

PAUL NOUYRIGAT

**Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une
représentation unitaire d'un groupe localement compact**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1972, tome 9, fascicule 2
, p. 30-59

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_2_30_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1972__9_2_30_0)

© Université de Lyon, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE PREDUAL DE L'ALGEBRE DE VON NEUMANN
ASSOCIEE A UNE REPRESENTATION UNITAIRE
D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT.

Paul NOUYRIGAT

TABLE DES MATIERES

0 - Introduction .

I - Préliminaires .

- § 1.- Topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- § 2.- Formes linéaires sur une Algèbre de Von Neumann .
- § 3.- Théorème de densité .
- § 4.- Décomposition polaire d'une fonctionnelle .
- § 5.- Notations et rappels .

II - L'espace de Fourier $A_{\pi}(G)$

- § 1.- Définition et premières propriétés .
- § 2.- Expression de la norme dans A_{π} .
- § 3.- Condition nécessaire pour que A_{π} soit une algèbre .
- § 4.- Utilisation des produits tensoriels topologiques dans l'étude de A_{π} ; application au calcul de la norme dans F_{π} .
- § 5.- Etude de certains morphismes de A_{π_1} dans A_{π_2} .

III - L'espace de Fourier d'un espace homogène .

IV - Produits tensoriels d'espaces A_{π} .

- § 1.- L'injection de $A_{\pi_1 \otimes \pi_2}(G_1 \times G_2)$ dans $A_{\pi_1}(G_1) \hat{\otimes} A_{\pi_2}(G_2)$.
- § 2.- Comparaison entre $A_{\pi_1 \otimes \pi_2}$ et $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$.
- § 3.- Cas où π est irréductible : propriété d'approximation métrique pour A_{π} .

Bibliographie .

INTRODUCTION

Soit π une représentation unitaire d'un groupe localement compact G dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$. Soit VN_π l'algèbre de Von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ par les opérateurs $\pi(x)$, où x parcourt G . L'objet du présent travail est d'étudier quelques propriétés du prédual A_π de VN_π , c'est-à-dire de l'espace de Banach des formes linéaires ultra-faiblement continues sur VN_π .

On peut identifier A_π à un espace de fonctions continues et bornées sur G , plus précisément à un sous-espace de Banach de l'algèbre de Fourier-Stieltjes $B(G)$ définie et étudiée par P. Eymard dans [5]. En particulier, si π est la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$, A_π s'identifie à l'algèbre de Fourier $A(G)$ (cf. [5]). Des résultats sur les espaces A_π en général - ainsi que sur le cas particulier des représentations quasi-régulières - ont été récemment annoncés par G. Arsac dans [1]. Nous avons nous-mêmes obtenu quelques résultats de ce type, et nous les exposons dans ce travail.

Après le chapitre I, consacré à quelques préliminaires et notations, nous montrons au chapitre II que A_π , défini comme prédual de VN_π , s'identifie au sous-espace de Banach de $B(G)$ engendré par les coefficients de π , c'est-à-dire à l'espace introduit par G. Arsac. De plus, tout $u \in A_\pi$ s'écrit $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ où les ξ_i et les η_i sont dans $\mathcal{H}_\pi$,

où l'on pose $\xi_i * \eta_i(x) = (\pi(x)\xi_i | \eta_i)$ pour tout $x \in G$, et où on a de plus

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

Nous envisageons une troisième définition équivalente de A_π , directement inspirée d'une idée de C. Herz (remarque sur la note précédente de M. Varopoulos, C.R. Acad. Sc., t. 260, 1965, p.6001-6004). Elle nous permet d'établir que, si u est une somme finie de coefficients de π , sa norme peut s'exprimer à partir des décompositions de u en telles sommes finies, sans avoir à utiliser de séries.

Contrairement à ce qui se passe pour $A(G)$, l'espace A_π n'est pas en général une algèbre pour la multiplication ordinaire des fonctions. Nous donnons une condition nécessaire pour que A_π soit une algèbre : c'est que $\pi(G)$ soit un ensemble linéairement indépendant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$.

A la fin du chapitre II, nous étudions les applications linéaires continues d'un $A_{\pi_1}(G_1)$ dans un $A_{\pi_2}(G_2)$ dont la transposée est un morphisme d'algèbres de Von Neumann. La caractérisation que nous en obtenons nous permet en particulier de retrouver que, par restriction à un sous-groupe fermé H de G , l'algèbre de Fourier $A(G)$ s'applique sur $A(H)$.

Le chapitre III est à l'origine de ce travail. La représentation π est ici la représentation quasi-régulière, induite sur G par la représentation triviale d'un sous-groupe fermé H de G . Nous démontrons que, pour que H soit distingué, il faut et il suffit que les fonctions de A_π soient constantes sur les classes xH . Dans ce cas on a $A_\pi = A(G/H)$.

