

ANDRÉ GOLDMAN

L'espace des fonctions localement L^p sur un espace compactologique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 3
, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_3_1_0

© Université de Lyon, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE DES FONCTIONS LOCALEMENT L^p SUR UN ESPACE COMPACTOLOGIQUE

André GOLDMAN

L'objet de ce travail est de donner de nouvelles propriétés concernant l'espace des fonctions localement L^p . On choisit pour cadre d'étude la classe des espaces compactologiques (2) ; ainsi on parlera de l'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$ des fonctions localement intégrables en moyenne d'ordre p ($p \in (1, +\infty)$) pour une prémesure μ sur un espace compactologique $\mathfrak{X}$ en munissant l'espace des classes de fonctions numériques mesurables f sur $\mathfrak{X}$ vérifiant $\mu_K |f|^p < +\infty$ pour tout compact K de $\mathfrak{X}$, de la topologie définie par les semi-normes $N_K^p(f) = (\mu_K |f|^p)^{1/p}$.

Sans épiloguer sur l'opportunité de ce choix, signalons toutefois que la classe des espaces compactologiques est très bien adaptée à une généralisation de la théorie de l'intégration sur les espaces localement compacts. (Pour plus de détails, se reporter à l'article (6) traitant de ce sujet).

Que savons-nous de l'espace $\Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$? Les propriétés de cet espace, bien connues lorsque $\mathfrak{X} = \gamma T$ (γT désigne la compactologie canonique de l'espace topologique T) où T est localement compact dénombrable à l'infini, deviennent déjà mystérieuses lorsque T est localement compact quelconque. Le seul résultat positif, à notre connaissance, est obtenu par Nielsen (8) : il montre que si toute partie de Weierstrass de T est compacte, alors $\Omega_c^p(\gamma T, \mu)$ est tonnelé ; il obtient ainsi une relation entre une propriété de l'elc Ω_c^p et une propriété interne de T . L'originalité de son travail réside dans la méthode, l'auteur utilisant des idées ayant fait leurs preuves dans les travaux de NACHBIN (7) et SHIROTA (9) relatifs aux fonctions continues. En poursuivant dans cette direction, il est possible de donner des caractérisations de l'elc $\Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$ en termes de propriétés internes de $\mathfrak{X}$, caractérisations nouvelles même si $\mathfrak{X} = \gamma T$ où T est localement compact.

Précisons que l'espace $\mathfrak{X}$, la prémesure μ (supposée toujours positive) et l'indice $p \in (1, +\infty)$ sont fixés une fois pour toutes. Pour toute question concernant l'intégration sur les espaces compactologiques, on se reportera à (6) ; notons néanmoins, pour la clarté de l'exposé, que si ν désigne une prémesure définie sur une partie mesurable A de $\mathfrak{X}$, alors ν° est la mesure image pour l'application canonique $i : A \rightarrow \mathfrak{X}$. De même, si f est une fonction numérique définie sur A , on note f° la fonction sur $\mathfrak{X}$ qui coïncide avec f sur A et qui vaut 0 ailleurs.

1. - LES PARTIES μ -BORNEES EN MOYENNE D'ORDRE p .

Par analogie avec les travaux de (1) et (3), on introduit la notion de parties "bornées" de $\mathfrak{X}$ qui vont jouer vis à vis-à-vis de Ω_c^p , un rôle semblable à celui joué par les parties bornées d'un espace topologique par rapport aux espaces de fonctions continues.

(1.1) DEFINITION. - Une partie mesurable A de $\mathfrak{X}$ est dite μ -bornée en moyenne d'ordre p s'il existe $f \in \Omega_c^q(\mathfrak{X}, \mu)$ avec $1/p + 1/q = 1$ telle que :

(a) $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$;

(b) Pour toute $g \in \Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$, on a $\mu_A |fg| < +\infty$.

Il est clair que l'ensemble des parties μ -bornées en moyenne d'ordre p (en abrégé μ -bornées) est stable par réunion finie et passage aux sous-ensembles mesurables.

