GÉRARD GALUSINSKI

Sur les espaces de suites à valeurs vectorielles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1973, tome 10, fascicule 2
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 101-153
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1973__10_2_101_0>

II$^{\text{ème}}$ - Coll. Anal. Fonct.
(1973, Bordeaux)
p. 101-153

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1973 t. 10-2

SUR LES ESPACES DE SUITES A VALEURS VECTORIELLES

par

Gérard GALUSINSKI (Bordeaux)

---o0o---

Nous introduisons une nouvelle classe d'espaces de suites à valeurs vectorielles dans le cadre des structures bornologiques (cf [8]). Dans une première partie, nous faisons une étude générale des propriétés bornologiques de ces espaces. Dans une seconde partie, nous établissons des propriétés de dualité, tant sur le plan bornologique que topologique. Nous ne traitons pas ici de façon particulière le cas des espaces réticulés.

PRELIMINAIRES

Les notations et terminologies sont celles de [8]. Dans toute la suite, Λ désignera un espace de suites réelles, idéal pour l'ordre de ω contenant φ l'ordre considéré étant toujours l'ordre naturel. Λ possède alors la propriété essentielle suivante : "pour tout y dans Λ et tout x tel que $|x| \leq |y|$ alors x est élément de Λ". Nous dirons alors (cf. [9]) que Λ est normal. Toutes les bornologies considérées sur Λ sont disquées solides séparées (cf. [1] et [8]). De ce fait, l'espace bornologique Λ est limite inductive bornologique séparée d'espaces normés solides.

Il en résulte aussi que l'injection naturelle de Λ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée. Par suite, pour toute suite $(x^{\nu})_{\nu}$ d'éléments de Λ tendant bornologiquement vers 0, la suite scalaire $(x_n^{\nu})_{\nu}$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$ pour tout entier n, en posant $x^{\nu} = (x_n^{\nu})_n$.

Exemples

- Tout espace parfait Λ (cf. [9]) muni de la bornologie faible dans la dualité (Λ, Λ^*), la bornologie faible étant alors solide.
- Tout idéal Λ de ω contenant φ, muni de sa bornologie de l'ordre (cf. [1]) (Pour la notation $B_{\omega}\Lambda$ cf. [5]).

Définition - On dira qu'un espace de suites bornologique satisfait la "condition LS" si toute suite (x_n) appartenant à Λ est limite bornologique de ses sections dans ${}^n\Lambda$.

Remarquons que si un espace Λ satisfait la condition LS, son dual bornologique $\Lambda^{\times}$ est contenu dans son dual de Koethe Λ^*. Par suite, si la bornologie de Λ est la bornologie faible dans la dualité (Λ, Λ^*), la condition LS implique l'égalité de $\Lambda^{\times}$ et de Λ^*. Il en est de même si Λ est un idéal de ω contenant φ muni de sa bornologie de l'ordre.

Par ailleurs, si la bornologie de Λ est une bornologie de Schwartz (cf. [8]), Λ satisfait nécessairement la condition L.S. En effet, toute suite (x_n) est limite de ses sections au sens de l'ordre (cf. [10]) donc aussi pour la convergence bornologique des que Λ est un ebc de Schwartz (cf. [5] prop. 3 p. 42).

Lorsque la bornologie de Λ est la bornologie de l'ordre, Λ satisfait la condition LS si et seulement si $B_{\omega}\Lambda$ est un ebc de Schwartz. Soit b un normé de Λ défini par un élément positif α de Λ ; b est l'ensemble des suites scalaires $\xi = (\xi_n)_n$ telles que $|\xi| \leq \alpha$. Λ satisfaisant la condition LS, il existe un élément positif β de Λ tel que la suite $S_N = \sum_{1\leq n\leq N} a_n e_n$ tende vers α dans Λ_{b_β} en désignant par b_β le borné pour l'ordre défini par β. Ceci exprime que les applications φ_N de Λ_{b_α} définies par $\varphi_N(\xi) = \sum_{1\leq n\leq N} \xi_n e_n$ tendent vers l'injection $I_{\alpha,\beta}$ de Λ_{b_α} dans Λ_{b_β}. En outre, $|I_{\alpha,\beta}(\xi) - \varphi_N(\xi)| \leq |I_{a,\beta}(a) - \varphi_N(a)|$ pour tout ξ dans b_α.

Donc, $I_{\alpha,\beta}$ est limite uniforme d'opérateur de rang fini, donc compact, ce qui achève la démonstration.

Notons encore que toute bornologie de Von Neumann d'un espace de suites parfait métrisable (ou de type $\mathcal{L}\mathcal{F}$ ou $\mathcal{D}\mathcal{F}$) satisfait la condition LS.

Signalons pour finir que tous les espaces considérés sont supposés réels.

---o0o---

- I - ESPACES DE SUITES GENERALISES PROPRIETES BORNOLOGIQUES.

Après avoir donné la définition des espaces $\Lambda(E)$ et en avoir fourni quelques propriétés (paragraphe 1), nous représentons ans le paragraphe 2 ces espaces comme produits tensoriels bornologiques complétés et en déduisons des propriétés de nucléarité. Enfin, dans un troisième paragraphe nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $\Lambda(E)$ soit un espace de Schwartz.

1 - DEFINITIONS. PROPRIETES ELEMENTAIRES.

E est un ebc séparé (cf. [8]) dont on désigne par $\mathcal{B}$ une base disquée de sa bornologie, tandis que $\mathcal{L}$ désigne une base disquée solide de la bornologie de Λ.

Définition 1.1 - L'espace de suites $\Lambda(E)$ est défini de la façon suivante : une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E appartient à $\Lambda(E)$ s'il existe un disque borné B de E tel que x_n soit absorbé par B pour tout n et que la suite scalaire $(p_B(x_n))_n$ soit élément de Λ (p_B désigne la jauge de B).

Il est clair que $\Lambda(E)$ est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

Pour tout disque borné B de E, on note P_B l'application de $\Lambda(E_B)$ dans Λ définie par $P_B((x_n)_n) = (p_B(x_n))_n$. L'application P_B possède les propriétés suivantes :

- $P_B(\lambda(x_n)_n) = |\lambda|\, P_B((x_n)_n)$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\forall (x_n)_n \in \Lambda(E)$

- $P_B((x_n)_n + (y_n)_n) \leq P_B((x_n)_n) + P_B((y_n)_n)$; $\forall ((x_n)_n, (y_n)_n) \in \Lambda(E) \times \Lambda(E)$

- $(P_B((x_n)) = 0) \Leftrightarrow ((x_n)_n = 0)$

Si E est un espace normé, on notera simplement P application précédente, en prenant pour B la boule unité de E.

On notera P_h les projections de $\Lambda(E)$ sur E :

$$P_h((x_n)_n) = x_h$$

et Q_h les injections de E dans $\Lambda(E)$:

$$Q_h(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$$ seule la coordonnée de rang h étant non nulle et égale à x.

On va définir sur $\Lambda(E)$ une bornologie vectorielle convexe séparée rendant bornées les projections P_h.

Définition 1.2 - On définit sur $\Lambda(E)$ une bornologie vectorielle convexe séparée de la façon suivante : une partie A de $\Lambda(E)$ est bornée s'il existe un borné B de E tel que A soit contenu dans $\Lambda(E_B)$ et $P_B(A)$ soit un borné de Λ.

Il est aisé de constater que cette définition est cohérente. Si E et Λ sont normés, de normes respectives p et q, $\Lambda(E)$ est un espace normé avec $\|(x_n)_n\| = q((p(x_n))_n)$. Ceci étant la définition usuelle donnée dans le cas topologique.

Exemples

- $\omega = \ell^p$; $\ell^p(E) = \{(x_n)_n$ tq $\exists$ $B \in \mathcal{B}\}$ et $(x_n) \subset E_B$ avec $\sum_n [p_B(x_n)]^p < +\infty$

- $\Lambda = \omega$; $\omega(E)$ est l'ensemble de toutes les suites $(x_n)_n$ de E absorbées par un borné de E. D'une façon générale, $\omega(E)$ ne désignera donc pas l'ensemble de toutes les suites $(x_n)_n$ de E.

- $\Lambda = \varphi$; $\varphi(E)$ est l'ensemble des suites de E dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.
- $\Lambda = c_o$; $c_o(E)$ est l'espace des suites qui convergent bornologiquement vers 0.
- $\Lambda = \ell^\infty$; $\ell^\infty(E)$ est l'espace des suites bornées de E.
- $\Lambda = s$ (où s désigne l'espace des suites scalaires à décroissance rapide) $s(E)$ est alors l'espace des suites à décroissance très rapide de E.

Notons $A(B,b) = P_B^{-1}(b)$, image réciproque de b dans E_B par l'application P_B, nous avons alors :

<u>Proposition 1.3 - $A(B,b)$ est un disque borné de $\Lambda(E)$ parcourant une base de bornologie de $\Lambda(E)$ lorsque B (resp. b) parcourt $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{b}$).</u>

Preuve : Soient $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ deux éléments de $A(B,b)$; λ et μ deux scalaires tels que $|\lambda|+|\mu| \leq 1$. On a :

$$P_B(\lambda x + \mu y) \leq |\lambda| P_B(x) + |\mu| P_B(y)$$

b étant disqué $|\lambda| P_B(x) + |\mu| P_B(y)$ appartient à b, et donc aussi $P_B(\lambda x + \mu y)$ car b est solide.

Par ailleurs, $P_B(A(B,b))$ est inclus dans b, donc par définition $A(B,b)$ est borné. D'autre part, si A_o est un borné de $\Lambda(E)$, il existe un borné B de E tel que $P_B(A_o)$ soit inclus dans un borné b de Λ, donc A_o est inclus dans $P_B^{-1}(b) = A(B,b)$.

Remarquons aussi que si $A = A(B,b)$ alors, $[\Lambda(E)]_A = \Lambda_b(E_B)$ et $p_A((x_n)_n) = p_b((p_B(x_n))_n)$ pour tout x appartenant à $[\Lambda(E)]_A$.

Nous donnons maintenant quelques propriétés de stabilité.

Lemme 1.1 - Soient E_1 et E_2 deux ebc, f une application linéaire bornée de E_1 dans E_2. L'application $\bar{f}$ de $\Lambda(E_1)$ dans $\Lambda(E_2)$ définie par $\bar{f}((x_n)) = (f(x_n))_n$ est bornée. En outre, $\bar{f}$ est injective dès que f l'est.

Preuve : Soit $(x_n)_n$ un élément de $\Lambda(E_1)$. Il existe un disque borné B_1 de E_1 tel que (x_n) soit incluse dans $E_{1_{B_1}}$ avec $(p_{B_1}(x_n))_n$ élément de Λ.

f étant bornée, $f(B_1)$ est contenu dans un disque borné B_2 de E_2. Par suite, $(f(x_n))_n$ est absorbée par B_2. Par ailleurs,

$$(p_{B_2}(f(x_n)))_n \leq (p_{B_1}(x_n))_n$$ donc la suite $(f(x_n))_n$ appartient à $\Lambda(E_2)$.

De même, la bornologie de Λ étant solide, l'image par $\bar{f}$ d'un borné de $\Lambda(E_1)$ est bornée dans $\Lambda(E_2)$.

Proposition 1.4 - Si $E = \varinjlim_{i \in I} (E_i, \eta_{ij})$, alors $\Lambda(E) = \varinjlim_{i \in I} (\Lambda(E_i), \bar{\eta}_{ij})$, les limites inductives étant prises au sens bornologique.

Preuve : Le lemme précédent montre que le système $(\Lambda(E_i), \bar{\eta}_{ij})$ est un système inductif. Il suffit alors de vérifier l'égalité algébrique et bornologique.

Lemme 1.2 - Soient Λ_1 et Λ_2 deux espaces de suites, tels que Λ_1 soit contenu dans Λ_2, l'injection de Λ_1 dans Λ_2 étant bornée, alors $\Lambda_1(E)$ est contenu dans $\Lambda_2(E)$, l'injection étant bornée.

Proposition 1.5 - Si $\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$, où les Λ_i forment un système filtrant avec $\Lambda = \varinjlim \Lambda_i$ alors $\Lambda(E) = \varinjlim \Lambda_i(E)$ algébriquement et bornologiquement.

Corollaire - Pour tout ebc E, l'espace $\Lambda(E)$ est algébriquement et bornologiquement égal à la limite inductive des $\Lambda_b(E_B)$ où b (resp. B) parcourt $\mathfrak{b}$ (resp. $\mathfrak{B}$).

Proposition 1.5 - Une suite $x^{(\nu)}$ d'éléments de $\Lambda(E)$ $(x^{(\nu)} = (x_n^{(\nu)})_n)$ tend bornologiquement vers 0 dans $\Lambda(E)$ si et seulement si, il existe un borné B de E tel que x^{ν} soit élément de $\Lambda(E_B)$ pour tout entier ν et que la suite $P_B(x^{(\nu)})$ tende vers 0 dans Λ.

Preuve : Si $x^{\nu} \xrightarrow{M} 0$, x^{ν} appartient à $\alpha_\nu A$ où A est un borné de $\Lambda(E)$ et (α_ν) une suite scalaire décroissante tendant vers 0 donc $P_B(x^{\nu}) \in P_B(\alpha_\nu A) = \alpha_\nu P_B(A) = \alpha_\nu b$ avec $A = A(B,b)$. Réciproquement, $P_B(x^{\nu}) \in \alpha_\nu b$ donc $x^{\nu} \in \alpha_\nu A(B,b)$.

Corollaire 1 - Pour toute suite $\nu \to (x^{\nu})$ tendant bornologiquement vers 0 dans $\Lambda(E)$, la suite $(x_n^{\nu})_\nu$ tend bornologiquement vers 0 dans E pour tout entier n.