Le chapitre IV est consacré à l'étude du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ de deux représentations π_1 et π_2 , définies respectivement sur des groupes G_1 et G_2 . Nous obtenons $A\pi_1 \otimes \pi_2$ comme complété de $A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2$ pour une certaine norme. Le problème est alors de placer $A\pi_1 \otimes \pi_2$ par rapport aux produits tensoriels $A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2$ et $A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2$. On a deux applications canoniques $j : A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2 \longrightarrow A\pi_1 \otimes \pi_2$ et $i : A\pi_1 \otimes \pi_2 \longrightarrow A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2$, qui sont linéaires, continues et de norme ≤ 1 . Nous montrons que i est une injection. D'autre part, nous prouvons que j est une isométrie surjective si, et seulement si, l'une des algèbres $VN\pi_1$ ou $VN\pi_2$ est commutative. Ceci généralise, en particulier, la formule $A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2)$, connue dans le cas où G_1 et G_2 sont commutatifs, au cas où l'un seulement des groupes est commutatif. Enfin, nous démontrons que, si π est une représentation irréductible, l'espace de Banach $A\pi$ possède la propriété d'approximation métrique. Il en résulte que, si π_1 ou π_2 est irréductible, l'application $j : A\pi_1 \hat{\otimes} A\pi_2 \longrightarrow A\pi_1 \otimes \pi_2$ est une injection.

§ 1.- Topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien complexe ; outre la topologie de la norme on utilisera plusieurs topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1.1.- Topologie forte

Soit $x \in \mathcal{H}$; la fonction $T \rightarrow \|T(x)\|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie forte.

1.2.- Topologie faible

Soient $x, y \in \mathcal{H}$; la fonction $T \rightarrow |\langle T(x) | y \rangle|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie faible.

1.3.- Topologie ultra-forte

Soit (x_i) une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$; la fonction $T \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i)\|^2 \right)^{1/2}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie ultra-forte.

1.4.- Topologie ultra-faible

Soit $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < \infty ;$$

la fonction $T \rightarrow \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) | y_i \rangle \right|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée appelée topologie ultra-faible.

1.5.- Sur les bornés de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ les topologies forte et ultra-forte coïncident, les topologies faible et ultra-faible coïncident.

1.6.- Sur le groupe unitaire de $\mathcal{H}$ les topologies forte et faible coïncident.

§ 2.- Formes linéaires sur une algèbre de Von Neumann.

Soit V une algèbre de Von Neumann dans $\mathcal{H}$.

1.7.- Soit u une forme linéaire sur V ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est faiblement continue ;
- (ii) u est fortement continue ;
- (iii) Il existe deux suites finies $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que, pour tout $T \in V$,

$$u(T) = \sum_{i=1}^n \langle T(x_i) | y_i \rangle .$$

1.8.- Soit u une forme linéaire sur V ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est ultra-faiblement continue ;

(ii) u est ultra-fortement continue ;

(iii) Il existe deux suites $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < \infty \quad \text{vérifiant}$$

$$u(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) | y_i \rangle \quad \text{pour tout } T \in V.$$

1.9.- L'adhérence, A , au sens de la norme de l'espace de Banach dual de V , de l'ensemble des formes linéaires fortement continues est l'ensemble des formes linéaires ultra-fortement continues.

1.10.- Avec les notations de (1.9.-), V est l'espace de Banach dual de A et la topologie $\sigma(V, A)$ est la topologie ultra-faible.

1.11.- Soit u une forme linéaire positive sur V , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est ultra-faiblement continue ;

(ii) Il existe une suite (x_i) d'éléments de $\mathcal{H}$, vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$ tels que pour tout $T \in V$

$$u(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(x_i) | x_i \rangle .$$

1.12.- Soit G un groupe localement compact, π une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors les algèbres de Von Neumann engendrées dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $\pi(G)$ et $\pi(L^1(G))$ sont égales.

§ 3.- Théorème de densité

1.13.- Théorème de Kaplansky

Soient V et W des algèbres involutives d'opérateurs dans $\mathcal{H}$, avec $V \subset W$, et supposons que V soit fortement partout dense dans W . Alors la boule unité de V est fortement partout dense dans la boule unité de W .

§ 4.- Décomposition polaire

1.14.- Soit V une algèbre de Von Neumann, u une forme linéaire ultra-faiblement continue sur V , alors il existe un couple unique $(T, \|u\|)$ ayant les propriétés suivantes :

a) $\|u\|$ est une forme linéaire positive ultra-faiblement continue sur V ;

et $\|u\| = \|\|u\|\|$;

b) T est un élément partiellement isométrique de V dont le projecteur final est égal au support de $\|u\|$;

c) Pour tout $S \in V$ on a :

$$\langle S, u \rangle = \langle ST, \|u\| \rangle \quad \text{et} \quad \langle S, \|u\| \rangle = \langle ST^*, u \rangle.$$

On dit que $\|u\|$ est la valeur absolue de u , ([4], p. 61, th. 4).

§ 5.- Notations

Nous adopterons d'une manière générale les notations de [5].

Soit G un groupe localement compact, soit dx une mesure de Haar à gauche sur G , choisie une fois pour toutes. Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit comme d'habitude les espaces $L^p(G)$ relatifs à dx . Pour toute fonction complexe f sur G et tout $s \in G$ on définit les fonctions $\gamma(s)f$, $\delta(s)f$, $\bar{f}$, $\check{f}$, $\tilde{f}$ par les formules

$$\gamma(s)f(x) = f(s^{-1}x); \quad \delta(s)f(x) = f(xs); \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}; \quad \check{f}(x) = f(x^{-1}); \quad \tilde{f} = \check{\bar{f}}.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien complexe ; une représentation, π , de G dans $\mathcal{H}$ est un morphisme de G dans le groupe unitaire de $\mathcal{H}$, continu pour la topologie forte.

