité de  $A_2$  et un indécomposable  $(p,v)$  avec  $p$  indécomposable non nul dans  $A_1$  et  $v$  unité de  $A_2$ . Les éléments  $(0,u)$  et  $(p,v)$  sont distincts. Posons  $X = \{(0,u)\}$  et  $Y = \{(0,u), (p,v)\}$  . Alors  $X$  et  $Y$  sont deux parties distinctes de  $B$  telle que  $X^{-1}A = A_2 = Y^{-1}A$  et  $\Phi_B$  ne serait bijective, ce qui est contradictoire. Donc  $A$  est atomique et notre assertion est une conséquence du résultat rappelé plus haut.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] J.C. ALLARD, *Remarque sur les anneaux de fractions des anneaux D-atomiques*, Publ. Dép. Math. (Lyon); t.8 (1971), fasc. 2, p. 87-91.
- [2] M. AUSLENDER et D. BUCHSBAUM, *Homological dimension in local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 85, p. 390-1957.
- [3] A. BOUVIER, *Sur les anneaux de fractions des anneaux atomiques présimplifiables*, Bull. Soc. Math. France, 95, (1971), p. 371.
- [4] A. BOUVIER, *Remarques sur les factorisations dans les anneaux commutatifs*, Publ. Dép. Math. (Lyon); t.8 (1971), fasc. 3, p. 23-54.
- [5] A. BOUVIER, *Anneaux présimplifiables*, Rev. Roumaine, Math. Pures Appl. (à paraître).
- [6] C.R. FLETCHER, *Unique factorization in commutative ring*, (Thèse).
- [7] M. FONTANA, *Groupes de Picard et anneaux factoriels*, Séminaire P. LEFEBVRE, Lyon, (1973).
- [8] W. VASCONCELOS, *The local rings of global dimension two*, Proc. Amer. Math. Soc. t. 2 (1972), p. 381.
- [9] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative algebra*, Van Nostrand, New-York (1960).

A. BOUVIER  
Département de Mathématiques  
Université Claude Bernard  
43, bd du 11-novembre-1918  
69621-VILLEURBANNE