En effet, il existe un borné B de E tel que la suite (x^{ν}) soit absorbée par $\Lambda(E_B)$, la suite $(p_B(x^{\nu}))_\nu$ tendant vers 0 dans Λ. Donc pour tout n, la suite $(p_B(x_n^{\nu}))_\nu$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 2 - Pour tout ebc séparé E l'espace $\Lambda(E)$ satisfait la condition LS si et seulement si Λ la satisfait.

Démonstration : Soit $(x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$. Posons $S_N = (x_1,\ldots,x_N, 0,\ldots)$. Il existe un borné B de E tel que (x_n) soit élément de $\Lambda(E_B)$ et donc aussi S_N pour tout entier N.

$P_B((x_n) - S_N) = (0,\ldots,0, p_B(x_{n+1}),\ldots)$. Si Λ satisfait la condition LS, la suite $P_B((x_n) - S_N)$ tend vers 0 dans Λ donc (cf. prop. 1.5) la suite S_N tend vers $x = (x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$. Réciproquement, soit x_o un élément non nul de E ; Soit $\alpha = (\alpha_n)$ un élément de Λ, $S_N = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, \dots)$; $x = (\alpha_n x_o)$ et $S_N = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$. Par hypothèse S_N tend vers x dans $\Lambda(E)$, donc il existe un borné B de E que l'on peut choisir contenant x_o tel que $P_B(x - S_N)$ tend vers 0 dans Λ. $P_B(x - S_N) = |\alpha - S \quad p_B(x_o)$, la valeur absolue étant prise au sens de l'ordre dans Λ. Par s .te, $|\alpha - S_N|$ tend vers 0 dans Λ, donc aussi $(\alpha - S_N)$.

Proposition 1.6 - Les projections P_h sont linéaires surjectives bornées.

En effet, soit $A(B, b)$ un élément de la base de bornologie de $\Lambda(E)$. π_n étant bornée $\pi_h(P_B(A))$ est bornée dans $\mathbb{R}$ or, $\pi_h \circ P_B = p_B \circ P_h$; donc $p_B(P_h(A))$ est bornée dans $\mathbb{R}$ soit $P_h(A)$ est bornée dans E_B.

Corollaire - Pout tout h, $P_h^{-1}(E)$ est un sous-espace vectoriel M-fermé de $\Lambda(E)$.

Proposition 1.7 - E est isomorphe (d'une infinité de façons) à un sous-espace vectoriel M-fermé de $\Lambda(E)$.

Preuve : Soit $I : E \to \Lambda(E)$; $I(x) = (x, 0, 0, \dots)$ I est une application linéaire injective.

a) Soit B un borné de E. $I(B)$ est inclus dans $\Lambda(E_B)$. En outre, $0 \leq P_B(I(x)) \leq e_1$ pour tout x dans B donc I est une application bornée.

b) $I^{-1}{}_{/ImI} = P_1{}_{/ImI}$ où P_1 est bornée. Il en résulte que E et ImI sont isomorphes bornologiquement.

c) $ImI = \bigcap_{h \geq 1} P_h^{-1}(0)$ donc ImI est M-fermé dans $\Lambda(E)$.

Proposition 1.8 - Si F est un sous-espace vectoriel bornologique (M-fermé) de E, alors $\Lambda(F)$ est un sous espace vectoriel bornologique (M-fermé) de $\Lambda(F)$.

<u>Preuve</u> : L'injection de $\Lambda(F)$ dans $\Lambda(E)$ est naturellement bornée. Si A_o est un borné de $\Lambda(F)$, F étant relatif dans E, il existe un borné disqué B de E tel que A_o est inclus dans $\Lambda(F_{B\Lambda F})$ et $P_{B\Lambda F}(A_o) = b$ où b est un borné de Λ. Il est clair que A_o peut être choisi égal à $P^{-1}_{B\Lambda F}(b)$. Dans ces conditions, le borné $A(B,b)$ de $\Lambda(E)$ a une intersection avec $\Lambda(F)$ contenue dans A_o donc $\Lambda(F)$ est un sous espace bornologique de $\Lambda(E)$.
Supposons que F soit M-fermé dans E. Soit $(x^{\nu})_{\nu}$ une suite d'éléments de $\Lambda(F)$ tel que $(x^{\nu})_{\nu}$ converge bornologiquement vers $x = (x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$. Le corollaire 1 de la proposition 1.4 montre que pour tout n la suite $(x^{\nu}_n)_{\nu}$ tend vers x_n dans E. Il en résulte que x_n est élément de F pour tout n. Par ailleurs, F étant relatif dans E $(x_n)_n$ est alors élément de $\Lambda(F)$.

<u>Proposition 1.9 - Λ est bornologiquement isomorphe à un sous espace M-fermé de $\Lambda(E)$.</u>

<u>Preuve</u> : A tout élément x_o non nul de E associons l'application φ_{x_o} de Λ dans $\Lambda(E)$ définie par $\varphi_{x_o}((\alpha_n)) = (\alpha_n x_o)_n$. L'application φ_{x_o} est injective. Si B est un borné disqué de E contenant x_o, $\varphi_{x_o}(\Lambda) \subset \Lambda(E_B)$. Pour tout borné b de Λ, $\varphi_{x_o}(b)$ est inclus dans $A(B,b)$, donc φ_{x_o} est bornée. Réciproquement si $A(B,b)$ est un borné de $\Lambda(E)$ $(x_o \in B)$, si $\varphi_{x_o}((\alpha_n))$ appartient à $A(B,b)$ alors $(|\alpha_n|)_n$ est dans

$\frac{1}{p_B(x_o)}\, b$. b étant solide, $A(B,b) \cap \varphi_{x_o}(\Lambda)$ est inclus dans $\frac{1}{p_B(x_o)}\, b$.

Donc φ_{x_o} est un isomorphisme bornologique sur $\varphi_{x_o}(\Lambda)$.

Par ailleurs, si $(\alpha^{\nu})_{\nu}$ est telle que $\{\varphi_{x_o}(\alpha^{\nu})\}_{\nu}$ tend vers $x = (x_n)$ dans $\Lambda(E)$, pour tout entier n la suite $\{\varphi_{x_o}(\alpha^{\nu}_n)\}_{\nu}$ tend vers x_n dans E soit $\{\alpha^{\nu}_n x_o\}_{\nu}$ converge bornologiquement vers x_n dans E.

E étant séparé x_n est égal à $\alpha_n x_o$ et la suite $\{(\alpha^\nu_n)\}_\nu$ tend vers (α_n) dans Λ $(\alpha_n)_n$ étant élément de Λ. C.Q.F.D.

Donnons maintenant des conditions de complétitude sur l'espace $\Lambda(E)$.

__Lemme 1.3 - Λ étant un espace solide complet et $\Lambda(E)$ un Banach, l'espace normé $\Lambda(E)$ est un Banach.__

__Preuve__ : Désignons par p la norme de E et par q celle de Λ qui est solide. Soit $\nu \to x^\nu$ une suite de Cauchy dans $\Lambda(E)$ $x^\nu = (x^\nu_n)_n$ pour tout ν. Pour tout h, l'application P_h est linéaire continue de $\Lambda(E)$ dans E, donc pour tout n la suite $(x^\nu_n)_\nu$ est de Cauchy dans E. E étant complet, $\{x^\nu_n\}_\nu$ admet une limite x_n dans E quand $\nu \to +\infty$. Le problème est de montrer que $(x_n)_n$ appartient à $\Lambda(E)$ et que $\{(x_n^\nu)_n\}_\nu$ converge vers (x_n) dans $\Lambda(E)$. q étant une semi norme solide, l'application P de $\Lambda(E)$ dans Λ vérifie :

$$|q(P(x)) - q(P(y))| \leq q\,[P(x-y)]\ ;\ \forall (x,y) \in \Lambda(E) \times \Lambda(E)\,.$$

La suite $\{P(x^\nu)\}_\nu$ est donc de Cauchy dans Λ. Donc, il existe un élément $\alpha = (\alpha_n)_n$ de Λ tel que $P(x^\nu)$ tende vers α. Il en résulte que pour tout n, la suite $\{p(x^\nu_n)\}_\nu$ tend vers α_n dans Λ donc $\alpha_n = p(x_n)$ et par suite $(x_n)_n$ est bien un élément de $\Lambda(E)$. Il suffit alors de raisonner sur la suite $\{y^\nu\}_\nu$ où $y^\nu = x^\nu - x$ qui est de Cauchy dans $\Lambda(E)$ pour constater que x^ν tend vers x dans $\Lambda(E)$.

__Proposition 1.10 - L'ebc $\Lambda(E)$ est complet si et seulement si les ebc Λ et E sont complets.__

Preuve :

a) E (resp. Λ) étant isomorphe (cf. prop. 1.7 et 1.9) à un sous espace M-fermé de $\Lambda(E)$ est complet dès que $\Lambda(E)$ est complet.

b) Λ étant un ebc solide complet possède une base de bornologie formée de disques complétants solides, donc Λ est la limite inductive bornologique d'espaces de Banach solides Λ_i, de même E est la limite inductive bornologique de Banach E_j. Donc $\Lambda(E) = \varinjlim_{i,j} \Lambda_i(E_j)$. $\Lambda(E)$ est donc la limite inductive séparée d'ebc complets (lemme 1.3) donc $\Lambda(E)$ est un ebc complet (cf. [7]). C.Q.F.D.

Lorsque Λ est un ebc solide complet, E étant non complet il convient d'étudier le complété bornologique (cf. [7]) de $\Lambda(E)$.

Lemme 1.4 - Soit $P \subset N$ l'ensemble des indices p tels que $\alpha_p = 0$ pour tout élément $\alpha = (\alpha_n)_n$ de Λ. Si Λ peut être muni d'une norme solide complète q, il existe dans Λ un élément $(\alpha_n)_n$ tel que α_n est non nul pour tout n à l'extérieur de P.

Dans l'étude générale des espaces de suites cette situation est à priori exclue, mais partant d'un espace Λ et le considérant comme limite inductive d'espace Λ_i, les espaces Λ_i peuvent être tels que l'ensemble P correspondant soit non vide.

Preuve : Par hypothèse, et l'espace Λ étant solide, pour tout entier p lors de P il existe un élément $(\alpha_n^p)_n$ de Λ tel que :

$$\begin{cases} \alpha_p^{(p)} \neq 0 \\ \alpha_n^{(p)} = 0 \text{ si } n \neq p \\ q(\alpha^{(p)}) = 1 \end{cases}$$

où q désigne une norme sur Λ, solide complète.

Considérons la suite $\beta^{(k)} = \sum_{\substack{1 \leq p \leq k \\ p \notin P}} \frac{1}{2^p} \alpha^{(p)}$

La suite $k \to \beta^{(k)}$ est de Cauchy dans Λ car

$$q(\beta^{(k+\rho)} - \rho^{(k)}) = q\left(\sum_{\substack{k < p \leq k+\rho \\ p \notin P}} \frac{1}{2^p} \alpha^{(p)}\right) \quad \text{donc}$$

$$q(\beta^{(k+\rho)} - \beta^{(k)}) \leq \frac{1}{2^k} \quad . \text{ Par suite } \{\beta^{(k)}\}_k \text{ converge vers un}$$

élément α de Λ dans Λ. Λ étant solide, pour tout n : $\alpha_n = \lim\limits_{k \to +\infty} \beta_n^{(k)}$.

Si n n'appartient pas à P, dès que k est supérieur ou égal à n, $\alpha_n = \frac{1}{2^n} \beta_n^{(n)} \not\geq 0$. Donc, pour tout n dans le complémentaire de P α_n est non nul.

Lemme 1.5 - Si Λ est un Banach solide, E un espace normé, le complété $\Lambda(\hat{E})$ de $\Lambda(E)$ est algébriquement et topologiquement égal à $\Lambda(E)$.

Preuve : On sait que $\Lambda(\hat{E})$ est complet et que $\Lambda(E)$ est un sous espace de $\Lambda(\hat{E})$ puisque E est un sous espace de $\hat{E}$. Il suffit donc de montrer que $\Lambda(E)$ est dense dans $\Lambda(\hat{E})$. Soit $(x_n)_n$ un élément de $\Lambda(\hat{E})$, ε un réel positif. En désignant par P l'ensemble des indices p tels que $\alpha_p = 0$ pour tout (α) dans Λ, le lemme 1.4 montre qu'il existe un élément (α_n) de Λ tel que α_n soit non nul pour tout $n \notin P$. Puisque l'élément (x_n) appartient à $\Lambda(\hat{E})$, la suite scalaire $(p(x_n))_n$ est dans Λ, si donc n appartient à P, $p(x_n) = 0$ donc x_n est nul et par suite x_n appartient à E. E étant dense dans $\hat{E}$, pour tout entier n hors de P, il existe un élément y_n de E tel que $p(x_n - y_n) \leq \varepsilon\, \alpha_n \frac{1}{q(\alpha)}$ car alors α_n est non nul. En posant $y_n = x_n$ si n est dans P, on voit que pour tout n, il existe y_n dans E avec $p(x_n - y_n) \leq \varepsilon\, \alpha_n \frac{1}{q(\alpha)}$.

Alors 1) $p(y_n) \leq p(x_n) + p(y_n - x_n) \leq p(x_n) + \frac{\varepsilon}{q(\alpha)} \alpha_n$ donc $(y_n)_n$ appartient à $\Lambda(E)$. (Λ est normal).

2) $q(p(x_n - y_n)) \leq q((\varepsilon \alpha_n)_n) \frac{1}{q(\alpha)} = \varepsilon$. Donc, $\Lambda(E)$ est dense dans $\Lambda(\hat{E})$. C.Q.F.D.

<u>Lemme 1.6</u> - Si Λ est un ebc complet, E un ebc séparé, alors le quasi complété (cf. [7]) de $\Lambda(E)$ est algébriquement et bornologiquement égal à $\Lambda(\check{E})$ où $\check{E}$ est le quasi complété de E.

<u>Preuve</u> : $\Lambda = \varinjlim_{j \in J} \Lambda_j$ où les Λ_j sont des Banach solides.

$E = \varinjlim_{i \in I} E_i$ où les E_i sont des espaces normés.