Soit V une algèbre de Von Neumann dans $\mathcal{H}$; On note V^+ l'ensemble des opérateurs positifs de V . Si A est un ensemble de formes linéaires sur V , on note A^+ l'ensemble des formes linéaires de A qui sont positives, c'est-à-dire l'ensemble des $u \in A$ tels que $\langle T, u \rangle \geq 0$ pour tout $T \in V^+$.

On note $B(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les fonctions continues de type positif sur G , autrement dit, l'ensemble de tous les coefficients $(\pi(x) \xi | \eta)$ des représentations unitaires continues de G . Pour $u \in B(G)$, on pose

$$\|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_{\Sigma} \leq 1} \left| \int f(x) u(x) dx \right|$$

où Σ désigne l'ensemble de toutes les (classes de) représentations unitaires continues de G et où $\|f\|_{\Sigma} = \sup_{\pi \in \Sigma} \|\pi(f)\|$. Alors $B(G)$ est un espace de Banach.

Soit π une représentation de G ; on désigne par $B_{\pi}(G)$ l'ensemble des fonctions u , continues et bornées sur G , vérifiant

$$\sup_{f \in L^1(G), \|\pi(f)\| \leq 1} \left| \int f(x) u(x) dx \right| < \infty.$$

Muni de la norme $\|u\| = \sup_{\substack{f \in L^1(G) \\ \|\pi(f)\| \leq 1}} \left| \int f(x) u(x) dx \right|$, l'ensemble $B_{\pi}(G)$ est un sous-

espace de Banach de l'espace de Banach $B(G)$.

Soit π une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Soit $VN_\pi \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi(G)$. On désigne par VN'_π l'espace de Banach dual de VN_π .

§ 1.- Définition et premières propriétés

2.1.- Définition

On appelle espace de Fourier de la représentation π , et on note A_π (ou $A_\pi(G)$), l'espace de Banach des formes linéaires ultra-faiblement (ou ultra-fortement, ce qui revient au même) continues sur VN_π .

La norme de A_π est donc la norme de VN'_π . Le théorème de densité de Kaplansky, appliqué à l'algèbre involutive $\pi(L^1(G))$, montre alors que, pour $u \in A_\pi$,

$$2.2.- \quad \|u\| = \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leq 1}} |\langle T, u \rangle| = \sup_{\substack{f \in L^1(G) \\ \|\pi(f)\| \leq 1}} |\langle \pi(f), u \rangle|.$$

D'autre part VN_π est l'espace de Banach dual de A_π et, si $F_\pi \subset A_\pi$ désigne l'ensemble des formes linéaires fortement continues sur VN_π , alors F_π est partout dense dans A_π .

Soit $u \in A_\pi$. Alors u est déterminé par les $\langle \pi(s), u \rangle$ pour $s \in G$. Par suite, si l'on pose $u(s) = \langle \pi(s), u \rangle$, on peut considérer A_π comme un espace de fonctions sur G . Dans la suite on notera de la même façon la forme linéaire ultra-faiblement continue sur VN_π et la fonction sur G qu'elle définit.

2.3.- Exemple

Si π est la représentation régulière gauche de G , le théorème (3.10.) de [5] montre que A_π est l'algèbre de Fourier du groupe G .

Soit $u \in A_\pi$; alors u est de la forme :

$$T \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (T(\xi_i) | \eta_i) \quad \text{avec } \xi_i \in \mathcal{H}, \eta_i \in \mathcal{H}, \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty, \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty.$$

Soient ξ et η dans $\mathcal{H}$; notons $\xi * \eta$ la fonction sur G définie par la formule $\xi * \eta(s) = (\pi(s)\xi | \eta)$, pour $s \in G$. On note alors $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ la fonction sur G , déterminée par u . On a donc par définition

$$2.4.- \quad u(s) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \right)(s) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(s)\xi_i | \eta_i).$$

2.5.- Proposition

Tout $u \in A_\pi$ s'écrit, au moins d'une façon, sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i, \text{ avec } \xi_i \in \mathcal{H} ; \eta_i \in \mathcal{H} ; \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty ; \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$$

Cela résulte de (1.8.) et (2.4.).

Adoptons la convention suivante : lorsqu'on écrira $u \in A_\pi$ sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on supposera que $\xi_i \in \mathcal{H}$, $\eta_i \in \mathcal{H}$, $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$.

2.6.- Proposition

Soit $u \in A_\pi$. Alors u est une fonction continue et bornée sur G ; de plus $\|u\|_\infty \leq \|u\|$.

La représentation π est continue, donc, si $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$ la fonction $s \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(s)\xi_i | \eta_i)$ est continue d'après (1.5.) et (1.6.).

