

MICHEL ROME

L'espace $M^\infty(T)$ (résumé)

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 4
, p. 31-33

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_4_31_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE $M^\infty(T)$ (Résumé)

Michel ROME

Dans cet exposé publié in extenso en (3), nous définissons et étudions l'espace $M^\infty(T)$ dual de l'espace compactologique $C^\infty(T)$. Ce dernier est structuré en algèbre compactologique en prenant comme recouvrement compact les parties équi continues uniformément bornées et simplement fermées (donc simplement compactes). On démontre que l'espace des caractères de $C^\infty(T)$ s'identifie au complété universel θT de T . Le dual de $C^\infty(T)$ est par définition $M^\infty(T)$. Cet espace, déjà introduit par Léger et Soury, est un espace de mesures compris entre M_T et M_σ , naturellement muni d'une structure d'elc séparé et complet. De ce point de vue, on rencontre là un espace assez curieux qui se laisse difficilement classer :

1. PROPOSITION. - $M^\infty(T)$ n'est infratonnelé que si T est discret. Dans ce cas, $M^\infty(T) = \ell^1(T)$.
2. PROPOSITION. - $M^\infty(T)$ est semi-réflexif, ou de type μ , ou espace de Schwartz, si et seulement si T est pseudocompact.

Enfin $M^\infty(T)$ ressemble à un espace DF par les propriétés suivantes :

3. PROPOSITION. - Une partie de $M^\infty(T)$ est bornée si et seulement si elle est bornée en norme. Ainsi $M^\infty(T)$ admet une base dénombrable de bornés.
4. PROPOSITION. - Pour toute suite (V_n) de voisinages de zéro dans $M^\infty(T)$ il existe une suite (λ_n) de scalaires telle que $V = \bigcap \lambda_n V_n$ soit aussi un voisinage de zéro.
5. PROPOSITION. - Soit E un elc quelconque. Pour qu'une application linéaire $U : M^\infty(T) \rightarrow E$ soit continue il suffit qu'elle soit continue sur la boule unité de $M^\infty(T)$.

Néanmoins, $M^\infty(T)$ n'est pas généralement un espace DF. En effet :

6. PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - a) $M^\infty(T)$ est un espace DF.
 - b) $M^\infty(T)$ est σ -infratonnelé (toute suite fortement bornée de son dual est équi continue).

- c) Toute suite f_n de $C(T)$ est équicontinue.
 d) T est un P-espace (tout noyau de T est ouvert).

Les dernières propriétés découlent du fait que, pour toute partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$, sur T , l'ensemble $H_\varphi = \{\sum \lambda_i \varphi_i ; |\lambda_i| \leq 1 \text{ pour tout } i\}$ est élément de la compactologie de (T) . Les lemmes suivants montrent que dans un certain sens on peut approcher n'importe quelle partie équicontinue par une partie H_φ .

7. LEMME. - Pour toute partie H équicontinue et tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ et une famille $(t_i)_{i \in I}$ de points de T telles que :

$$\text{pour toute } f \in H \quad \left\| f - \sum_i f(t_i) \varphi_i \right\| \leq \varepsilon.$$

8. LEMME. - Pour toute partie H équicontinue et uniformément bornée et tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ telle que

$$\| \mu \|_H \leq \varepsilon \| \mu \| + \sum_{i \in I} |\mu(\varphi_i)| \text{ pour toute } \mu \in M^\infty(T).$$

Ces deux lemmes permettent de transporter à $M^\infty(T)$ certaines propriétés de $\ell^1(I)$.

9. THEOREME. - $M^\infty(T)$ est une bande de $M(\beta T)$.

10. THEOREME. - Sur le cône positif de $M^\infty(T)$, la topologie de $M^\infty(T)$ coïncide avec sa topologie affaiblie $\sigma(M^\infty(T), C^\infty(T))$.

11. THEOREME. - Relativement à une partie A de $M^\infty(T)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est relativement compacte dans $M^\infty(T)$,
 (b) A est relativement faiblement compacte,
 (c) A est bornée et pour toute partition continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ l'ensemble des familles $(\mu(\varphi_i))_{i \in I}$ lorsque μ décrit A , est équisommable dans $\ell^1(I)$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que

$$\sup_{\mu \in A} \sum_{i \notin J} |\mu(\varphi_i)| \leq \varepsilon.$$

Cette caractérisation des parties compactes de $M^\infty(T)$ permet d'obtenir :

12. THEOREME. - $M^\infty(T)$ est approximant.

- (1) M. ROME, *Le dual de l'espace compactologique $C^{\infty}(T)$* , Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1631.
- (2) M. ROME, *Ordre et compacité dans l'espace $M^{\infty}(T)$* , Comptes rendus, 274, série A, 1972, p. 1817.
- (3) M. ROME, *L'espace $M^{\infty}(T)$* , Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972.

Michel ROME

*Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard LYON I
43, bd du Onze Novembre 1918
69621-VILLEURBANNE*