Le lemme 1.5 montre que $\Lambda_j(\widehat{E_i}) = \Lambda_j(\hat{E_i})$. Or,

$\Lambda(E) = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j(E_i)$ donc $\Lambda(\check{E}) = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j(E_i) = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j(\hat{E_i})$

Soit $\check{\Lambda(E)} = \varinjlim_{i} \Lambda(\widehat{E_i}) = \Lambda(\varinjlim_{i} \hat{E_i}) = \Lambda(\check{E})$.

<u>Proposition 1.11</u> - <u>Λ étant complet, si E à la propriété de concordance faible des normes (cf. [7] et [8]), alors le complété bornologique $\widetilde{\Lambda(E)}$ de $\Lambda(E)$ est algébriquement et bornologiquement égal à $\Lambda(\tilde{E})$.</u>

<u>Preuve</u> : Si E à la propriété de concordance faible des normes alors $\tilde{E} = \check{E}$ algébriquement et bornologiquement, donc $\Lambda(\check{E}) = \Lambda(\tilde{E})$, $\check{E}$ étant alors séparé $\Lambda(\check{E})$ est séparé, donc $\Lambda(\check{E}) = \widetilde{\Lambda(E)} = \Lambda(\tilde{E})$.

<u>Proposition 1.12</u> - <u>Si E est un sous espace bornologique de $\tilde{E}$, alors $\Lambda(E)$ est un sous espace bornologique de son complété $\Lambda(\tilde{E})$.</u>

Preuve : E possède alors la propriété de concordance faible des normes donc $\widetilde{\Lambda(E)} = \Lambda(\widetilde{E})$ (cf. prop. 1.11) . E étant par ailleurs un sous espace de son complété $\Lambda(E)$ est un sous espace de $\Lambda(\widetilde{E}) = \widetilde{\Lambda(E)}$ (cf. prop. 1.8).

2 - REPRESENTATION DE $\Lambda(E)$ COMME PRODUIT TENSORIEL BORNOLOGIQUE.

Proposition 2.1 - (i) L'espace vectoriel $\Lambda \otimes E$ peut être identifié (algébriquement) à un sous espace vectoriel de $\Lambda(E)$.

(ii) Si Λ satisfait la "condition LS", alors $\Lambda \otimes E$ est dense bornologiquement dans $\Lambda(E)$.

Preuve : La preuve de (i) est formellement analogue à celle de la p. 143 de [4] . Elle est aisée.

Si Λ satisfait la condition LS alors pour tout élément $(x_n)_n$ de $\Lambda(E)$, (x_n) est la limite bornologique de la suite $\{S_N\}_N$ où

$S_N = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$. Soit $S_N = \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} e_i \otimes x_i\right)$ en posant

$$\varphi\left(\sum_i \lambda^i \otimes x_i\right) = \left(\sum_i \lambda^i_n\, x_i\right)_n .$$

Définition 2.2 - Nous noterons $\Lambda \otimes_{\delta_b} E$ l'espace vectoriel $\Lambda \otimes E$ muni de la bornologie induite par $\Lambda(E)$.

$\Lambda \otimes_{\pi_b} E$ et $\Lambda \otimes_{\varepsilon_b} E$ désignent les produits tensoriels bornologiques décrits dans [8].

Il convient d'étudier la ν_b bornologie et montrer qu'elle satisfait aux conditions imposées par M. H. HOGBE-NLEND dans [8] pour la définition d'une bornologie tensorielle. On suppose à partir de maintenant que les ebc Λ et E sont complets.

Lemme 2.1.- E est la limite inductive bornologique des espaces normés E_i

Λ est la limite inductive bornologique des espaces normés Λ_j.

Soit φ l'application : $\Lambda \otimes E \to \Lambda(E)$ $\varphi(\Sigma\, \lambda^\rho \otimes x^\rho) = (\Sigma\, \lambda^\rho_n\, x^\rho)_n$.

Alors $\varphi(\Lambda \otimes E) \cap \Lambda_j(E_i) = \varphi(\Lambda_j \otimes E_i)$. pour tous les indices i et j.

Preuve : Soit $u = \sum_{1 \leq \rho \leq p} \lambda^\rho \otimes x^\rho$ tel que $\varphi(u)$ appartienne à $\Lambda_j(E_i)$.

Donc $\sum_{\rho=1}^{p} \lambda^\rho_n\, x^\rho$ est élément de E_i pour tout entier n, et

$(p_i(\sum_{\rho=1}^{p} \lambda^\rho_n\, x^\rho))_n$ appartient à Λ ; p_i désignant la norme de E_i. Il est clair que l'on peut supposer que les x^p et les λ^p forment des systèmes linéairement indépendants de E et Λ respectivement. On va montrer que tous les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont éléments de E_i, tandis que les éléments $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ appartiennent à Λ_j ce qui impliquera à fortiori le lemme 2.1, ce dernier résultat étant plus fort.

Le système $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^p\}$ étant linéairement indépendant, on peut extraire de la matrice

$$(\lambda^\rho_n)_{\substack{n \in N \\ 1 \leq \rho \leq p}} = \begin{pmatrix} \lambda^1_1 & \cdots & \lambda^p_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda^1_n & \cdots & \lambda^p_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

une matrice régulière d'ordre p.

Cette matrice est par exemple formée des lignes $n_1, \ldots, n_p$.

Nous pouvons alors écrire le système :

$$\begin{cases} \lambda^1_{n_1}\, x^1 + \ldots + \lambda^p_{n_1}\, x^p = y_{n_1} \\ \vdots \\ \lambda^1_{n_p}\, x^1 + \ldots + \lambda^p_{n_p}\, x^p = y_{n_p} \end{cases}$$

où les éléments y appartiennent à E_i par hypothèse.

où les x^ρ appartiennent à priori à E . Ce système est de Cramer, donc il est résoluble avec unicité des solutions. Pour tout ρ compris entre 1 et p x^ρ est alors combinaison linéaire des éléments $y_{n_1}, \dots, y_{n_p}$ donc <u>les éléments</u> $x^1, \dots, x^p$ <u>sont tous éléments de</u> E_i . Soit maint nant F le sous espace de <u>dimension finie</u> de E_i engendré par le systèm $\{x_1, \dots x_p\}$. Sur F toutes les normes sont équivalentes donc il existe une constante réelle positive K telle que pour tout p uplet $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ de $\mathbb{R}^p$ on ait l'inégalité :

$$p_i(\mu_1 x^1 + \dots + \mu_p x^p) \geq K \sup_{1 \leq \rho \leq p} |\mu_\rho|$$ (car l'expression du second membre est une norme). Dans ces conditions, pour tout entier n on a l'inégalité :

$$p_i(\lambda_n^1 x^1 + \dots + \lambda_n^p x^p) \geq K \sup_{1 \leq \rho \leq p} |\lambda_n^\rho| .$$

Or la suite $(p_i(\lambda_n^1 x^1 + \dots + \lambda_n^p x^p))_n$ appartient à Λ_j qui est un espace solide donc pour <u>tout p la suite</u> $(\lambda_n^\rho)_n$ <u>appartient à</u> Λ_j . C.Q.F.D.

<u>Proposition 2.2</u> - <u>L'espace bornologique</u> $\Lambda \otimes_{\partial_b} E$ <u>est algébriquement et bornologiquement isomorphe à la limite inductive bornologique des espaces</u> $\Lambda_j \otimes_{\partial_b} E_i$ <u>où</u> $\Lambda_j \otimes_{\partial_b} E_i$ <u>est muni de la bornologie induite par</u> $\Lambda_j(E_i)$. (donc normée).

<u>Preuve</u> : $\Lambda \otimes_{\partial_b} E$ est un sous espace bornologique de $\Lambda(\mathbf{E})$. $\Lambda(E)$ est un ebc complet donc aux normes faiblement concordantes.

Donc $\Lambda \otimes_{\partial_b} E = \underset{i,j}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}} [\Lambda_j(E_i) \cap \Lambda \otimes E]$ (cf. [7] prop. 9 chap. 1) où $\Lambda_j(E_i) \cap \Lambda \otimes E$ est muni de la norme induite par $\Lambda_j(E_i)$. Le lemme 2.1 montre que $\Lambda_j(E_i) \cap \Lambda \otimes E$ coïncide algébriquement avec $\Lambda_j \otimes E_i$ donc bornologiquement avec $\Lambda_j \otimes_{\partial_b} E_i$.

Lemme 2.2 - Soient Λ et E deux espaces normés, Λ étant toujours solide.

Alors la norme de $\Lambda \underset{\partial_b}{\otimes} E$ est une "cross norm". En fait,

$$\|\lambda \otimes x\|_\pi = \|\lambda \otimes x\|_\varepsilon = \|\lambda \otimes x\|_{\nu_b} \quad \text{pour tout } (\lambda, x) \in \Lambda \times E .$$

Preuve : On note q la norme de Λ, p celle de E.

$$\|\lambda \otimes x\|_\nu = q\,((p(\lambda_n x))_n) = q((|\lambda_n|\, p(x))_n) = p(x)\ q((\lambda_n)_n) .$$

Le reste découle des définitions.

La bornologie tensorielle ν_b est donc une bornologie satisfaisant aux conditions imposées par H. HOGBE NLEND dans [8].

Les propriétés de la norme projective π sur $\Lambda \otimes E$ montrent que Λ et E étant normés la norme π est plus fine que la norme ν_b.

Lemme 2.3 - Soient Λ et E deux espaces normés (Λ étant toujours solide)

La norme ν_b est plus fine que la norme ε sur $\Lambda \otimes E$.

L'injection étant de norme ≤ 1.

Preuve : Soit u un élément de $\Lambda \otimes E$. On sait que :

$$\|u\|_\varepsilon = \text{Sup}\left\{ \left|\sum_i \alpha'(\lambda^i)\,.\,x'(x^i)\right| \ ;\ u = \Sigma \lambda^i \otimes x^i \ ;\ \begin{array}{l} q'(\alpha') \leq 1 \\ p'(x') \leq 1 \end{array} \right\}$$

p désignant la norme de E ; q la norme (solide) de Λ, p' et q' les normes duales.

On a :

$$\left|\sum_i \alpha'(\lambda^i).\ x'(x^i)\right| = \left|\sum_i \alpha'(x'(x^i).\lambda^i)\right| = \left|\alpha'(\sum_i x'(x^i)\,\lambda^i)\right|$$

Par suite,

$$\left|\sum_i \alpha'(\lambda^i).x'(x^i)\right| \leq q\,(\sum_i x'(x^i)\,\lambda^i) \quad \text{car la norme de } \alpha' \text{ est}$$

inférieure ou égale à 1 dans Λ'. Or,

$$q(\sum_i x'(x^i)\,\lambda^i) = q((\sum_i x'(x^i)\,\lambda^i_n)_n) = q((x'(\sum_i \lambda^i_n\, x^i))_n) .$$

Puisque x' est de norme plus petite que 1, pour tout entier n on a l'inégalité

$$|x'(\sum_i \lambda_n^i x^i)| \leq p(\sum_i \lambda_n^i x^i).$$ La norme q étant solide,

$$q((x'(\sum_i \lambda_n^i x^i))_n) \leq q((p(\sum_i \lambda_n^i x^i))_n).$$

Puisque $u = \sum_i \lambda^i \otimes x^i$, $\|u\|_{\nu_b} = q((p(\sum_i \lambda_n^i x^i))_n)$.

Il en résulte donc :

$$|\sum_i \alpha'(\lambda^i).\, x'(x^i)| \leq \|u\|_{\nu_b}$$, pour toutes les représentations de u sous la forme $u = \sum_i \lambda^i \otimes x^i$ et pour les formes α' et x' de norme plus petite que 1. Soit $\underline{\|u\|_\varepsilon \leq \|u\|_{\nu_b}}$. C.Q.F.D.

En corollaire, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.3 - Soient Λ et E deux ebc. Sur $\Lambda \otimes E$ la bornologie ν_b est plus fine que la bornologie ε_b et moins fine que la bornologie π_b.

Preuve : Pour tout couple d'entiers (i,j) les identités suivantes sont bornées :

$$\Lambda_j \underset{\pi_b}{\otimes} E_i \longrightarrow \Lambda_j \underset{\nu_b}{\otimes} E_i \longrightarrow \Lambda_j \underset{\varepsilon_b}{\otimes} E_i$$ (lemme 2.3 et remarque suivant le lemme 2.2).

$$(\Lambda = \varinjlim_j \Lambda_j \; ; \; E = \varinjlim_i E_i).$$ Par ailleurs :

$$\Lambda \underset{\pi_b}{\otimes} E = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j \underset{\pi_b}{\otimes} E_i \; ; \; \Lambda \underset{\varepsilon_b}{\otimes} E = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j \underset{\varepsilon_b}{\otimes} E_i$$ (cf. [8]) et :

$$\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E = \varinjlim_{i,j} \Lambda_j \underset{\nu_b}{\otimes} E_i$$ (cf. prop. 2.2).

Le résultat annoncé en est la conséquence immédiate.

Remarque : La ν_b bornologie étant plus fine que la ε_b bornologie est donc à fortiori plus fine que la ε'_b bornologie (bornologie induite par la bornologie naturelle de $\mathrm{Hom}(E^\times, F^\times ; K)$ - cf. [7]. appelée ε_b bornologie dans [7].