D'autre part

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in G} |\langle \pi(x), u \rangle| \leq \sup_{\substack{T \in VN_\pi \\ \|T\| \leq 1}} |\langle T, u \rangle| = \|u\|.$$

2.7.- Proposition

Soient $u \in A_\pi$ et $x \in G$; alors les fonctions $\gamma(x)u$ et $\delta(x)u$ appartiennent à A_π et

$$\|u\| = \|\gamma(x)u\| = \|\delta(x)u\|.$$

En effet, si $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on a $\sum_i \|\xi_i\|^2 = \sum_i \|\pi(x)\xi_i\|^2 < \infty$

et $\sum_i \|\eta_i\|^2 = \sum_i \|\pi(x)\eta_i\|^2 < \infty$. Par suite on a

$$2.8.- \quad \gamma(x)u = \sum_i \xi_i * (\pi(x)\eta_i) \text{ et } \delta(x)u = \sum_i (\pi(x)\xi_i) * \eta_i.$$

Donc $\gamma(x)u \in A_\pi$ et $\delta(x)u \in A_\pi$. D'autre part $T \rightarrow \pi(x^{-1})T$ est une isométrie de la boule unité de VN_π sur elle-même, donc

$$\|\gamma(x)u\| = \sup_{\|T\| \leq 1} |\langle T, \gamma(x)u \rangle| = \sup_{\|T\| \leq 1} |\langle \pi(x^{-1})T, u \rangle| = \sup_{\|S\| \leq 1} |\langle S, u \rangle| = \|u\|.$$

On démontre de même que $\|u\| = \|\delta(x)u\|$.

2.9.- Proposition

Soient $\mu \in M^1(G)$ et $u \in A_\pi$; on a

$$2.10.- \quad \langle \pi(\mu), u \rangle = \int u(x) d\mu(x).$$

En effet si $u = \xi * \eta$ on a

$$\langle \pi(\mu), \xi * \eta \rangle = (\pi(\mu)\xi | \eta) = \int (\pi(x)\xi | \eta) d\mu(x) = \int u(x) d\mu(x).$$

L'égalité (2.10.) est donc vérifiée pour $u \in F_\pi$ et, par continuité pour $u \in A_\pi$.

2.11.- Corollaire

A_π est un sous-espace fermé de B_π .

Cela résulte de (2.6.), (2.2.), (2.10) et de l'expression de la norme dans B_π .

§ 2.- Expression de la norme dans A_π

Nous montrons dans ce paragraphe qu'on peut obtenir la norme d'un $u \in A_\pi$ à partir d'une de ses décompositions sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$.

Soit $T \in VN_\pi$; alors $\varphi : S \longrightarrow ST$ est un endomorphisme ultra-faiblement continu de VN_π . Par suite, pour $u \in A_\pi$, la forme linéaire $u \circ \varphi$ est ultra-faiblement continue sur VN_π . Il existe donc un unique élément, noté Tu , de A_π vérifiant

$$2.12.- \quad \langle ST, u \rangle = \langle S, Tu \rangle \quad \text{pour tout } S \in VN_\pi.$$

On vérifie immédiatement que la loi externe $(T, u) \longrightarrow Tu$ fait de A_π un VN_π -module à gauche. Lorsqu'on écrira u sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on notera $T(\sum_i \xi_i * \eta_i)$ l'élément Tu .

2.13.- Proposition

Soit $T \in VN_\pi$. L'application $\psi : u \longrightarrow Tu$ de A_π dans A_π est linéaire, continue, de norme $\|T\|$ et vérifie

$$2.14.- \quad T(\xi * \eta) = (T\xi) * \eta \quad \text{pour } \xi \in \mathcal{H} \text{ et } \eta \in \mathcal{H}.$$

$$2.15.- \quad Tu(x) = \langle T, \gamma(x^{-1})u \rangle = \langle \pi(x)T, u \rangle \quad \text{pour } u \in A_\pi \text{ et } x \in G.$$

L'égalité (2.12.) montre que ψ est la restriction à A_π de la transposée de φ . Donc ψ est linéaire et continue. D'autre part φ est la transposée de ψ , d'où

$$\|T\| = \|\varphi\| = \|\psi\|.$$

Pour tout $S \in VN_\pi$ et ξ et η dans $\mathcal{H}$, on a :

$$\langle S, T(\xi * \eta) \rangle = \langle ST, \xi * \eta \rangle = (ST\xi | \eta) = \langle S, (T\xi) * \eta \rangle,$$

d'où (2.14.).

La formule (2.15.) résulte de (2.8.) et (2.12.). On a, de plus

$$2.16.- \quad T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i) * \eta_i.$$

2.17.- Proposition

Soit $u \in A_\pi$. Alors pour toute écriture de u sous la forme $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, on a

$$\|u\| \leq \sum_i \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

Cela résulte du lemme (2.14.) de [5].

2.18.- Corollaire

Avec les notations de la proposition (2.17.) on a

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i.$$

Soit $u_n = \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i$; on a $u - u_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ d'où $\|u - u_n\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|$;

ce qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2.19.- Proposition

Soit $u \in A_{\pi}$ et soit (T_{α}) une suite d'éléments de VN_{π} , convergeant ultra-fortement vers 0. Alors $(T_{\alpha}u)$ converge en norme dans A_{π} vers 0.

On peut écrire $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ avec $\sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty$ et $\sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty$.