Donnons encore quelques propriétés topologiques de ces parties.

(1.2) THEOREME :

(a) Toute partie μ -bornée A est réunion d'un ensemble N localement négligeable pour μ et d'un ensemble W warnérien (4) pour la topologie de $c\mathfrak{X}$ (qui est l'espace $\mathfrak{X}$ muni de la plus fine topologie compatible avec ses compacts).

(b) Toute partie μ -bornée A est incluse dans la réunion d'un ensemble de Weierstrass (pour $c\mathfrak{X}$) et d'un ensemble localement négligeable pour μ ; si de plus, A est fermée dans $c\mathfrak{X}$, alors l'inclusion est en fait une égalité d'ensembles.

Preuve :

a) Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur $c\mathfrak{X}$, uniformément bornées sur les compacts de $\mathfrak{X}$. Posons $f = \sup_{g \in \mathcal{F}} |g|$ et $U_n = \{x \in \mathfrak{X} ; f(x) > n\}$. Il est facile de prouver l'existence d'un entier $n_{\mathcal{F}}$ tel que $\mu(U_{n_{\mathcal{F}}}) = 0$. Soit maintenant $\mathcal{Y}$ l'ensemble des familles $\mathcal{F}$, alors $N = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{Y}} U_{n_{\mathcal{F}}}$ est localement négligeable et $W = A \setminus N$ est un borné warnérien de $c\mathfrak{X}$.

b) On utilise une méthode identique pour montrer ce résultat.

Existe-t-il des parties μ -bornées autres que les compacts ? Sont-elles stables par passage à l'adhérence (dans $c\mathfrak{X}$) ? Une partie de Weierstrass est-elle bornée ? Une partie μ -bornée non fermée est-elle réunion d'un ensemble localement μ -négligeable et d'un ensemble de Weierstrass ?

La réponse à ces questions est donnée par les exemples suivants :

(1.3) EXEMPLE. - Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{L})$ l'ensemble des familles de parties de $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple (A, B) d'éléments distincts de $\mathcal{L}$, $\text{card}(A \cap B) < +\infty$. Ordonnons $\mathcal{K}$ par inclusion et soit $\mathcal{L}_0$ un élément maximal de $\mathcal{K}$. Désignons par Ψ l'ensemble (construit dans (5), p. 79) réunion de $\mathbb{N}$ et d'un ensemble de points $(\omega_E)_{E \in \mathcal{L}_0}$, muni de la topologie suivante : tout point de $\mathbb{N}$ est ouvert ; un voisinage de ω_E est un ensemble réunion de ω_E et d'une partie de E dont le complémentaire dans E est fini. Alors si μ est la mesure qui vaut 2^{-n} aux points de la forme $x=n$ et 1 en tout autre point, l'espace Ψ n'est pas μ -borné bien qu'il soit localement compact et pseudocompact.

Remarque. - L'espace Ψ n'est pas réunion dénombrable d'ensembles intégrables (c'est-à-dire la pré mesure μ n'est pas σ -bornée). Ceci résout le problème posé dans (8) concernant l'existence de telles mesures sur un espace pseudocompact et localement compact.

(1.4) EXEMPLE. - Soient $X = \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ (où $\beta\mathbb{R}$ (resp. $\beta\mathbb{N}$) désigne le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{N}$)), ν une mesure diffuse bornée sur $\mathbb{R}$, dont le support est $\mathbb{R}$ tout entier et η une mesure atomique qui vaut 1 en tout point de $\mathbb{N}$ et 0 ailleurs. On désigne par φ la mesure sur $\mathbb{R}$, somme de ν et η , et par μ sa mesure image sur X par l'injection canonique $i : \mathbb{R} \rightarrow X$.

Alors X est un espace pseudocompact, localement compact et non μ -borné ; l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est une partie μ -bornée qui n'est pas réunion d'un ensemble localement négligeable et d'un ensemble pseudocompact ; et de plus toute partie μ -bornée et fermée est compacte (à un ensemble localement négligeable près).