On peut aussi le démontrer directement car la façon plus précise on a :

Propriété. - i) Soit $\beta \in \Lambda^\times$ et $a \in E^\times$ alors $\beta \otimes a$ est bornée sur $\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E$ avec $|(\beta\otimes a)(u)|\ p^o_B(a) \,.\, p^o_b(\beta)$ pour tout u dans $A(B,b) \cap \Lambda\otimes E$.

ii) Si S (resp. M) est un ensemble équiborné de $\Lambda^\times$ (resp. de $E^\times$) alors $S\otimes M$ est un ensemble équiborné de $[\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E]^\times$

Preuve : i) Soit $u = \Sigma\, \lambda^i \otimes x^i$ un élément de $A(B,b)$. On sait (lemme 2.1) que les λ^i (resp. les x^i) peuvent être choisis dans Λ_b (resp. E_B)

Alors $\|u\|_{\nu_b} = p_b\,((p_B(\sum_i \lambda^i_n\ x^i))_n) \leq 1$

$$(\beta_n \otimes a)\,(u) = \sum_i <\lambda^i, \beta><x^i, a> = <\sum_i <x^i, a>\lambda^i, \beta>$$

Et donc :

$$|(\beta_n \otimes a)\,(u)| \leq \beta^o_b(\beta)\ p_b\ (\sum_i < x^i, a > \lambda^i)$$

$$\sum_i <x_i, a>\lambda^i = (\sum_i < x^i, a> \lambda^i_n)_n = (<\sum_i \lambda^i_n\ x^i, a>)_n$$

Pour tout n : $|<\sum_i \lambda^i_n\ x^i, a>| \leq p^o_B(a)\ p_B\ (\sum_i \lambda^i_n\ x^i)$.

Vu que p_b est solide

$$p_b\,(\sum_i < x_i, a > \lambda^i) \leq p^o_B(a)\ p_b\,((p_B\,(\sum_i \lambda^i_n\ x^i))_n) = p^o_B(a)\ \|u\|_\nu$$

Soit : $|(\beta\otimes a)\,(u)| \leq p^o_B(a)\ p^o_b(\beta)$. C.Q.F.D.

ii) Conséquence immédiate de la formule démontrée au i).

Nous étudions maintenant le complété bornologique de l'espace $\Lambda \underset{\vee_b}{\otimes} E$ en cherchant à quelle condition il peut être égal à $\Lambda(E)$, Λ et E étant toujours supposés complets (cf. prop. 1.11 et 1.12).

<u>Proposition 2.4</u> - <u>Si Λ satisfait la condition LS, le complété $\Lambda \underset{\vee_b}{\widetilde{\otimes}} E$ de $\Lambda \otimes E$ est algébriquement égal à $\Lambda(E)$. En outre, la bornologie du complété $\Lambda \underset{\vee_b}{\widetilde{\otimes}} E$ est plus fine que celle de $\Lambda(E)$.</u>

<u>Preuve</u> : $\Lambda \underset{\vee_b}{\otimes} E$ est un sous espace bornologique de $\Lambda(E)$ qui est un ebc complet. Il existe donc une application linéaire bornée $\tilde{j}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \underset{\vee_b}{\otimes} E & \xrightarrow{i} & \Lambda \underset{\vee_b}{\widetilde{\otimes}} E \\ & {\scriptstyle j}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{j}} & \\ & \Lambda(E) & \end{array}$$

soit commutatif.

a) $\tilde{j}$ est une surjection. Soit (x_n) un élément de $\Lambda(E)$ alors $(x_n) = \operatorname{Lim}_N j(S_N)$ où $S_N = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes x^i$ appartient à $\Lambda \otimes E$.

$\{S_N\}$ est donc de Cauchy dans $\Lambda \underset{\vee_b}{\otimes} E$ donc $i(S_N) \to S$ dans $\Lambda \underset{\vee_b}{\widetilde{\otimes}} E$ et par suite $\tilde{j}(i(S_N))$ tend vers $\tilde{j}(S)$. Or $\tilde{j}(i(S_N)) = j(S_N)$. Soit $\tilde{j}(S) = (x_n)$.

b) $\tilde{j}$ est une injection. Soit $\tilde{j}(u) = 0$. Comme $\Lambda \underset{\vee_b}{\otimes} E$ est un ebc aux normes faiblement concordantes, il existe une suite $\{x^\nu\}$ dans $\Lambda \otimes E$ (cf. [7]) telle que $u = \operatorname{Lim}_\nu i(x^\nu)$. Donc

$\tilde{j}(u) = \tilde{j}(\operatorname{Lim}_\nu i(x^\nu)) = \operatorname{Lim}_\nu \tilde{j}(i(x^\nu)) = \operatorname{Lim}_\nu j(x^\nu)$. Soit $\operatorname{Lim}_\nu j(x^\nu) = 0$ dans $\Lambda(E)$

et par suite $\lim_{\nu} x^{\nu} = 0$ dans $\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E$ donc $u = \lim_{\nu} i(x^{\nu}) = i(\lim(x^{\nu})) = 0$.

La proposition 2.2 montre que $\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E = \underset{i,j}{\underrightarrow{\lim}}\ \Lambda_j \underset{\nu_b}{\otimes} E_i$ (limite inductive bornologique). $\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E$ étant un ebc aux normes faiblement concordantes alors $\Lambda \underset{\nu_b}{\tilde{\otimes}} E = \underset{i,j}{\underrightarrow{\lim}}\ \Lambda_j \hat{\otimes} E_i$. $\Lambda_j \underset{\nu_b}{\otimes} E_i$ est muni de la norme ν_b induite par $\Lambda_j(E_i)$ qui est un Banach donc $\Lambda_j \underset{\nu_b}{\hat{\otimes}} E_i$ est un sous espace topologique de $\Lambda_j(E_i)$ mais non nécessairement égal à $\Lambda_j(E_i)$. (Même si Λ possède la propriété LS , les espaces Λ_j ne la possèdent plus donc $\Lambda_j \otimes E_i$ n'est pas nécessairement dense dans $\Lambda_j(E_i)$).

Le problème est donc maintenant de déterminer des conditions pour que $\Lambda(E)$ soit bornologiquement égal à $\Lambda \underset{\nu_b}{\tilde{\otimes}} E$, complété bornologique de $\Lambda \underset{\nu_b}{\otimes} E$. Il faut donc que chaque $\Lambda_j(E_i)$ soit contenu dans un $\Lambda_\ell \underset{\nu_b}{\hat{\otimes}} E_k$; c'est à dire que pour tout couple d'entiers (j,i), il existe un couple (ℓ, k) tel que toute suite $(x_n)_n$ de $\Lambda_j(E_i)$ soit limite dans $\Lambda(E)$ d'une suite d'éléments de $\Lambda_\ell \otimes E_k$. Nous allons introduire une condition sur Λ permettant d'obtenir pour tout ebc E la propriété précédente.

<u>Définition 2.5</u> - <u>Soit Λ un ebc solide. Nous dirons que Λ est de "type L.S.U." on satisfait la "condition LSU" si pour tout borné b de Λ, il existe un borné b' de Λ tel que tout élément $(\lambda_n)_n$ de b soit limite de ses sections dans l'espace normé (complet)</u> $\Lambda_{b'}$.

Nous n'imposons pas que la convergence des $(\lambda_n)_n \in b$ soit uniforme dans $\Lambda_{b'}$.

De façon triviale, si Λ est normé ou si la bornologie de Λ est la bornologie de l'ordre la condition LS implique la condition LSU. La condition LSU sera également satisfaite si la bornologie de Λ est la bornologie de Von Neumann d'un elc métrisable de type μ, ou d'une façon plus précise si Λ est un ebc de Schwartz.

<u>Proposition 2.6</u> - <u>Pour tout ebc E, $\Lambda(E)$ satisfait la condition LSU si et seulement si Λ la satisfait.</u>

<u>Preuve</u> :

a) Soit (x_n) un élément de $A(B,b)$. Nous supposons que Λ satisfait la condition LSU. La suite scalaire $(p_B(x_n))_n$ est élément de Λ, donc il existe un borné b' de Λ contenant b de telle sorte que $(p_B(x_n))_n$ soit limite de ses sections dans $\Lambda_{b'}$. La suite $\sigma_\nu = (0,\ldots,0,p_B(x_\nu),p_B(x_{\nu+1}),\ldots)$ tend vers 0 dans $\Lambda_{b'}$ donc $\Sigma_\nu = (0,\ldots,0,x_\nu,x_{\nu+1},\ldots)$ tend vers 0 dans $\Lambda(E)_{A(B,b')}$. Le borné b' ne dépendant que de B et b, ceci achève la démonstration.

b) Réciproquement soit b un borné de Λ, x_o un élément non nul de E et B un borné disqué de E contenant x_o.

Pour tout élément (λ_n) de b, la suite $(\lambda_n x_o)_n$ appartient à $A(B,b)$. Il existe un borné $A(B',b')$ de $\Lambda(E)$ ne dépendant que de b tel que $(\lambda_n x_o)_n$ soit limite de ses sections dans $\Lambda(E)_{A(B',b')}$ donc la suite $(\lambda_n)_n$ est limite de ses sections dans b'.

Proposition 2.7 - Si Λ muni de sa bornologie solide b satisfait la condition LSU alors $\Lambda(E) = \Lambda \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{\nu_b} E$ algébriquement et bornologiquement.

Preuve : On sait déjà (prop. 2.4) que $\Lambda(E)$ est algébriquement égal à $\Lambda \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{\nu_b} E$ et que sa bornologie est moins fine que celle de $\Lambda \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{\nu_b} E$. Il suffit de montrer que tout borné A de $\Lambda(E)$ est borné dans $\Lambda \mathbin{\widetilde{\otimes}}_{\nu_b} E$.

Soit A (B, b) un borné de $\Lambda(E)$. A est inclus et borné dans $\Lambda_b(E_B)$. Soit $(x_n)_n$ un élément de A, la proposition 2.6 montre que $(x_n)_n$ est la limite dans $\Lambda_{b'}(E_{B'})$ de la suite $\{S_N\}$ avec $S_N = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$. Constatons que S_N est un élément de $\Lambda_{b'} \otimes E_{B'}$. En effet,

$$S_N = e_1 \otimes x_1 + \dots + e_i \otimes x_i + \dots + e_n \otimes x_n$$

Si l'élément x_i est non nul e_i est élément de $\Lambda_{b'}$ car $p_B(x_i)\, e_i$ est inférieure à $(p_B(x_1), \dots, p_B(x_N), 0, \dots)$ et donc $p_B(x_i)\, e_i$ est élément de $\Lambda_{b'}$ ($\Lambda_{b'}$ est solide).

Si l'élément x_i est nul $e_i \otimes x_i$ l'est aussi donc S_N est combinaison linéaire finie d'éléments de la forme $e_i \otimes x_i$ où les e_i sont éléments de $\Lambda_{b'}$.

$\Lambda_{b'} \otimes_{\nu_b} E'$ est relatif dans $\Lambda_{b'}(E')$ et $\{S_N\}_N$ converge dans $\Lambda_{b'}(E_{B'})$ donc $\{S_N\}_N$ est de Cauchy dans $\Lambda_{b'} \otimes_{\nu_b} E_{B'}$. Par suite $\{S_N\}_N$ converge dans $\Lambda_{b'} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\nu_b} E_{B'}$ vers un élément qui ne peut être que $(x_n)_n$.

(Unicité de la limite dans $\Lambda(E)$).

En résumé, tout borné $A(B, b)$ de $\Lambda(E)$ est contenu dans un $\Lambda_{b'} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\nu_b} E_{B'}$, et de façon plus précise tout élément de A est limite dans

$\Lambda_{b'} \hat{\otimes}_{\nu_b} E_{B'}$ <u>d'une suite d'éléments de</u> $A \cap (\Lambda_{b'} \otimes E_{B'})$.

Puisque A est à fortiori bornée dans $\Lambda_{b'}(E_{B'})$ et que $\Lambda_{b'} \otimes_{\nu_b} E'$ est relatif dans $\Lambda_{b'}(E_{B'})$, A est borné dans $\Lambda_{b'} \hat{\otimes}_{\nu_b} E'$ et donc dans $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$. $(\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E = \varinjlim_{b', B'} \Lambda_{b'} \hat{\otimes}_{\nu_b} E_{B'})$.

Ceci achève la démonstration.

En relation avec la nucléarité, la représentation tensorielle précédente nous fournit les propriétés suivantes :

<u>Proposition 2.8</u> - <u>Si l'un des deux ebc Λ ou E est nucléaire, alors les espaces</u> $\Lambda \tilde{\otimes}_{\pi_b} E$, $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$, $\Lambda \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$ <u>sont égaux algébriquement et bornologiquement.</u>

<u>Preuve</u> : Proposition 2.3 et [8] théorème 2 p. 78 .

<u>Corollaire</u> - i) Si Λ est un ebc nucléaire alors

$\Lambda(E) = \Lambda \tilde{\otimes}_{\pi_b} E = \Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E = \Lambda \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$ algébriquement et bornologiquement

ii) Si E est un ebc nucléaire et si Λ satisfait la condition LSU on a le même résultat.

<u>Preuve</u> : i) Si Λ est nucléaire, la bornologie de Λ est égale à la bornologie de l'ordre. En outre, Λ est alors un ebc de Schwartz donc satisfait la condition LS (voir les remarques préliminaires) et donc la condition LSU.

Le résultat provient alors des propositions 2.7 et 2.8.

ii) Propositions 2.7 et 2.8.

On peut alors donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda(E)$ soit un ebc nucléaire.

Proposition 2.9 - $\Lambda(E)$ est un ebc nucléaire si et seulement si Λ et E sont des ebc nucléaires.

Preuve :

a) Si $\Lambda(E)$ est nucléaire, Λ et E étant chacun bornologiquement isomorphe à un sous espace M fermé de $\Lambda(E)$ (prop. 1.7 et 1.9) sont des ebc nucléaires.

b) Le corollaire précédent montre que si Λ et E sont des ebc nucléaires, $\Lambda(E)$ est bornologiquement isomorphe à $\Lambda \otimes_{\pi_b} E$ qui est alors nucléaire (cf. [8]).

Nous montrerons ultérieurement que ce résultat permet d'obtenir le résultat analogue en topologie par des techniques de dualité.

Nous allons voir dans un cas simple que si Λ ne satisfait par la condition LSU, $\Lambda \widetilde{\otimes}_{\nu_b} E$ peut être strictement inclus dans $\Lambda(E)$.