On a alors $\lim_{\alpha} \sum_i \|T_{\alpha} \xi_i\|^2 = 0$ d'où

$$\|T_{\alpha} u\| = \left\| \sum_i (T_{\alpha} \xi_i) * \eta_i \right\| \leq \sum_i \|T_{\alpha} \xi_i\| \|\eta_i\| \leq \left(\sum_i \|T_{\alpha} \xi_i\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i \|\eta_i\|^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{et } \lim_{\alpha} \|T_{\alpha} u\| = \lim_{\alpha} \sum_i \|T_{\alpha} \xi_i\|^2 = 0.$$

Soit $u \in A_{\pi}$. Alors u possède une décomposition polaire unique $u = T \|u\|$, où $\|u\|$ est une forme linéaire positive normale sur VN_{π} , et $T \in VN_{\pi}$ est un opérateur partiellement isométrique. De plus $\|u\| = \|\|u\|\|$.

2.20.- Théorème (G. Arsac [1])

Soit $u \in A_{\pi}$. On peut écrire $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|^2 < \infty$

de telle sorte que l'on ait exactement :

$$2.21.- \quad \|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

Soit $u = T \|u\|$ la décomposition polaire de u . Alors $\|u\|$ est de la forme $S \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (S \xi_i | \xi_i)$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 \leq \infty$; c'est-à-dire $\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \xi_i$. Par suite $\|\|u\|\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2$ car l'inégalité $|\langle S, \|u\| \rangle| \leq \|S\| \left(\sum_i \|\xi_i\|^2 \right)$ est une égalité pour $S = \pi(e)$.

D'autre part

$$u = T \|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} (T \xi_i) * \xi_i \text{ donc, puisque } T \text{ est partiellement isométrique,}$$

$$\|u\| = \|T \|u\|\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T \xi_i\| \|\xi_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 = \|\|u\|\| \text{ et}$$

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|T \xi_i\| \|\xi_i\|.$$

L'énoncé suivant précise le lemme (2.14.) de [5] :

2.22.- Proposition

Soit $u = \xi' * \eta'$ un coefficient de π . Alors il existe ξ et η dans $\mathcal{H}$ tels que $u = \xi * \eta$ et tels qu'on ait exactement :

$$\|u\| = \|\xi\| \|\eta\|.$$

Soit $u = T \|u\|$ la décomposition polaire de u ; on a $\|u\| = T^* u$ d'où $\|u\| = (T^* \xi') * \eta'$. Par suite ([4], p. 48, Lemme 2.) il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|u\| = \xi * \xi$; donc $u = (T\xi) * \xi$. Alors, puisque T est partiellement isométrique, on a

$$\|u\| \leq \|T\xi\| \|\xi\| \leq \|\xi\|^2 = \|u\|(e) = \|\|u\|\| = \|u\|$$

donc $\|u\| = \|T\xi\| \|\xi\|$.

2.23.- Proposition

Soit $u = \sum_i \xi_i * \eta_i \in A_\pi$, avec $\|u\| = \sum_i \|\xi_i\| \|\eta_i\|$. Soit $K \subset \mathbb{N}$. Alors, si on pose $u_K = \sum_{i \in K} \xi_i * \eta_i$, on a

$$\|u_K\| = \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

Il est clair que $u_K \in A_\pi$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|$ est commutativement convergente, donc

$$\|u\| = \|u_K + u_{\mathbb{N} \setminus K}\| \leq \|u_K\| + \|u_{\mathbb{N} \setminus K}\| \leq \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus K} \|\xi_i\| \|\eta_i\| = \|u\|;$$

Ceci donne

$$\|u_K\| = \sum_{i \in K} \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

§ 3.- Condition nécessaire pour que A_π soit une Algèbre

2.24.- Proposition

Si A_π est une algèbre (pour la multiplication des fonctions), alors $\pi(G)$ est une partie libre de l'espace vectoriel VN_π .

On va démontrer, par récurrence sur n , que la relation $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(s_i) = 0$, où les $\pi(s_i)$ sont deux à deux distincts, implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Pour $n = 1$ le résultat est évident.

Soient $\pi(s_1) \neq \pi(s_2)$. Supposons $\lambda_1 \pi(s_1) + \lambda_2 \pi(s_2) = 0$ avec λ_1 et λ_2 non nuls. Alors on peut écrire $\pi(s_1) = -\lambda_1^{-1} \lambda_2 \pi(s_2)$ et $\pi(e) = \lambda_1^{-1} \lambda_2 \pi(s_2 s_1^{-1})$. On se ramène ainsi à l'égalité :

$$\pi(e) = \lambda \pi(s), \text{ où } \lambda \neq 0 \text{ et } \pi(e) \neq \pi(s).$$

Pour tout $v \in A_\pi$ on a donc

$$2.25.- \quad v(e) = \lambda v(s).$$

Soit $u \in A_{\pi}$ tel que $u(e) \neq 0$. On a alors, d'après (2.25.), $u^2(e) = \lambda u^2(s)$.
 Or $u^2(e) = u(e)^2 = \lambda^2 u(s)^2 = \lambda^2 u^2(s)$; on peut donc écrire $\lambda u^2(s) = \lambda^2 u^2(s) \neq 0$.
 Il s'ensuit que $\lambda = 1$, puis que $\pi(e) = \pi(s)$, ce qui est contradictoire. Par suite on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Supposons la relation vraie pour $n-1 \geq 2$. Soient des $\pi(s'_i)$ deux à deux distincts, $i = 1, 2, \dots, n$. Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda'_i \pi(s'_i) = 0$ où aucun des λ'_i n'est nul.