Preuve. - Les propriétés topologiques de X sont bien connues (voir par exemple (5)). Tout compact de X ne rencontrant $\mathbb{N}$ qu'en un nombre fini de points, alors X n'est pas μ -borné. Montrons que pour toute $f \in \Omega_c^p(\gamma X, \mu)$ on a $\mu_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} |f| < +\infty$, ce qui prouvera que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est une partie μ -bornée. Or, dans le cas contraire, il existerait une fonction $f \in \Omega_c^p(\gamma X, \mu)$, une suite d'intervalles (a_n, b_n) deux à deux disjoints et une suite d'intervalles ouverts (U_n) de centre n vérifiant $\mu_{(a_n, b_n)} |f| \geq 2n$ et $\mu_{U_n} |f| \leq 2^{-n}$. Posons $B_n = (a_n, b_n) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, on a $\mu_{B_n} |f| \geq n$. Maintenant si l'on pose $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, il est facile de voir que B est un fermé de $\mathbb{R}$ disjoint de $\mathbb{N}$, donc un ensemble relativement compact de X , ce qui est absurde puisque $\mu_B |f| = +\infty$. En conclusion, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est bien μ -bornée et ne peut pas être réunion d'un ensemble localement négligeable et d'un ensemble pseudocompact.

Montrons enfin le dernier point : Soit A une partie μ -bornée fermée de X . Elle ne rencontre $\mathbb{N}$ qu'en un nombre fini de points, l'ensemble $B = \bigcup_{i \in A \cap \mathbb{N}}]i-1/2, i+1/2[$ est relativement compact dans X , et comme il en est de même de $C = A \cap \mathbb{R} \cap \bigcap_{\mathbb{R}} B$, on a le résultat.

2. - L'ESPACE $\Omega_c^P(\mathfrak{X}, \mu)$ ET LES CONDITIONS DE QUASI-TONNELAGE.

Un elc E est dit σ -quasi-tonnelé (resp. d -quasi-tonnelé) si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue (resp. si toute réunion d'une suite de parties équicontinues, qui est fortement bornée, est équicontinue). La notion de parties μ -bornées permet de caractériser exactement ces deux propriétés relatives à l'espace Ω_c^P .

(2.1) THEOREME. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'espace $\Omega_c^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est σ -quasi-tonnelé.

(b) L'espace $\Omega_c^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est d -quasi-tonnelé.

(c) Toute partie μ -bornée est compacte à un ensemble localement négligeable près.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (c) : Soit A une partie μ -bornée ; il existe $\hat{f} \in \Omega_c^q(\mathfrak{X}, \mu)$ dont un représentant f est une fonction strictement positive sur A et telle que $\mu_A |f| < +\infty$, d'où l'existence d'une suite de compacts (K_n) tels que $A = \bigcup K_n$ localement presque partout (l.p.p.). Considérons la suite $u_n = (f \cdot \mu_{K_n})^\circ$ d'éléments de $(\Omega_c^P)'$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est équicontinue ou encore fortement bornée. Etablissons ce dernier point : dans le cas contraire, il existerait une suite (f_n) bornée dans Ω_c^P et telle que $\mu_A |f \cdot f_n| \geq n^3$; la fonction $h = \sum_1^\infty |f_n|/n^2$ appartenant à Ω_c^P et vérifiant $\mu_A |fh| = +\infty$, on obtient la contradiction.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Considérons une suite (u_n) fortement bornée dans $(\Omega_c^P)'$. Elle est encore de la forme $u_n = (f_n \cdot \mu_{K_n})^\circ$ où $f_n \in \Omega_c^q(K_n, \mu_{K_n})$ et où K_n est un compact de $\mathfrak{X}$. De plus, il est facile de voir que la suite $|u_n| = (|f_n| \cdot \mu_{K_n})^\circ$ est également fortement bornée dans $(\Omega_c^P)'$. Posons $A_n = \{x ; f_n(x) \neq 0\}$, $A = \bigcup_0^\infty A_n$ et $f = \sum_0^\infty |f_n|/n^2$. Comme pour toute partie bornée B de Ω_c^P on a $\sup_{g \in B} \mu_A |fg| < +\infty$, il suffit pour conclure de montrer que $\hat{f} \in \Omega_c^q(\mathfrak{X}, \mu)$; en effet, si cela est acquis, l'ensemble A est une partie μ -bornée donc ne diffère d'un ensemble compact H que par un ensemble localement négligeable, mais dans ce cas la suite (u_n) s'identifie à une suite fortement bornée de $(L^P(H, \mu_H))'$, donc équicontinue, ce qui suffit.