Auparavant, nous montrons que si Λ est muni de la bornologie de l'ordre, la bornologie tensorielle ν_b est la plus fine des bornologies tensorielles raisonnables.

Proposition 2.10 - Λ est un espace de suites normal (non nécessairement parfait, ne satisfaisant pas non plus la condition LS).

Si Λ est muni de la bornologie de l'ordre, l'espace $\Lambda \widetilde{\otimes}_{\nu_b} E$ est bornologiquement isomorphe à $\Lambda \widetilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$.

Ce résultat est l'analogue d'un théorème démontré par A. Pietsch [12] et N. de Grande de Kimpe ([4]) dans le cas topologique.

<u>Preuve</u> : En vertu du lemme 3, il suffit de montrer que si Λ et E sont deux espaces normés, alors la bornologie ε_b est plus fine que la bornologie ν_b. Le résultat sera alors obtenu par limite inductive bornologique et passage au complété bornologique.

On note q la norme de Λ, p celle de E. q est alors définie de la façon suivante : il existe $\alpha = (\alpha_n)$ un élément positif de Λ tel que pour tout $\beta = (\beta_n)_n$ dans Λ, on ait

$$q(\beta) = \operatorname{Sup}_n \left(\frac{|\beta_n|}{\alpha_n}\right) \quad \text{(Avec la convention } \frac{0}{0} = 0\text{)}.$$

Soit alors A un borné de $\Lambda \otimes_{\varepsilon_b} E$. On a :

$$\left|\sum_i < \beta^i, \lambda' >. < x^i, x' >\right| \leq K \quad \text{où } K \text{ est une constante,}$$

pour toutes les représentations d'un élément x de A sous la forme $x = \sum_i \beta^i \otimes x^i$ et toutes les formes linéaires λ' et x' de norme ≤ 1.

Pour tout n, l'application λ'_n définie par $\lambda'_n(\beta) = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ (si α_n est non nul, sinon $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$) est linéaire et de norme inférieure ou égale à 1. Par suite,

$$\left|\sum_i \frac{\beta^i_n}{\alpha_n} < x^i, x' >\right| \leq K \text{ pour tout } n.$$

Il en résulte : $\left|< \sum_i \frac{\beta^i_n}{\alpha_n} x^i, x' >\right| \leq K$ pour tout x' de norme ≤ 1 dans E'. Ceci exprime que les sommes $\sum_i \frac{\beta^i_n}{\alpha_n} x^i$ sont uniformément bornées dans E. C'est à dire :

$$p\left(\sum_i \frac{\beta^i_n}{\alpha_n} x^i\right) \leq K \quad \text{pour tout } x = \sum_i \beta^i \otimes x^i \text{ élément de } A \text{ et}$$

tout n.

Soit encore :

$$\operatorname{Sup}_n \left\{ p\left(\sum_i \frac{\beta_n^i}{\alpha_n} x^i\right)\right\} \leq K \quad \text{qui peut s'écrire :}$$

$$\operatorname{Sup}_n \left\{\frac{1}{\alpha_n} p\left(\sum_i \beta_n^i x^i\right)\right\} \leq K . \qquad \text{Par suite :}$$

$$q \cdot p(x) = \operatorname{Sup}_n \left\{\frac{1}{\alpha_n} p\left(\sum_i \beta_n^i x^i\right)\right\} \leq K$$ Ce qui achève la démonstration. On constate même que l'isomorphisme préserve les normes.

On peut d'ailleurs montrer un résultat un petit peu plus général : le résultat de la prop. 2.10 est encore vrai si Λ est un sous espace bornologique d'un espace Λ_o muni lui de sa bornologie de l'ordre. Dans ces conditions, la bornologie de Λ n'est plus la bornologie de l'ordre.

<u>Remarques</u>

1) Soit $\Lambda = \ell^\infty$ muni de la bornologie usuelle qui est la bornologie de l'ordre. La proposition précédente montre que $\ell^\infty \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$ est bornologiquement isomorphe à $\ell^\infty \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$. Il est par ailleurs élémentaire de constater (voir par exemple [6]) que l'espace $\ell^\infty \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$ s'identifie aux <u>suites de E relativement compactes dans un</u> E_B . Par suite, $\ell^\infty \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$ est strictement contenu dans $\ell^\infty(E)$ d'une façon générale. Si E est normé, l'égalité ne peut avoir lieu que si E est de dimension finie. Si E est un ebc de Schwartz l'égalité a lieu. Si E est muni de la bornologie BE de Von Neumann d'un elcs E métrisable, l'égalité ne peut avoir lieu que si E est de type μ .

Cette remarque nous permet de donner une <u>condition nécessaire et</u>.

suffisante pour que $\Lambda(E)$ coïncide algébriquement avec $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$ si Λ est muni de la bornologie de l'ordre. En fait :

Λ étant muni de la bornologie de l'ordre, $\Lambda(E)$ coïncide avec $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de Λ telle que la suite $(\frac{x_n}{\alpha_n})_n$ soit relativement compacte dans un E_B.

2) Si $B_\omega \Lambda$ est un ebc de Schwartz, alors $\Lambda(E)$ est bornologiquement isomorphe à $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E$, bornologiquement isomorphe à $\Lambda \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$.

3) L'égalité $\Lambda \tilde{\otimes}_{\nu_b} E = \Lambda \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$ n'a pas nécessairement lieu si Λ n'est pas muni de sa bornologie de l'ordre. Par exemple, $\ell^1 \tilde{\otimes}_{\pi_b} E = \ell^1(E)$. Par suite $\ell^1(E)$ ne peut être isomorphe à $\ell^1 \tilde{\otimes}_{\varepsilon_b} E$ que si E est un ebc nucléaire.

3 - CRITERE DE SCHWARTZITE.

Nous donnons un critère de Schwartzité pour les espaces $\Lambda(E)$. Auparavant, prouvons le lemme suivant.

Lemme 3.1 - Soit Λ un espace normé solide, E un espace normé. Soient b un disque solide relativement compact dans Λ, B un disque relativement compact. Alors, A(B, b) est relativement compact dans $\Lambda(E)$, et récriproquement.

<u>Preuve</u> : Désignons par p la norme de E, U la boule unité fermée de E, p_B étant la jauge du borné B de E.

Notons que B est contenu dans un homothétique λU de U où λ est un réel strictement positif. Par suite

$$p(x) \leq \lambda p_B(x) \quad ; \forall x \in E_B$$

Soit $\{x^{(\nu)}\}_\nu$ une suite d'éléments de $A(B,b)$ où x^ν est l'élément $(x^\nu_n)_n$.

Par définition, pour tout ν la suite $(p_B(x_n^\nu))_n$ est un élément de b.

b est compact dans Λ donc y est borné. Il en résulte à fortiori que pour n fixé, la suite $\{p_B(x_n^\nu)\}_\nu$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Par suite, pour n fixé, $p_B(x_n^\nu) \leq C(n)$ pour tout entier ν. Soit encore, $x^\nu_n \in C(n)\,B$ pour tout ν. Or $C(n)\,B$ est compact dans E. Donc, pour tout n, on peut extraire une sous suite $p \to x^{\nu(p,n)}$ de $x^{(\nu)}$ telle que la suite $\{x_n^{\nu(p,n)}\}_p$ converge dans E.

On pourra donc, par un procédé diagonal, extraire une sous suite que l'on note encore $\{x^{(\nu)}\}_\nu$ telle que pour tout n, la suite $\{x^\nu_n\}_\nu$ converge vers un élément x_n de E.

Vu que $p(x^\nu_n) \leq \lambda\, p_B\,(x_n^\nu)$ pour tout couple d'entiers (n,ν), la suite $(p(x^\nu_n))_n$ est un élément de $\lambda\, b$ pour tout ν.

Il est clair que λb est compact dans Λ. Il existe donc une sous suite que l'on note encore $\{x^\nu\}_\nu$ telle que la suite $\nu \to (p(x^\nu_n))_n$ d'éléments de Λ converge dans Λ vers un élément $\alpha = (\alpha_n)_n$ de Λ.

Dans ces conditions la suite $\{p(x_n^\nu)\}_\nu$ tend vers α_n pour tout n donc $\underline{\alpha_n = p(x_n)}$.

Par suite <u>l'élément</u> $x = (x_n)_n$ <u>appartient à $\Lambda(E)$</u>.

Il reste à montrer que l'on peut trouver une sous suite de $\{x^\nu\}_\nu$ telle que x^ν tende vers x dans $\Lambda(E)$.

Considérons $y^\nu = x^\nu - x$ (ie $y^\nu_n = x^\nu_n - x_n$)

Pour tout n, la suite $\{y^\nu_n\}_\nu$ tend vers 0 dans E (cf. prop. 1.5 corol. 1).

Soit b_o un disque compact de Λ contenant $(\alpha_n)_n = (p(x_n))_n$.

Alors :

$$(p(x^\nu_n - x_n))_n \in \lambda\, b + b_o \quad \text{pour tout entier } \nu .$$

Or $\lambda b + b_o$ est encore compact dans Λ donc il existe une sous suite $\{x^\nu\}_\nu$ telle que $\{(p(x^\nu_n - x_n))_n\}_\nu$ tende vers (β_n) dans Λ.
Or, $\{p(x^\nu_n - x_n)\}_\nu$ doit tendre vers β_n, mais on sait que $\{p(x^\nu_n - x_n)\}_\nu$ tend vers 0 donc $\beta_n = 0$ pour tout n.

Par suite, $\{(p(x^\nu_n - x_n))_n\}_\nu$ tend vers 0 dans Λ. C.Q.F.D.

Réciproquement si $A(B,b)$ est relativement compact, si $\{(\alpha^\nu_n)_n\}_\nu$ est une suite de b, pour un point x_o non nul de B la suite $\{(\alpha^\nu_n x_o)_n\}_\nu$ est dans $A(B,b)$ donc il existe une sous suite $\{\alpha^\nu\}_\nu$ telle que $\{(\alpha^\nu_n x_o)\}_\nu$ soit convergente dans $\Lambda(E)$ donc $\{(\alpha^\nu_n)_n\}_\nu$ converge dans Λ. De même, soit $\{x^\nu\}_\nu$ est une suite d'éléments de B. Il existe un entier n tel que $e_n \in \lambda b$ (sinon b est vide). alors la suite $\{\frac{1}{\lambda} e_n \otimes x^\nu\}_\nu$ est dans $A(B,b)$ donc possède une sous suite convergente dans $\Lambda(E)$. La sous suite correspondante $\{x^\nu\}_\nu$ est alors convergente dans E ; ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant donner la proposition suivante :

Proposition 3.1 - $\Lambda(E)$ est un ebc de Schwartz si et seulement si les ebc Λ et E le sont.

Preuve : a) Une base de bornés de $\Lambda(E)$ étant formée des $A(B, b)$ il suffit de montrer que pour tout borné B de E et b de Λ il existe un borné B' (resp. b') de E (resp. de Λ) tel que $A(B, b)$ soit relativement compact dans $\Lambda(E)_{A(B', b')}$. L'espace normé $\Lambda(E)_{A(B', b')}$ est isométrique à $\Lambda_{b'}(E_{B'})$.

Si Λ (resp. E) est de Schwartz, b (resp. B) est relativement compact dans un $\Lambda_{b'}$ (resp. $E_{B'}$) ; de lemme 3.1 prouve alors que $A(B, b)$ est relativement compact dans $\Lambda(E)_{A(B', b')}$.

b) Réciproquement, si tout $A(B, b)$ est relativement compact dans un $\Lambda(E)_{A(B', b')} = \Lambda_{b'}(E_{B'})$ le lemme 3.1 montre que B (resp. b) est relativement compact dans $E_{B'}$ (resp. $\Lambda_{b'}$).

Ce résultat nous permettra dans la seconde partie de donner le résultat analogue en topologie après avoir démontré quelques propriétés de dualité.

---o0o---

- II - THEOREMES DE DUALITE

Nous commençons par rappeler la définition des espaces de suites à valeurs dans un espace vectoriel topologique (cf. [4]). Puis, nous faisons quelques remarques sur la comparaison des espaces définis dans le cas topologique et bornologique. Dans le paragraphe 2, nous établissons des théorèmes de dualité dont on donne deux applications dans le paragraphe 3.

1 - DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Lorsque E est un ebc (resp. un elcs), $E^{\times}$ (resp. E') désigne le dual bornologique (resp. topologique) de E, muni de la topologie naturelle - convergence uniforme sur les bornés de E - (resp. de la bornologie équicontinue).

Si Λ est un espace de suites réelles muni d'une topologie localement solide (cf. [1] et [9]) et si E est un elcs, $\Lambda_t(E)$ désigne l'espace des suites $(x_n)_n$ de E telles que pour toute semi norme p continue sur E, la suite scalaire $(p(x_n))_n$ soit un élément de Λ.

En outre, la topologie de $\Lambda_t(E)$ est définie par les semi normes $q \times p$ avec $q \times p\,((x_n)_n) = q((p(x_n))_n)$ où p (resp. q) est une semi norme contenue quelconque sur E (resp. solide continue sur Λ). Nous ne supposons pas dans cette définition que Λ soit un espace parfait ni que la topologie de Λ soit compatible avec la dualité (Λ, Λ^*).

La topologie sur Λ de la convergence uniforme sur les bornés pour l'ordre de Λ^* est notée $o(\Lambda, \Lambda^*)$. Pour tout disque borné B de E, on note $p_{\overset{o}{B}}$ la jauge du disque $\overset{o}{B}$ dans la dualité $(E, E^{\times})$ si E est un ebc, ou (E, E') si E est un elcs. Il est clair que pour un ebc E, les semi normes $p_{\overset{o}{B}}$ définissent la topologie de $E^{\times}$ lorsque B parcourt une base de la bornologie de E.

Rappelons que si E est un espace vectoriel réticulé, la semi norme p_{B^o} est solide dès que B est solide dans E (cf. [1]).