On obtient alors

$$\pi(s'_1) = - \sum_{i=2}^n (\lambda'_1{}^{-1} \lambda'_i) \pi(s'_i) \text{ et}$$

$$\pi(e) = - \sum_{i=2}^n (\lambda'_1{}^{-1} \lambda'_i) \pi(s'_i s'_1{}^{-1})$$

On se ramène alors à l'égalité

$$2.26.- \quad \pi(e) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \pi(s_i) \text{ où les } \pi(s_i) \text{ sont deux à deux distincts et les}$$

λ_i non nuls.

D'après l'hypothèse de récurrence, les $\pi(s_i)$, pour $1 \leq i \leq n-1$, sont linéairement indépendants. Il existe donc $u \in A_{\pi}$ tel que :

$$\langle \pi(s_2), u \rangle = \dots = \langle \pi(s_{n-1}), u \rangle = 0 \text{ et } \langle \pi(s_1), u \rangle \neq 0.$$

On a alors, d'après (2.26.),

$$u(e) = \langle \pi(e), u \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle \pi(s_i), u \rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1), u \rangle.$$

De même on a,

$$u^2(e) = \langle \pi(e), u^2 \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle \pi(s_i), u^2 \rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1), u^2 \rangle.$$

Par suite, on obtient

$$u^2(e) = \lambda_1^2 \langle \pi(s_1), u \rangle^2 = \lambda_1^2 \langle \pi(s_1), u^2 \rangle = \lambda_1 \langle \pi(s_1), u^2 \rangle \neq 0.$$

Il s'ensuit que $\lambda_1 = 1$. On démontre de même $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 1$.

La formule (2.26.) s'écrit alors

$$2.27. \quad \pi(e) = \sum_{i=1}^{n-1} \pi(s_i).$$

On a donc, pour tout $u \in A_{\pi}$, $u(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u(s_i)$; ce qui donne, en élevant au carré,

$$u(e)^2 = u^2(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u(s_i)^2 + 2 \sum_{i < j} u(s_i) u(s_j).$$

D'autre part on a aussi

$$u^2(e) = \sum_{i=1}^{n-1} u^2(s_i).$$

En comparant les deux écritures de $u^2(e)$, on déduit que

$$\sum_{i < j} u(s_i)u(s_j) = 0, \text{ pour tout } u \in A_\pi ; \text{ cette somme comporte au moins un}$$

terme car $n-1 \geq 2$. Prenons alors $u \in A_\pi$ non nul sur $\pi(s_1)$ et $\pi(s_2)$ et nul sur $\pi(s_3), \dots, \pi(s_{n-1})$. On obtient $u(s_1)u(s_2) = 0$ ce qui est contradictoire. Par suite, il existe au moins un λ'_i nul. L'hypothèse de récurrence montre qu'alors tous les λ'_i sont nuls. Donc $\pi(G)$ est une partie libre de VN_π .

Remarque : Pour que A_π soit une algèbre, il faut et il suffit que u^2 soit dans A_π dès que u est dans A_π .

Une réciproque partielle de la proposition (2.24.) est donnée par la proposition suivante :

2.28.- Proposition

Soit π une représentation de dimension finie. Si $\pi(G)$ est une partie libre de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, alors A_π est une algèbre.

En effet, toute fonction sur $\pi(G)$ se prolonge en une forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$; celui-ci étant de dimension finie, cette forme linéaire est ultra-faiblement continue, donc appartient à A_π . Soient u et v dans A_π . La fonction $\pi(s) \rightarrow \langle \pi(s), u \rangle \langle \pi(s), v \rangle$ définit donc un élément de A_π . Par suite uv appartient à A_π .

Supposons que $\pi(G)$ est une partie libre de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$. Soit $\xi \in \mathcal{H}$; alors la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(s_i) \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i (\pi(s_i)\xi/\xi)^2$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$. Pour que $(\xi * \xi)^2$ appartienne à A_π , il faut et il suffit que cette application soit ultra-faiblement continue. C'est en particulier le cas dès que l'application $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(s_i) \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(s_i) \otimes \pi(s_i)$ est ultra-faiblement continue. Si π est quasi-équivalente à $\pi \otimes \pi$, on retrouve le fait que A_π est une algèbre (cf. G.Arsac [1]).

§ 4.- Utilisation des produits tensoriels dans l'étude de A_π ; application au calcul de la norme dans F_π .

Le but essentiel de ce paragraphe est de démontrer que si $u \in F_\pi$, la norme de u est donnée par

$$\|u\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|\xi_i\| \|\eta_i\|, u = \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i \right\}.$$

Soit $\bar{\mathcal{H}}$ l'espace hilbertien conjugué de $\mathcal{H}$. Sur $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ on met la norme projective :

$$2.29.- \quad \|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|\xi_i\| \|\eta_i\|, x = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \right\}.$$

Soit $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ le complété de $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ pour cette norme. Tout x de $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i$ où la série $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|$ converge et on a ([6] théorème 1 p. 51)

$$2.30.- \quad \|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|, x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i \right\}.$$

L'application $p' : \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} \rightarrow A_{\pi}$, définie par $p'(\xi, \eta) = \xi * \eta$ est bilinéaire et continue. Soit $p : \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} \rightarrow A_{\pi}$ sa linéarisée ; p est continue et $p(\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}) = F_{\pi}$. Soit $\hat{p} : \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} \rightarrow A_{\pi}$ le prolongement de p à $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$, on a alors

$$\hat{p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i.$$

2.31.- Proposition

L'application canonique $\tilde{p} : \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\text{Ker}(\hat{p})} \rightarrow A_{\pi}$ est une isométrie surjective.