Montrons donc ce point : si K est un compact de $\mathfrak{X}$, posons $h_n = \sum_{k=0}^n |f_k|/k^2$ et $v_n = h_n|_K \cdot \mu_K$. Il est clair que la suite (v_n) est de Cauchy dans $(L^p(K, \mu_K))'$, donc converge vers $h \cdot \mu_K$ avec $h \in L^q(K, \mu_K)$ et l'on vérifie sans peine que $f_K = h$, ce qui suffit.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Cette partie du théorème se démontre par récurrence transfinie. Soit donc $\mathfrak{X}$ un ensemble fortement borné de $(\Omega_c^p)'$, réunion d'une suite $(\mathfrak{X}_n)$ de parties équicontinues de $(\Omega_c^p)'$. Pour toute $\mathfrak{X}_n$, il existe un compact K_n et une constante M_n vérifiant $\sup_{u \in \mathfrak{X}_n} |u(f)| \leq M_n N_{K_n}^p(f)$ pour toute $f \in \Omega_c^p$. Considérons maintenant l'ensemble $K = \bigcup_n K_n$ et la mesure ν sur K définie par $\nu = \sum_1^\infty 2^{-n} (\mu_{K_n} / \mu(K_n))$. Cette dernière est évidemment bornée et l'ensemble des parties localement ν -négligeables coïncide avec celui des parties localement μ -négligeables. Le tout est alors conséquence du lemme suivant :

(2.2) LEMME. - Soient μ une mesure bornée sur un espace compactologique $\mathfrak{X}$ et $(A_j) = \mathcal{A}$ une famille d'ensembles intégrables. Il existe alors une suite extraite (A_n) telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on ait $A \subset \bigcup_1^\infty A_n$ l.p.p.

Preuve. - Considérons les ensembles $\mathcal{F}$ dont les éléments sont les sous-ensembles mesurables $B_j \subset A_j$ deux à deux disjoints et de mesure non nulle. Ordonnons les ensembles $\mathcal{F}$ par inclusion. Avec le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $(B_i)_{i \in I}$. De l'inégalité $\mu(\bigcup B_i) \geq \sum \mu(B_i)$, il résulte que l'ensemble I est dénombrable. Soit maintenant $C = \bigcup_{n \in I} B_n$. S'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \cap (\complement C)) \neq 0$, cela contredit le caractère maximal de (B_n) , d'où le résultat.

Terminons la preuve du théorème ; il résulte du lemme l'existence d'une suite $u_n = (f_n \cdot \mu_{K_n})^\circ \in H$ telle que pour tout $u = (f \cdot \mu_K)^\circ \in H$ on ait $K \subset \bigcup_n K_n$ l.p.p. La suite (u_n) étant équicontinue, l'ensemble A ne diffère d'un compact que par un ensemble localement négligeable.

J'ignore, dans le cas général, si les conditions du théorème 2.1 sont encore équivalentes au fait que Ω_c^p est quasi-tonnelé. Par contre, dans certains cas particuliers (non triviaux), la réponse est affirmative.