Pour finir, lorsque E est un ebc,

<u>$[\Lambda(E)]^*$ est l'espace des suites $(a_n)_n$ de $E^\times$ telles que pour tout élément $(x_n)_n$ de $\Lambda(E)$, la série $\sum_n |<x_n, a_n>|$ soit convergente.</u>

$[\Lambda(E)]^*$ est évidemment un espace vectoriel pour les lois usuelles. Ceci est la généralisation de la notion de dual de Koethe pour les espaces de suites à valeurs vectorielles.

Prenant un espace topologique E, on peut considérer les espaces $\Lambda_t(E)$ et $\Lambda(B\,E)$, où BE désigne l'espace E muni de sa bornologie de Von Neumann. Les <u>remarques</u> simples suivantes ont pour objet de comparer ces deux espaces :

<u>Remarque 1)</u> : L'espace $\Lambda(BE)$ est toujours contenu dans l'espace $\Lambda_t(E)$ et la bornologie de $\Lambda(BE)$ est plus fine que la bornologie de Von Neumann de $\Lambda(E)$.

Cette inclusion est en général stricte. Deux situations peuvent se produire :

a) une suite (x_n) de $\Lambda_t(E)$ peut n'être absorbée par aucun borné de BE. Il suffit de considérer par exemple $\omega_t(\mathbb{R}^N)$. Cependant,

b) Si Λ est inclus dans ℓ^∞, tout élément $(x_n)_n$ de $\Lambda_t(E)$ est absorbé par un borné de BE, mais peut ne pas appartenir à $\Lambda(BE)$. Si l'on considère $\mathcal{C}_o$, on sait bien que pour un elcs E, les suites topologiquement convergentes vers 0 ne sont pas en général toutes bornologiquement convergentes. Néanmoins l'égalité se produit si E est métrisable ou bien du type $\mathcal{LF}$ ou $\mathcal{DF}$. De même, en considérant ℓ^1 pour tout elcs E possèdant la propriété (B) de PIETSCH (cf. [11] p. 30) les espaces $\ell^1(BE)$ et $B(\ell^1_t(E))$ sont algébriquement et bornologiquement égaux.

Pour finir,

Remarque 2) : Si E est normé, les espaces $\Lambda(BE)$ et $B(\Lambda_t(E))$ sont algébriquement et bornologiquement égaux.

2 - THEOREMES DE DUALITE.

Proposition 2.1 - E étant un ebc séparé, les espaces $[\Lambda(E)]^*$ et $\Lambda_t^*(E^\times)$ sont égaux algébriquement.

En outre, une suite $(a_n)_n$ appartient à $[\Lambda(E)]^*$ si et seulement si, pour tout n, a_n est élément de $E^\times$ et tout borné disqué B de E la série $\sum_{n\geq 1} p_B(x_n)\, p_{\overset{\circ}{B}}(a_n)$ est convergente pour toute suite $(x_n)_n$ de $\Lambda(E_B)$.

Preuve : a) Soit $(a_n)_n$ un élément de $\Lambda_t^*(E^\times)$. Montrons que $(a_n)_n$ appartient à $[\Lambda(E)]^*$, c'est à dire que pour toute suite (x_n) de $\Lambda(E)$ la série $\sum_{n\geq 1} |<x_n , a_n>|$ est convergente.

Si $(x_n)_n$ est élément de $\Lambda(E)$, il existe un borné B de E tel que $(x_n)_n$ appartienne à $\Lambda(E_B)$ (cf. déf. I. 1.1.). Il est clair que, pour tout n, $|< x_n , a_n >| \leq p_B(x_n)\, p_{\overset{\circ}{B}}(a_n)$. La suite $(p_B(x_n))_n$ est dans Λ par définition de $\Lambda(E_B)$, tandis que $(p_{\overset{\circ}{B}}(a_n))_n$ est élément de Λ^*. Par définition du dual Λ^*, la série de terme général $p_B(x_n)\ p_{\overset{\circ}{B}}(a_n)$ est convergente et donc aussi la série $\sum_{n\geq 1} |< x_n , a_n >|$. Par suite, $\Lambda_t^*(E^\times)$ est inclus dans $[\Lambda(E)]^*$.

b) Soit $(a_n)_n$ un élément de $[\Lambda(E)]^*$. Il s'agit de montrer que pour tout borné disqué B de E, la suite scalaire $(p_{\overset{\circ}{B}}(a_n))_n$ est dans Λ^*.

Prouvons que pour tout élément $(\alpha_n)_n$ de Λ la série $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n| p_{B^o}(a_n)$

est convergente.

$$|\alpha_n| p_{B^o}(a_n) = p_{B^o}(|\alpha_n| a_n) = \sup_{x \in B} |< x, |\alpha_n| a_n >| \ ; \forall n .$$

Pour tout entier n , il existe un élément x_n de B tel que :

$$p_{B^o}(|\alpha_n| a_n) \leq |< x_n , |\alpha_n| a_n >| + \frac{1}{2^n} .$$

La suite $(|\alpha_n| x_n)_n$ est "absorbée" par B et $p_B(|\alpha_n| x_n) \leq |\alpha_n|$

donc $(|\alpha_n| x_n)_n$ appartient à $\Lambda(E_B)$ et par suite à $\Lambda(E)$. Il en résulte que (par définition de $[\Lambda(E)]^*$) la série

$\sum_{n\geq 1} |< x_n , |\alpha_n| a_n >|$ converge ; ce qui prouve que la série

$\sum_{n\geq 1} p_{B^o}(|\alpha_n| a_n)$ est aussi convergente. Donc $(p_{B^o}(a_n))_n \in \Lambda^*$.

Ceci achève la démonstration de la première partie de l'assertion. Le reste de la proposition est évident.

Dans la proposition 2.1, la bornologie de Λ n'intervient pas. Nous obtenons une représentation des espaces $\Lambda_t(E)$, où E est un elcs pourvu qu'il puisse être considéré comme dual bornologique d'un ebc.

<u>Proposition 2.2</u> - <u>Si la bornologie de Λ est telle que $\Lambda^\times \supset \Lambda^*$ alors, le dual bornologique de $\Lambda(E)$ contient</u> $[\Lambda(E)]^* = \Lambda_t^*(E^\times)$ <u>pour toute bornologie t séparée sur E</u> .

<u>Preuve</u> : Soit $i : [\Lambda(E)]^* \to [\Lambda(E)]^\times$ définie par :

$<(x_n), i((a_n)_n) > = \sum_{n\geq 1} < x_n , a_n >$ si la suite $(x_n)_n$

(resp. $(a_n)_n$) est dans $\Lambda(E)$ (resp. $[\Lambda(E)]^*$. Pour tout $(a_n)_n$ dans $[\Lambda(E)]^*$ $i((a_n)_n)$ est bien définie comme forme linéaire sur $\Lambda(E)$ (prop. 2.1).

Montrons que <u>$i((a_n)_n)$ est bornée sur $\Lambda(E)$.</u>

Soit $A = A(B, b)$ un borné de $\Lambda(E)$ (B borné disqué de E, b borné solide de Λ).

Pour $(x_n)_n$ un élément de A, on a :

$$\Big| \sum_{n\geq 1} <x_n, a_n> \Big| \leq \sum_n |<x_n, a_n>| \leq \sum_n p_B(x_n)\ p_{B^o}(a_n)\,.$$

Vu que $(p_{B^o}(a_n))_n$ est élément de Λ (prop. 2.1) et que Λ^* est contenu dans $\Lambda^\times$, la suite $(p_{B^o}(a_n))$ appartient à $\Lambda^\times$ donc l'application $(\alpha_n)_n \longmapsto \sum_{n\geq 1} \alpha_n\ p_{B^o}(a_n)$ est bornée sur Λ. Par suite l'ensemble $\{\sum_n p_B(x_n)\ p_{B^o}(a_n)\ ;\ (x_n) \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. (L'ensemble $\{(p_B(x_n))_n\ ;\ (x_n) \in A\}$ est borné dans Λ). D'où le résultat.

Il reste à montrer que i est injective (i est évidemment linéaire).

Si $i((a_n)_n) = 0$ alors $\sum < x_n, a_n > = 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$.

Soit la suite $e_n \otimes x$. Pour tout entiet h et tout élément x de E $< e_n \otimes x, i((a_n)) > = 0$. Soit $< x, a_n > = 0$; E étant t-séparé a_h est nulle.

Nous étudions maintenant les espaces $[\Lambda(E)]^\times$ et $\Lambda_t^*(E^\times)$ considérés comme <u>espaces topologiques</u>.

Un système fondamental de semi normes sur $[\Lambda(E)]^{\times}$ (resp. $\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$) est décrit par l'ensemble des $p^{o}_{A(B,b)}$ (resp. $p^{o}_{b} \times p^{o}_{B}$) où B et b décrivent une base de bornologie de E et Λ respectivement.

On a $p^{o}_{A}(\varphi) = \sup_{(x_n)\in A} |<(x_n), \varphi>|$

$$(p^{o}_{b} \times p^{o}_{B})(a_n) = p^{o}_{b}((p^{o}_{B}(a_n))_n).$$

<u>Lemme 2.1</u> - Si $\Lambda^{\times}$ contient Λ^{*} alors pour tout borné B (resp. b) de E (resp. Λ), b étant solide, pour toute suite $(a_n)_n$ de $\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$p^{o}_{A(B,b)}(i((a_n)_n)) = (p^{o}_{b} \times p^{o}_{B})((a_n)_n)$$

<u>Preuve</u> :

a)

$$p^{o}_{A}(i((a_n)_n)) = \sup_{(x_n)\in A} |<(x_n)_n, (a_n)_n>| = \sup_{(x_n)\in A} |\sum_{n\geq 1} <x_n, a_n>|$$

par définition de i (prop. précédente).

Pour tout élément $(x_n)_n$ de A, x_n appartient à E_B pour tout n et $(p_B(x_n))_n$ est dans b par définition de $A(B,b)$.

Donc :

$$p^{o}_{A}(i((a_n)_n)) \leq \sup_{(x_n)\in A} \sum_{n\geq 1} p_B(x_n)\, p^{o}_{B}(a_n)$$

$$p^{o}_{A}(i((a_n)_n)) \leq \sup_{(\alpha_n)\in b} |\sum \alpha_n\, p^{o}_{B}(a_n)| = (p^{o}_{b} \times p^{o}_{B})((a_n)_n)$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Vu que pour $(\beta_n) \in \Lambda^{*}$,

$p^{o}_{b}((\beta_n)_n) = \sup_{(\alpha_n)\in b} |<(a_n)_n, (\beta_n)_n>|$, il existe un élément (α_n) de b tel que :

$$p^{o}_{b}((p^{o}_{B}(a_n))_n) \leq |<(\alpha_n), (p^{o}_{B}(a_n))_n>| + \varepsilon$$

Donc :

$$p_{\overset{o}{b}}\,[(p_{\overset{o}{B}}(a_n))_n\,] \leq |\sum_n \alpha_n\, p_{\overset{o}{B}}(a_n)| + \varepsilon \qquad \text{soit}$$

$$p_{\overset{o}{b}}\,[(p_{\overset{o}{B}}(a_n))_n\,)] \leq \sum_n p_{\overset{o}{B}}(|\alpha_n|\,a_n) + \varepsilon\ .$$

Vu que : $p_{\overset{o}{B}}(|\alpha_n|\,a_n) = \sup_{x \in B} |<x, |\alpha_n|\,a_n>|$, pour tout entier n ,

il existe un élément x_n de B tel que :

$$p_{\overset{o}{B}}(|\alpha_n|\,a_n) \leq |<x_n\,,\ |\alpha_n|\ a_n>| + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

B étant disqué, on peut choisir x_n dans B de telle sorte que $|<x_n\,,\ |\alpha_n|\ a_n>| = <x_n\,,\ |\alpha_n|\ a_n>$. (Multiplier x_n par

$\dfrac{<x_n\,, |\alpha_n|\,a_n>}{|<x_n\,,\ |\alpha_n|\,a_n>|}$ si $|<x_n\,,\ |\alpha_n|\ a_n>|$ est non nul).

Dans ces conditions ,

$$p_{\overset{o}{b}}((p_{\overset{o}{B}}(a_n))_n) \leq \sum_{n\geq 1} <|\alpha_n|\,x_n\,,\ a_n> + 2\,\varepsilon$$

Or, $(\alpha_n)_n$ est élément de b , (x_n) étant lui élément de B la suite

$(|\alpha_n|\,x_n)_n$ est dans $A(B,b)$ donc :

$$\sum_{n\geq 1} <|\alpha_n|\ x_n\,,\ a_n> \ \leq \sup_{(y_n)\in A(B,b)} |<(y_n),\ (a_n)>| = p_{\overset{o}{A}}(i((a_n)_n))$$

En regroupant tous les résultats on obtient :

$(p_{\overset{o}{b}} \times p_{\overset{o}{B}})((a_n)_n) \leq p_{\overset{o}{A}}(i(a_n)_n)) + 2\,\varepsilon$; ce qui, compte tenu de

a) achève la démonstration du lemme.

Nous obtenons alors immédiatement comme corollaire :

<u>Proposition 2.3</u> - <u>Dans les conditions de la proposition 2.2,</u> $[\Lambda(E)]^{\times}$ <u>et</u> $\Lambda^*_t(E^{\times})$ <u>étant munis des topologies naturelles, alors</u> $\Lambda^*_t(E^{\times})$ <u>est un sous espace topologique de</u> $[\Lambda(E)]^{\times}$.

Nous allons maintenant, sous certaines conditions sur l'ebc solide Λ, établir l'égalité des espaces $[\Lambda(E)]^{\times}$ et $\Lambda_t^*(E^{\times})$.

Proposition 2.4 - Si Λ satisfait la condition LS (cf. [I]), $[\Lambda(E)]^{\times}$ est contenu dans $\Lambda_t^*(E^{\times})$ (et donc dans $[\Lambda(E)]^*$) pour tout ebc E. Plus précisément, pour toute forme linéaire bornée φ sur $\Lambda(E)$, on a $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n\geq 1} <x_n , a_n>$ où $(a_n)_n$ est un élément de $\Lambda_t^*(E^{\times})$ et l'application $\varphi \to (a_n)$ est une injection.