Cela résulte du théorème (2.20.) et de la formule (2.30.)

2.32.- Proposition

La bijection canonique $\tilde{p} : \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\text{Ker}(p)} \rightarrow F_{\pi}$ est une isométrie de l'espace normé quotient $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\text{Ker}(p)}$ sur le sous-espace F_{π} de A_{π} .

En effet le dual de l'espace normé $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ est l'espace de Banach des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$. Si φ est une telle forme et si $\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ on a $\langle \varphi, \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i)$. Par suite le dual de $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}$ s'identifie à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ au moyen de la relation

$$\langle T, \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^n (T\xi_i | \eta_i) \text{ pour } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ et } \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}.$$

D'autre part, dans la dualité $(\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, l'ensemble $\text{Ker}(p)$ est l'orthogonal de $\pi(G)$, car la relation " $\langle \pi(s), \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \rangle = 0$ pour tout $s \in G$ " équivaut à

" $p(\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i) = 0$ ". Par suite le dual de $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\text{Ker}(p)}$, qui s'identifie isométriquement à l'orthogonal de $\text{Ker}(p)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, est le bi-orthogonal de $\pi(G)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; D'après (1.7.) la topologie $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}})$ est la topologie faible de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Donc le bi-orthogonal de $\pi(G)$, qui est l'adhérence faible, dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de l'espace vectoriel engendré par $\pi(G)$, n'est autre que VN_{π} . Le dual de $\mathcal{H} \hat{\otimes} \bar{\mathcal{H}} /_{\text{Ker}(p)}$ s'identifie alors à VN_{π} au moyen de la formule

$$\langle T, \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i + \text{Ker}(p) \rangle = \sum_{i=1}^n (T\xi_i | \eta_i).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i + \text{Ker}(p) \right\| &= \sup_{\substack{T \in \text{VN}_{\pi} \\ \|T\| \leq 1}} \left| \langle T, \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i + \text{Ker}(p) \rangle \right| = \\ &= \sup_{\substack{T \in \text{VN}_{\pi} \\ \|T\| \leq 1}} \left| \langle T, \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i \rangle \right| = \left\| \tilde{p} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i + \text{Ker}(p) \right) \right\|. \end{aligned}$$

Par suite, $\tilde{p}$ est une isométrie.

2.33.- Corollaire

Soit $u \in F_{\pi}$; alors on a

$$\|u\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|\xi_i\| \|\eta_i\|, u = \sum_{i=1}^n \xi_i * \eta_i \right\}.$$

Cela résulte de (2.29.) et (2.32.).

§ 5.- Etude de certains morphismes de A_{π_1} dans A_{π_2} .

Soit $u \in A_{\pi}$; alors $T \longrightarrow \overline{\langle T^*, u \rangle}$ est une forme linéaire ultra-faiblement continue sur VN_{π} . Il existe donc un unique élément de A_{π} , noté $\tilde{u}$, tel que

$$2.34.- \quad \langle T, \tilde{u} \rangle = \overline{\langle T^*, u \rangle} \text{ pour tout } T \in \text{VN}_{\pi}.$$

Nous allons voir, que, considérée comme fonction sur G , on a : $\tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})}$, et que, d'autre part, l'application $u \longrightarrow \tilde{u}$ est une isométrie de A_{π} .

2.35.- Proposition

Soit $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i$; alors on a $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i * \xi_i$.

En effet on a, pour tout $T \in \text{VN}_{\pi}$,

$$\langle T^*, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (T^* \xi_i | \eta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (T \eta_i | \xi_i) = \langle T, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i * \xi_i \rangle.$$

2.36.- Corollaire

Soit $u \in A_{\pi}$; alors on a

$$\|u\| = \|\tilde{u}\|, \text{ et } \tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})}, \text{ pour tout } x \in G.$$

Les vérifications sont immédiates.

Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts et π_1 et π_2 des représentations de G_1 et G_2 respectivement.

2.37.- Proposition

Soit $i : \text{VN}_{\pi_1} \longrightarrow \text{VN}_{\pi_2}$ un morphisme injectif ultra-faiblement continu d'algèbres

involutives. Alors l'espace de Banach A_{π_1} est un quotient de l'espace de Banach A_{π_2} . Plus précisément, si θ désigne la restriction à A_{π_2} de la transposée de i , l'application canonique $\varphi : A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta) \longrightarrow A_{\pi_1}$ est une isométrie surjective.

En effet, puisque i est ultra-faiblement continue, on a $\theta(A_{\pi_2}) \subset A_{\pi_1}$. L'application i est alors la transposée de θ ; par suite $\theta(A_{\pi_2})$ est partout dense dans A_{π_1} . L'application θ se décompose en $\theta = \varphi \circ \psi$ où $\psi : A_{\pi_2} \longrightarrow A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta)$ est la surjection canonique, et $\varphi : A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta) \longrightarrow A_{\pi_1}$.