(2.3) THEOREME. - Si la prémesure μ est σ -bornée (c'est-à-dire si $\mathfrak{X}$ est réunion dénombrable d'ensembles μ -intégrables) alors Ω_c^p est quasi-tonnelé si et seulement s'il est σ -quasi-tonnelé.

Preuve. - Elle résulte du lemme (2.2).

Un espace (DF) étant un elc d-quasi-tonnelé qui possède une base dénombrable de parties bornées, il est naturel de se demander dans quel cas Ω_C^P possède cette propriété.

(2.4) PROPOSITION. - *S'il existe dans Ω_C^P une base dénombrable de parties bornées, alors $\mathfrak{X}$ est réunion d'un ensemble de Weierstrass et d'un ensemble localement négligeable.*

En laissant la démonstration à la sagacité du lecteur, on en déduit le résultat suivant :

(2.5) THEOREME. - *Si toute partie de Weierstrass de $c\mathfrak{X}$ est μ -bornée (par exemple lorsque $\mathfrak{X}$ est lui-même μ -borné), alors Ω_C^P est un espace (DF) si et seulement si $\mathfrak{X}$ est compact localement presque partout.*

Preuve. - Avec la proposition (2.4), elle résulte du théorème (2.1).

3. - LES CONDITIONS DE TONNELAGE.

Un elc E est dit σ -tonnelé (resp. d-tonnelé) si toute suite faiblement bornée de E' est équicontinue (resp. si toute partie faiblement bornée de E' , réunion dénombrable de parties équicontinues, est équicontinue).

Le théorème suivant relie ces deux notions, pour le cas d'un espace Ω_C^P :

(3.1) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est σ -tonnelé.
- (b) $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est d-tonnelé.
- (c) $(\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu))'_\sigma$ est semi-complet.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (b) : On utilise le lemme (2.2) et la méthode décrite dans la démonstration du théorème (2.1).

(c) $\Rightarrow$ (a) : Soit A une partie μ -bornée de $\mathfrak{X}$. Il existe une fonction $g \in \Omega_C^q(\mathfrak{X}, \mu)$ telle que l'on ait $\mu_A |fg| < +\infty$ pour toute $f \in \Omega_C^P$. Soit (K_n) une suite croissante de parties compactes de A telles que $A = \bigcup_n K_n$ l.p.p. ; $\mu_A |fg| = \sup_n \mu_{K_n} |fg|$ pour toute $f \in \Omega_C^P$. Il en résulte sans difficulté que la suite $(u_n = \mu_{K_n} \cdot |g|)$ est de Cauchy dans $(\Omega_C^P)'_\sigma$, donc converge vers une mesure $u \in (\Omega_C^P)'_\sigma$, et l'on montre facilement que A est inclus l.p.p. dans le support de u . Toute partie A μ -bornée est donc incluse l.p.p. dans un compact de $\mathfrak{X}$, et par conséquent $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est σ -quasi-

tonnelé (avec le théorème (2.1)). Pour conclure, il suffit de remarquer que tout tonneau T de $(\Omega_C^P)'$ étant bornivore, il en est de même pour tout tonneau de Ω_C^P , ou encore que toute partie faiblement bornée de $(\Omega_C^P)'$ est fortement bornée.

(a) $\Rightarrow$ (c) : évident.

Dans le cas où la prémesure μ est quelconque, on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante (portant sur $(\mathfrak{X}, \mu)$) pour que $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ soit σ -tonnelé, et le seul résultat positif reste le théorème de Nielsen qui se démontre, dans le cas compactologique, de la même manière que dans (8). Citons-le pour mémoire.

(3.2) THEOREME (NIELSEN). - Si toute partie de Weierstrass de $c\mathfrak{X}$ est compacte (à un ensemble localement négligeable près), alors $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est tonnelé.

Remarque. - Si la prémesure μ est compactologique (6), par exemple lorsque $\mathfrak{X} = \gamma T$, avec T localement compact, l'espace $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est alors complet et les trois conditions du théorème (3.1) sont encore équivalentes à celles du théorème (2.1).