Preuve : Soit φ un élément de $[\Lambda(E)]^{\times}$. Définissons l'élément a_n de $E^{\times}$ de la façon suivante :

$<x , a_n> = \varphi(Q_n(x))$ si $x \in E$. L'application Q_n est l'application qui à x associe la suite $(0,\dots,0,x,0,\dots)$ où x est la coordonnée de rang n.

Q_n étant linéaire bornée, a_n est un élément de $E^{\times}$. Puisque Λ satisfait la condition LS, $\Lambda(E)$ la satisfait aussi (cf. [I]) donc $(x_n)_n = \sum_{n\geq 1} Q_n(x_n)$, la série convergeant bornologiquement dans $\Lambda(E)$.

Alors :

$$\varphi((x_n)) = \sum_{n\geq 1} \varphi(Q_n(x_n)) = \sum_{n\geq 1} < x_n , a_n >$$

Montrons que $(a_n)_n$ est élément de $\Lambda_t^*(E^{\times})$

En vertu de la proposition 2.1, il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$, la série $\sum_{n\geq 1} |< x_n , a_n >|$ est convergente.

Posons $y_n = \varepsilon_n x_n$ si $x_n \neq 0$ avec $\varepsilon_n = \frac{x_n}{|x_n|}$, $y_n = x_n$ dans le cas contraire. Il est clair que la suite $(y_n)_n$ est dans $\Lambda(E)$ si et seulement si $(x_n)_n$ y est. Ce que l'on a déjà montré prouve que la série $\sum_n <y_n , a_n>$ converge donc $\sum_n |< x_n , a_n >| < +\infty$.

Pour finir, si $(a_n) = 0$ alors $\Sigma < x_n , a_n > = 0$ pour tout $(x_n)_n$ dans $\Lambda(E)$ donc l'application $\varphi \to (a_n)_n$ est une injection.

En appliquant les propositions précédentes (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4) on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.5 - Soit E un ebc t séparé, Λ un espace de suites qui satisfait la condition LS avec $\Lambda^{\times} = \Lambda^{*}$ alors les espaces $[\Lambda(E)]^{\times}$, $[\Lambda(E)]^{*}$ et $\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$ sont égaux algébriquement. Par ailleurs, les espaces $[\Lambda(E)]^{\times}$ et $\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$ étant munis des topologies naturelles, l'égalité de $[\Lambda(E)]^{\times}$ et de $\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$ est topologique.

Nous étudions maintenant la structure bornologique du dual de l'elc $\Lambda_t(E)$, en utilisant les résultats de type algébrique démontrés par N. de Grande de Kimpe dans [4].

La topologie de Λ étant supposée localement solide, la bornologie équicontinue de Λ est solide ; on pourra donc parler sans ambiguité de l'ebc $\Lambda^{*}(E')$ où E' est muni de la bornologie équicontinue. La topologie de Λ est maintenant supposée compatible avec ladualité (Λ, Λ^{*}), Λ étant parfait.

Proposition 2.6 - Dans les conditions décrites ci-dessus $\Lambda^{*}(E')$ est un sous espace de $[\Lambda_t(E)]'$. La bornologie propre de $\Lambda^{*}(E')$ est plus fine que la bornologie naturelle de $[\Lambda_t(E)]'$.

Preuve : On sait (cf. [2] p. 137) que $[\Lambda_t(E)]'$ contient les suites dont le terme général est de la forme $\beta_n y_n$ où $(y_n)_n$ est une suite équicontinue de E' et (β_n) un élément de Λ^{*}. Ceci revient à dire que $\Lambda^{*}(E')$ est contenu dans $[\Lambda_t(E)]'$.

Supposons que q (resp. p) décrive un système filtrant de semi normes définissant la topologie de Λ (resp. de E).

Un borné de $\Lambda^{*}(E')$ est un ensemble de la forme A(B, b) où $B = \{a \in E' \text{ tq } |<x, a>| \leq p(x) ; \forall x \in E\}$ et

$b = \{(\beta_n)_n \in \Lambda^* \text{ tq } |<(\alpha_n), (\beta_n)>| \leq q((\alpha_n)) ; \forall (\alpha_n) \in \Lambda\}$.

Un borné de $[\Lambda_t(E)]'$ est un ensemble C de la forme :

$$C = \{\varphi \in [\Lambda_t(E)]' \text{ tq } |<(x_n), \varphi>| \leq q((p(x_n))_n) ; \forall (x_n)_n \in \Lambda_t(E)\}.$$

Montrons que pour tout couple de semi normes (p, q), $A(B, b)$ est inclus dans C.

Soit $(a_n)_n$ un élément de $A(B, b)$. On peut écrire $a_n = u_n \cdot b_n$ avec $b_n \in B$ et $(u_n) \in b$. Alors :

$$\sum_n |<x_n, a_n>| = \sum_n |u_n| \, |<x_n, b_n>| \quad . \quad \text{Or :}$$

$$|<x_n, b_n>| \leq p(x_n) \quad \text{pour tout entier } n \text{, puisque } b_n \in B.$$

Il en résulte :

$$|<(x_n), (a_n)>| \leq \sum_n |u_n| \, p(x_n) = |<(p(x_n))_n, (|u_n|)_n>|$$

Or, la suite $(u_n)_n$ est dans b qui a pu être choisi solide donc

$|<(x_n), (a_n)>| \leq q((p(x_n))_n)$. Ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 2.7</u> - <u>Si Λ est muni de la topologie $0(\Lambda, \Lambda^*)$ les espaces $\Lambda^*(E')$ et $[\Lambda_t(E)]'$ sont égaux algébriquement et topologiquement.</u>

$0(\Lambda, \Lambda^*)$ désigne la topologie de la convergence uniforme sur les bornés pour l'ordre de Λ^*.

<u>Preuve</u> : L'égalité algébrique est une conséquence de la proposition 4.2 de [4].

En vertu de la proposition 2.6, il suffit de montrer que la bornologie de $[\Lambda_t(E)]'$ est plus fine que celle de $\Lambda^*(E')$. Nous nous inspirons de la démonstration de la prop. 4.2 de [4]. Soit C un borné de $[\Lambda_t(E)]'$. Nous avons vu précédemment que

$$C = \{\varphi \in [\Lambda_t(E)]' \text{ tq } |<(x_n), \varphi>| \leq q((p(x_n))_n)\}.$$

Donc si $\varphi = (a_n)_n$ est un élément de C on a :

$|< x , a_h >| \leq p(x)\, q\,(e_h)$ c'est à dire que :

$p_B\,(a_h) \leq q(e_n)$ (B est le borné défini dans la démonstration de la prop. 2.6) pour tout h, q ne dépendant pas de φ dans C.

Puisque la topologie de Λ est la topologie $0(\Lambda, \Lambda^*)$, il existe un élément $(\beta_n)_n$ de Λ^* tel que :

$q\,((\alpha_n)_n) = \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|\, \beta_n$ donc

$q\,(e_h) = \beta_h$ pour tout entier h.

Il en résulte que $p_B(a_h)$ est inférieur où égal à β_h pour tout h donc, $\{(p_B(a_n))_h \;;\; (a_n) \in C\}$ est borné dans Λ^* puisque la bornologie équicontinue de Λ^* est alors la bornologie de l'ordre. Ceci montre que C est contenu dans A(B, b). C.Q.F.D.

Une autre situation étudiée dans [4] est celle où E est un espace normé. On obtient alors l'égalité algébrique des espaces $[\Lambda_t(E)]'$ et $\Lambda_t^*(E')$ où la topologie de E' est la topologie forte. E' étant un espace normé $\Lambda_t^*(E')$ est algébriquement égal à $\Lambda^*(E')$. Nous allons montrer que $[\Lambda_t(E)]'$ et $\Lambda^*(E')$.

<u>Proposition 2.8</u> - <u>Si E est normé, les espaces $[\Lambda_t(E)]'$ et $\Lambda^*(E')$ sont égaux algébriquement et bornologiquement.</u>

<u>Preuve</u> : Compte tenu de l'égalité algébrique de ces espaces et de la proposition 2.6, il suffit de montrer que la bornologie de $[\Lambda_t(E)]'$ est plus fine que la bornologie de $\Lambda^*(E')$.

Nous conservons les notations précédentes. B désigne la boule unité de E' et p la norme de E.

Nous allons en fait établir que $A(B,b)$ est égal à C.

Soit $(a_n)_n$ un élément de C. Pour toute suite $(x_n)_n$ dans $\Lambda_t(E)$ on a la relation suivante :

$$|\Sigma < x_n , a_n >| \leq (q \times p)((x_n)) .$$

Soit (α_n) un élément de Λ

$\sum_n \alpha_n \, p_B(a_n) = \sum_n p_B(|\alpha_n| \, a_n)$. Pour tout n, il existe un élément x_n de E appartenant à B tel que :

$p_B(|\alpha_n| a_n) \leq |<|\alpha_n| \, x_n , a_n>| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ où ε est un réel strictement positif.

On peut toujours choisir x_n de telle façon que :

$|<|\alpha_n| x_n , a_n>| = <|\alpha_n| \, x_n , a_n>$. Il est clair que la suite $(|\alpha_n| \, x_n)_n$ est dans Λ, donc

$$\sum_n < |\alpha_n| \, x_n , a_n > \leq q \times p((|\alpha_n| \, x_n)_n) \leq q((\alpha_n)_n) .$$

Par suite, l'inégalité suivante est vérifiée :

$\sum_n \alpha_n \, p_B(a_n) \leq q((\alpha_n)_n) + \varepsilon$; $\forall \, \varepsilon > 0$ donc $A(B,b)$ contient C, d'où le résultat.

<u>Remarque</u> : Il apparait clairement que la proposition 4.7 de [4] est en fait un cas particulier de la proposition précédente. On démontre en effet dans [4] (prop. 4.7) que si E et Λ sont normés alors les espaces $[\Lambda_t(E)]'$ et $\Lambda^*_t(E'_\beta)$ sont topologiquement égaux. Puisque Λ est normé, l'espace $\Lambda^*_t(E'_\beta)$ n'est autre que l'espace $\Lambda^*(E')$. (La norme sur $\Lambda^*_t(E'_\beta)$ définit la bornologie de $\Lambda^*(E')$. La proposition 2.8 montre que cette propriété ne tient pas du fait que Λ est normé, mais que si Λ est normé alors les structures topologiques et bornologiques sont équivalentes.

Nous pouvons alors donner un corollaire immédiat.

Corollaire - Soit Λ tel que $B_\omega \Lambda$ soit un ebc de Schwartz. Si E est un ebc réflexif alors $\Lambda(E)$ est un ebc réflexif, Λ étant muni de la bornologie de l'ordre.

Preuve : Dans ces conditions $[\Lambda(E)]^{\times} = \Lambda^{*}_{t}(E^{\times})$ topologiquement (prop. 2.5)

La topologie naturelle de Λ^{*} est alors la topologie $0(\Lambda^{*}, \Lambda)$ donc (prop. 2.7) $[\Lambda^{*}_{t}(E^{\times})]' = \Lambda(E^{\times}{}')$ algébriquement et bornologiquement.

Il en résulte bien que $\Lambda(E)$ est un ebc réflexif si et seulement si E est réflexif.

Nous étudions maintenant le dual de $\Lambda(E)$ sans sortir des structures bornologiques.

$E^{\times}$ est muni de la bornologie naturelle. B' est borné dans $E^{\times}$ si B' est un ensemble de formes linéaires équiborné sur tout borné B de E. Si Λ^{*} est inclus dans $\Lambda^{\times}$, on munit Λ^{*} de la bornologie induite par $\Lambda^{\times}$.

Proposition 2.9 - Supposons que le dual bornologique $\Lambda^{\times}$ de Λ contienne le dual de Koethe Λ^{*}. Alors $\Lambda^{*}(E^{\times})$ est contenu dans $[\Lambda(E)]^{\times}$ et l'injection est bornée, $[\Lambda(E)]^{\times}$ étant muni de la bornologie naturelle.

Preuve : a) Pour prouver la première partie de l'assertion, il suffit de montrer que $\Lambda^{*}(E^{\times})$ est contenu dans $[\Lambda(E)]^{*}$ (prop. 2.2). Soit $(a_n)_n$ dans $\Lambda^{*}(E^{\times})$, il existe un borné B' de $E^{\times}$ tel que $(a_n)_n$ est un élément de $\Lambda^{*}(E^{\times}{}_{B'})$. De même, si $(x_n)_n$ est dans $\Lambda(E)$, il existe un borné B de E tel que $(x_n)_n$ appartienne à $\Lambda(E_B)$. Il existe un nombre réel λ tel que $|< x , a >|$ est inférieur ou égal à λ dès que x (resp. a) est dans B (resp. b').

Alors $|<x_n , a_n >| = p_B(x_n). p_{B'}(a_n) \; | < \frac{x_n}{p_B(x_n)} , \frac{a_n}{p_{B'}(a_n)} > |$ si toutefois aucun des nombres $p_B(x_n)$ $p_{B'}(a_n)$ n'est nul. Dans l'autre cas $|< x_n , a_n >| = 0$ et de toutes façons :

$|< x_n , a_n >| \leq \lambda \ p_B (x_n) . p_{B'} (a_n)$ pour tout entier n. Il en résulte que la série $\sum_n |< x_n , a_n >|$ est convergente.

b) Soit $A' (B', b')$ un borné de $\Lambda^*(E^\times)$, $A(B, b)$ un borné de $\Lambda(E)$. Il faut montrer que $A'(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Etant donnés B et B' (resp. b et b'), il existe un scalaire λ (resp. μ) tel que $|< x , a >| \leq \lambda$ pour tout $x \in B$ et tout $a \in B'$ (resp. $|<(\alpha_n), (\beta_n)>| \leq \mu$; $\forall (\alpha_n) \in b$; $\forall (\beta_n)_n \in b'$).