Remarque. - Si la prémesure μ est σ -bornée, alors les conditions du théorème (2.1) sont équivalentes au fait que $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est tonnelé.

4. - UNE CONDITION SUR $(\mathfrak{X}, \mu)$ POUR QUE $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ SOIT ULTRABORNOLOGIQUE.

Dans ce chapitre, $\mathfrak{X}$ est un espace compactologique régulier et μ une mesure bornée sur $\mathfrak{X}$. On sait alors que μ s'identifie à une mesure sur $\beta\mathfrak{X}$ (compactifié de Stone-Čech de $c_R\mathfrak{X}$, qui est l'espace $\mathfrak{X}$ muni de la plus fine topologie complètement régulière compatible avec ses compacts) concentrée sur $\mathfrak{X}$. Cette propriété va permettre de définir (par analogie avec les travaux de (4)) la notion d'appui d'un disque de Ω_C^P par l'intermédiaire duquel on donnera des conditions portant sur $\mathfrak{X}$ pour que Ω_C^P soit ultrabornologique. Par abus de notation, on désignera encore par μ la prémesure image $i(\mu)$ par l'injection canonique $i : \mathfrak{X} \rightarrow \beta\mathfrak{X}$.

La notion d'appui.

(4.1) THEOREME. - Soit D un disque de $\Omega_C^P(\mathfrak{X}, \mu)$ contenant $\Delta = \{f \in L^P(\mathfrak{X}, \mu) ; N^P(f) \leq 1\}$. Il existe un plus petit compact $K(D) \subset \beta\mathfrak{X}$ (appelé appui de D) tel que la condition $\mu_{K(D)} |f^*|^P < 1$ implique $f \in D$.

Preuve. - Soit $\mathfrak{F}$ la famille des compacts de $\beta\mathfrak{X}$ vérifiant cette propriété. La condition $D \supset \Delta$ impliquant $\beta\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ n'est pas vide. Montrons que $\mathfrak{F}$ est stable par intersection finie. En effet, soient K et K' deux éléments de $\mathfrak{F}$ et K'' leur

intersection. Considérons maintenant une fonction $f \in \Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$ telle que $\mu_{K''} |f^\circ|^p < 1$. On construit deux fonctions g et h de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g^\circ &= f^\circ \text{ sur } K'' & h^\circ &= f^\circ \text{ sur } K'' \\ g^\circ &= 0 \text{ sur } K' \setminus K & h^\circ &= 2f^\circ \text{ sur } K' \setminus K \\ g^\circ &= 2f^\circ \text{ ailleurs} & h^\circ &= 0 \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

D'une part, g et h appartiennent à $\Omega_c^p(\mathfrak{X}, \mu)$, d'autre part, $\mu_{K'} |g^\circ|^p < 1$ et $\mu_K |h^\circ|^p < 1$. Il en résulte que g et h appartiennent à D , donc $\frac{g+h}{2} = f$ également. Montrons pour terminer que $A = \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K$ est l'ensemble cherché : soit $f \in \Omega_c^p$ telle que l'on ait $\mu_A |f^\circ|^p = \alpha < 1$, d'où $f \cdot \varphi_A \in cD$ avec $\alpha < c < 1$. De plus la famille $\mathcal{F}$ étant filtrante décroissante, il existe un compact $K \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(|f^\circ|^p \cdot \varphi_{K \setminus A}) < (1-c)$ et par conséquent $(1 - \varphi_A) \cdot f \in (1-c)D$. Comme $f = (1 - \varphi_A)f + f \cdot \varphi_A$ appartient à $cD + (1-c)D = D$, le résultat est acquis.