Donc, si $(x_n)_n \in A$ et $(a_n)_n \in A'$

$|< x_n , a_n >| \leq \lambda \ p_B(x_n) \ p_{B'}(a_n)$; $\forall n$ soit

$$|<(x_n)_n , (a_n)_n>| \leq \lambda \sum_{n \geq 1} p_B(x_n) \ p_{B'}(a_n) = \lambda \ | p_B(x_n))_n , (p_{B'}(a_n))_n >| .$$

Soit : $|< (x_n) , (a_n) >| \leq \lambda . \mu$ puisque $(p_B(x_n))_n$ est élément de b tandis que $(p_{B'}(a_n))_n$ appartient à b'.

Il s'agit maintenant de voir dans quelle mesure l'espace $[\Lambda(E)]^\times$ se "rapproche" de l'espace de $\Lambda^*_t(E^\times)$.

Plusieurs cas peuvent se produire

a) Tout élément φ de $[\Lambda(E)]^\times$ ne définit pas nécessairement une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $E^\times$ telle que $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n \geq 1} < x_n , a_n >$. Néanmoins cette propriété est assurée dès que Λ satisfait la condition LS. On définit a_n par $< x , a_n > = \varphi (Q_n(x))$ alors $\varphi ((x_n)) = \Sigma < x_n , a_n >$ si Λ satisfait la condition L. S). Dans l'étude suivante, nous considérerons des éléments $\varphi \in [\Lambda(E)]^\times$ représentables par une telle suite et identifierons φ et $(a_n)_n$. (L'application $\varphi \to (a_n)_n$ étant naturellement injective).

b) Un élément $(a_n)_n$ de $[\Lambda(E)]^\times$ n'est pas nécessairement absorbé par un borné B' de $E^\times$. Nous en donnons un exemple, quoique dans le cas général cette situation ne se présente pas.

c) Enfin, $(a_n)_n$ peut ne pas appartenir à $\Lambda*(E^\times)$ même si $\Lambda^\times = \Lambda^*$, et l'espace Λ satisfaisant la condition LS. Nous en donnons un exemple.

<u>Contre exemple</u> :

Soit $\Lambda = \varphi = \mathbb{R}^{(N)}$ muni de la bornologie usuelle, somme directe de droites. Il est clair que Λ satisfait la condition LS et $\Lambda^\times = \Lambda^* = \mathbb{R}^N$.

Soit E un ebc $[\varphi(E)]^\times = \omega_t(E^\times)$ (prop. 2.5).

Il est clair que $\omega_t(E^\times)$ n'est pas égal à $\omega(E^\times)$ pourvu que E soit bien choisi. (Par exemple, $E = \mathbb{R}^N$).

Néanmoins, on a le résultat suivant :

<u>Proposition 2.10</u> - <u>Si Λ contient au moins un élément dont aucune composante n'est nulle, alors toute suite $(a_n)_n$ appartenant à $[\Lambda(E)]^\times$ est absorbée par un borné B' de $E^\times$.</u>

<u>Preuve</u> : L'hypothèse faite sur Λ implique qu'il existe au moins un borné b de Λ absorbant tous les éléments e_n. Il suffit en effet de prendre le borné b pour l'ordre défini par l'élément particulier, b est alors borné pour toute bornologie solide.

A partir de maintenant b est un borné solide de Λ absorbant tous les e_n.

Soit $\varphi = (a_n)_n$ un élément de $[\Lambda(E)]^\times$. φ étant bornée, pour tout borné B de E, il existe une constante λ_B telle que :

$$|\varphi((x_n)_n)| = |\sum_n < x_n , a_n >| \leq \lambda_B \; p_b [(p_B(x_n))_n] \; ; \; \forall (x_n) \in \Lambda_b(E_B).$$

Soit x un élément de E_B. Considérons la suite $(x_n)_n = e_h \otimes x$

$(x_n)_n$ appartient à $\Lambda_b(E_B)$ puisque $p_B(x_n) = p_B(x)\, \delta_{n,h}$ ($\delta_{n,h}$ symbole de Kronecker).

Nous obtenons alors $|<x, a_h>| \leq \lambda_B \; p_B(x) \; p_b(e_h)$. Ce qui revient à dire que $a_h \in p_b(e_h). \lambda_B \overset{o}{B}$.

Soit B' le borné de $E^\times$ défini par :

$$B' = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B \overset{o}{B}$$. La relation précédemment démontrée prouve que $\underline{a_h \text{ est élément de } p_b(e_h) \, B'}$. C.Q.F.D.

Nous obtenons aussi $p_{B'}(a_h) \leq p_b(e_h)$. C'est à dire que pour tout borné b de Λ absorbant tous les e_h , il existe un borné B' de $E^\times$ absorbant tous les a_h avec $\underline{p_{B'}(a_h) \leq p_b(e_h)}$.

D'où les <u>remarques</u> suivantes :

1) Si l'ensemble $\{e_n\}$ est borné dans Λ , alors toute suite (a_n) de $[\Lambda(E)]^\times$ est équiborné dans $E^\times$ (voir les espaces de suites symmétriques étudiés entre autres par Ramanujan. Garling).

2) Si pour un certain borné b , la suite $p_b(e_h)$ appartient à $\Lambda^\times$ alors (a_h) appartient à $\Lambda^*(E^\times)$. Cette propriété est satisfaite pour ℓ^1 donc $\underline{[\ell^1(E)]^\times = \ell^\infty(E^\times)}$, et en général pour tout espace normé muni de la topologie $0(\Lambda, \Lambda^*)$.

En fait, pour un espace parfait Λ la condition précédente implique que la topologie $0(\Lambda, \Lambda^*)$ soit normée.

<u>Corollaire</u> - Soit E un elcs bornologique, alors l'espace $\ell^1(BE)$ est dense dans l'espace $\ell^1_t(E)$.

<u>Preuve</u> : L'injection de $\ell^1(BE)$ dans $\ell^1_t(E)$ muni de sa bornologie canonique est naturellement bornée.

Par ailleurs :

$$[\ell^1(BE)]^\times = \ell^\infty[(BE)^\times] \qquad \text{(Prop. 2.5) et}$$

$$[\ell^1_t(E)]' = \ell^\infty(E') \qquad \text{(Prop. 2.7)}$$

E étant bornologique, les espaces $(BE)^\times$ et E' sont égaux algébriquement. En outre, la bornologie de Von Neuman de $(BE)^\times$ est égale à la bornologie de E'. Il en résulte que $\ell^\infty_t[(BE)^\times]$ est égal à $\ell^\infty(E')$. Si donc L est élément de $[\ell^1_t(E)]'$, L étant nulle sur $\ell^1(BE)$ on a :

$$L((x_n)) = \Sigma < x_n , a_n > \ ; \ (a_n) \in \ell^\infty(E') \ ; \ \forall (x_n) \in \Lambda_t(E).$$

L'hypothèse implique que tous les a_n sont nuls donc L est nulle. C.Q.F.D.

Pour les espaces normés, la situation se simplifie.

<u>Proposition 2.11</u> - <u>Si E est normé, Λ satisfaisant la condition LS avec $\Lambda^\times = \Lambda^*$ alors les espaces $[\Lambda(E)]^\times$ et $\Lambda^*(E^\times)$ sont égaux algébriquement et bornologiquement.</u>

<u>Preuve</u> : On sait déjà que $\Lambda^*(E^\times)$ est inclus dans $[\Lambda(E)]^\times$ et que l'injection est bornée. Λ satisfaisant la condition LS toute forme linéaire bornée φ sur $\Lambda(E)$ définit une suite (a_n) d'éléments de $E^\times$ et

$$\varphi((x_n)_n) = \Sigma < x_n , a_n > \ ; \ \forall (x_n) \in \Lambda(E)$$

En désignant par B la boule unité de E, il s'agit de montrer que la suite $(p_{B^\circ}(a_n))_n$ appartient à Λ^*. Soit (α_n) un élément de Λ, pour tout n il existe un élément x_n de B tel que $|\alpha_n| p_{B^\circ}(a_n) \leq |< \alpha_n x_n, a_n>| + \frac{1}{2^n}$ et l'on peut choisir x_n tel que $|<\alpha_n x_n, a_n>| = < \alpha_n x_n , a_n >$. La suite $(\alpha_n x_n)_n$ appartient à $\Lambda(E)$ donc

$\sum_n < \alpha_n x_n , a_n >$ converge et par suite

$\sum_n |\alpha_n| \, p_{B^o}(a_n) \leq \sum_n <\alpha_n x_n , a_n> + 1 < +\infty$ donc

$(p_{B^o}(a_n))_n$ appartient à Λ^*.

Si A' est un borné de $[\Lambda(E)]^\times$, montrons que l'ensemble $\{(p_{B^o}(a_n))_n \; ; \; (a_n)_n \in A'\}$ est borné dans Λ^*.

Soit b un borné solide de Λ, $\alpha = (\alpha_n)$ un élément de B, et $(a_n)_n$ un élément de A'.

On a :

$\sum_n \alpha_n p_{B^o}(a_n = \sum_n p_{B^o}(|\alpha_n| a_n)$ donc

$|\sum_n \alpha_n p_{B^o}(a_n)| \leq \sum <\alpha_n x_n , a_n> + 1$ où $x_n \in B$ et $<\alpha_n x_n, a_n> \geq 0$

donc

$|\sum_n \alpha_n p_{B^o}(a_n)| \leq |<(\alpha_n x_n)_n , a_n>| + 1$.

Or la suite $(\alpha_n x_n)_n$ est dans $A(B,b)$ et $(a_n)_n$ dans A' donc les sommes $|\sum_n \alpha_n p_{B^o}(a_n)|$ sont uniformément bornées sur b, ce qui achève la démonstration.

Terminons ce paragraphe avec la remarque suivante :

<u>Proposition 2.12</u> - <u>$\Lambda(E)$ est t séparé si et seulement si E est t séparé. En outre, E est polaire dès que $\Lambda(E)$ est polaire</u>.

Il suffit de remarquer que toute forme linéaire bornée φ sur E se prolonge (d'une infinité de façons) à $\Lambda(E)$. Soit en effet $(x_n)_n$ un élément de $\Lambda(E)$ tel que $L((x_n)) = 0$ pour toute forme bornée L sur $\Lambda(E)$. Soit φ un élément de $E^\times$ et h un entier quelconque.

$\varphi \circ P_h$ est une forme sur $\Lambda(E)$ donc $\varphi \circ P_h((x_n)) = \varphi(x_h) = 0$ donc x_h est nul pour tout h.

3 - CRITERE DE SCHWARTZITE.

Dans la première partie de ce travail, nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $\Lambda(E)$ soit un ebc de Schwartz. Grâce aux propriétés précédentes, nous pouvons formuler un thèorème analogue dans le cas topologique.

Proposition 3.1 - Soit Λ un espace parfait muni d'une topologie localement solide compatible avec la dualité (Λ, Λ^*), E un elcs complet. L'espace $\Lambda_t(E)$ est un elcs de Schwartz si et seulement si les espaces Λ et E le sont.

Preuve : Supposons que Λ et E soient des elcs de Schwartz. On sait que Λ (resp. E) est le dual bornologique de Λ' (resp. E') lorsqu'on munit Λ' (resp. E') de la bornologie équicontinue et $\Lambda'^{\times}$ (resp. $E'^{\times}$) de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de Λ' (resp. de E'). En outre Λ' et E' sont alors des ebc de Schwartz (cf. [7]). Il en résulte (prop. I. 3.1) que $\Lambda'(E')$ est un ebc de Schwartz. Par suite $[\Lambda'(E')]^{\times}$ est un elcs de Schwartz. Or (prop. 2.5) $[\Lambda'(E')]^{\times}$ est algébriquement et topologiquement égal à $\Lambda_t(E)$ car Λ' satisfait la condition LS et $\Lambda'^{\times} = \Lambda = \Lambda'^{*}$ donc $\Lambda_t(E)$ est un elcs de Schwartz.

Cette proposition généralise les résultats connus jusqu'alors en topologie (cf. [3] théorème 3.3).

De même, les résultats de dualité que nous avons établis nous permettent de retrouver les théorèmes de dualités démontrés dans le cas topologique (cf. [3] et [4]).

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.T. AKKAR - Thèse 3ème cycle (Bordeaux 1970)

[2] G. GALUSINSKI - Sur les espaces de suites à valeurs vectorielles (C.R.A.S. tome 276 page 539)

[3] G. GALUSINSKI - Sur la dualité dans les espaces de suites à valeurs vectorielles (C.R.A.S. tome 276 page 625)

[4] N.DE GRANDE de KIMPE - Generalized sequence spaces (Bull.Soc.Math. Belgique, XXIII, 1971)

[5] M. GRANGE - Thèse 3ème cycle (Bordeaux 1972)

[6] A. GROTHENDIECK - Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretsky Rogers. (Boletin Soc.Math.Sao Paulo, 8, 1956)

[7] H. HOGBE NLEND - (J. Maths. pures et appliquées, 9ème série, 49, 1970, p.193. 288).

[8] H. HOGBE NLEND - Théorie des Bornologies et Applications (Springer - Lecture Notes, 273, 1971).

[9] G. KOTHE - Topological Vector Spaces (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1969).

[10] A.L. PERESSINI - Ordered topological vector spaces (Harper's Séries, New York, 1967).

[11] A. PIETSCH - Nuclear locally convex spaces (Springer Verlag, Berlin Heildelberg, New York, 1972).

[12] A. PIETSCH - Zur theorie der Topologische Tensorproduck (Math. Nachr, 25, 1963).

. [13] H.H. SCHAEFFER - Topological vector spaces (Mac Millan, 1966).

[14] L. SCHWARTZ - Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques et espaces nucléaires (Séminaire Schwartz, Paris, 1953/1954).

[15] F. TREVES - Topological vector spaces, distributions and kernels (Academic Press, 1967).

---o0o---

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE (France)