Nous allons montrer maintenant que l'appui d'un disque bornivore de Ω_c^p contenant 2Δ est un compact du bidual $(c_{\mathbb{R}} \mathfrak{X})''$ (3). Pour cela il suffit d'établir que $K(D)$ est un compact de $\cup \mathfrak{X}$ (le replété de $c_{\mathbb{R}} \mathfrak{X}$). En effet, supposons ce dernier point acquis, cela implique que $B = K(D) \cap \mathfrak{X}$ est un borné topologique de $c_{\mathbb{R}} \mathfrak{X}$, donc son adhérence $\overline{B}^\beta$, prise dans $\beta \mathfrak{X}$, est un compact de $(c_{\mathbb{R}} \mathfrak{X})''$; comme $\mu_{K(D)} |f^\circ|^p = \mu_{\overline{B}^\beta} |f^\circ|^p$ pour toute fonction $f \in \Omega_c^p$, il est clair que $K(D) = \overline{B}^\beta$. La proposition suivante va permettre de conclure.

(4.2) PROPOSITION. - L'appui d'un disque bornivore D de Ω_c^p contenant 2Δ est un compact de $\cup \mathfrak{X}$.

Preuve. - Il est bien connu que pour tout point $a \in \beta \mathfrak{X} \setminus \cup \mathfrak{X}$ il existe une suite croissante d'ouverts (O_n) de $\beta \mathfrak{X}$ recouvrant $\mathfrak{X}$ et telle que, pour tout n , on ait $a \notin \overline{O_n}^\beta$. Le tout est alors conséquence du lemme suivant dont la démonstration suit celle du résultat similaire de (4).

(4.3) LEMME. - Soit (O_n) une suite croissante d'ouverts de $\beta \mathfrak{X}$ recouvrant $\mathfrak{X}$. Il existe alors un ouvert O_n tel que $K(D) \subset \overline{O_n}^\beta$.

Preuve. - Sinon, il existe une suite (f_n) telle que $\mu_{\overline{O_n}^\beta} |f_n^\circ|^p < 1$ et $f_n \notin D$. Comme D contient 2Δ , il est clair que la suite (g_n) définie par $g_n = 2f_n^\circ \times (1 - \varphi_{\overline{O_n}^\beta})$ n'appartient pas à D . Finalement, tout compact K de $\mathfrak{X}$ étant inclus dans l'un des ouverts (O_n) , la suite $n \times g_n$ est bornée dans Ω_c^p , donc absorbée par D , mais cela signifie qu'il existe un indice n_0 tel que $g_{n_0} \in D$, ce qui suffit.

On obtient ainsi le critère suivant :

(4.4) THEOREME. - Si toute partie fermée et bornée de $C_{\mathbb{R}}\mathfrak{X}$ est compacte à un ensemble localement négligeable près, alors $\Omega_c^P(\mathfrak{X}, \mu)$ est ultrabornologique.

Preuve. - Compte tenu du fait que la mesure μ est bornée sur $\mathfrak{X}$, donc que Ω_c^P est complet, le théorème est conséquence de la proposition (4.2).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) N. BLANCHARD - M. JOURLIN, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Publ. Dép. Math., Lyon, 6-2, 1969, p. 85-96.
- (2) H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.
- (3) H. BUCHWALTER, *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet, 9e année, 1969-1970, n° 14, 15 pages.
- (4) H. BUCHWALTER, *Sur le théorème de Nachbin-Shirota*, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p. 399-418.
- (5) L. GILLMAN - M. JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand (1960).
- (6) A. GOLDMAN, *Prémesures et mesures sur les espaces compactologiques*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 61-86.
- (7) L. NACHBIN, *Topological vector spaces of continuous functions*, Proc. Acad. Sc. USA, 40, 1954, p. 471-474.
- (8) N.J. NIELSEN, *Projective limits of L^P spaces*, Aarhus Universitet, May 1970.
- (9) T. SHIROTA, *On locally convex vector spaces of continuous functions*, Proc. Jap. Acad. Sc., 30, 1954, p. 294-298.

Anré GOLDMAN

Département de Mathématiques
Université LYON I
43, boulevard du Onze Novembre
69621-VILLEURBANNE