L'ensemble $\text{Ker}(\theta)$ est l'orthogonal de $i(\text{VN}_{\pi_1})$ dans A_{π_2} ([2] ch. IV - § 4. Corollaire de la proposition 2. p. 101). Par suite l'espace de Banach dual de $A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta)$ s'identifie isométriquement au bi-orthogonal de $i(\text{VN}_{\pi_1})$ dans VN_{π_2} ([2] ch. IV, § 5, proposition 9). Un élément T_2 de ce bi-orthogonal est identifié à la forme linéaire $u_2 + \text{Ker}(\theta) \longrightarrow \langle T_2, u_2 \rangle$.

D'autre part $i(\text{VN}_{\pi_1})$ est une algèbre de Von Neumann, donc $i(\text{VN}_{\pi_1})$ est ultra-faiblement fermé. Il en résulte que $i(\text{VN}_{\pi_1})$ est égal à son bi-orthogonal et que le dual de $A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta)$ s'identifie à $i(\text{VN}_{\pi_1})$.

La norme d'un élément $u_2 + \text{Ker}(\theta) \in A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta)$, est alors donnée par

$$\|u_2 + \text{Ker}(\theta)\| = \sup_{\substack{T_1 \in \text{VN}_{\pi_1} \\ \|T_1\| \leq 1}} |\langle i(T_1), u_2 \rangle|.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|u_2 + \text{Ker}(\theta)\| &= \sup_{\substack{T_1 \in \text{VN}_{\pi_1} \\ \|T_1\| \leq 1}} |\langle i(T_1), u_2 \rangle| = \sup_{\substack{\|T_1\| \leq 1}} |\langle T_1, \theta(u_2) \rangle| = \\ &= \sup_{\|T_1\| \leq 1} |\langle T_1, \varphi(u_2 + \text{Ker}(\theta)) \rangle|. \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\|u_2 + \text{Ker}(\theta)\| = \|\varphi(u_2 + \text{Ker}(\theta))\|.$$

Et l'application φ est une isométrie; elle est surjective car $\varphi(A_{\pi_2} / \text{Ker}(\theta)) = \theta(A_{\pi_2})$ est partout dense dans A_{π_1} .

2.38.- Proposition

Soit $p : \text{VN}_{\pi_1} \longrightarrow \text{VN}_{\pi_2}$ un morphisme d'algèbres involutives ultra-faiblement continu

On suppose que $p(VN_{\pi_1})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_2} . Alors la transposée i de p est une isométrie de A_{π_2} dans A_{π_1} .

Soit $p = \tilde{p} \circ q$ la décomposition canonique de p , avec $q : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_1/Ker(p)}$ et $\tilde{p} : VN_{\pi_1/Ker(p)} \longrightarrow VN_{\pi_2}$. L'application $\tilde{p}$ est une isométrie ([3] p.18, 1.8.3.) ; Soit i la restriction de ${}^t p$ à A_{π_2} ; alors $i(A_{\pi_2}) \subset A_{\pi_1}$, car p est ultra-faiblement continu. Soit $u_2 \in A_{\pi_2}$; on a $\|u_2\| = \sup_{\|p(T_1)\| \leq 1} |\langle p(T_1), u_2 \rangle|$ car $p(VN_{\pi_1})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_2} . Soit $\mathcal{B}_1$ la boule unité de VN_{π_1} . Alors $q(\mathcal{B}_1)$ est la boule unité de $VN_{\pi_1/Ker(p)}$, et $\tilde{p}(q(\mathcal{B}_1))$ est la boule unité de $p(VN_{\pi_1})$. On a donc

$$\|u_2\| = \sup_{\|p(T_1)\| \leq 1} |\langle p(T_1), u_2 \rangle| = \sup_{T_1 \in \mathcal{B}_1} |\langle p(T_1), u_2 \rangle| = \sup_{T_1 \in \mathcal{B}_1} |\langle T_1, i(u_2) \rangle|.$$

d'où $\|u_2\| = \|i(u_2)\|$.

L'application i est donc une isométrie.

2.39.- Corollaire

Supposons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres involutives, $p : VN_{\pi_1} \longrightarrow VN_{\pi_2}$. Alors les espaces de Banach A_{π_1} et A_{π_2} sont isométriques.

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque π_1 et π_2 sont deux représentations quasi-équivalentes d'un même groupe G ([3] p.106, 5.3.2.). Alors $A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$ (cf. G. Arsac [1])

2.40.- Proposition

Soit $\theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue. Alors pour que $\varphi = {}^t \theta : VN_{\pi_2} \longrightarrow VN_{\pi_1}$ soit un morphisme d'algèbres involutives, il faut et il suffit que θ vérifie

$$2.41.- \quad \theta(\widetilde{u_1}) = \widetilde{\theta(u_1)} \text{ pour tout } u_1 \in A_{\pi_1},$$

$$2.42.- \quad T_2 \theta(u_1) = \theta({}^t \theta(T_2) u_1) \text{ pour tout } u_1 \in A_{\pi_1} \text{ et } T_2 \in VN_{\pi_2}.$$

En effet, soient $T_2, S_2 \in VN_{\pi_2}$ et $u_1 \in A_{\pi_1}$. On a

$$\langle \varphi(T_2^*), u_1 \rangle = \langle T_2^*, \theta(u_1) \rangle = \overline{\langle T_2, \widetilde{\theta(u_1)} \rangle}, \text{ et}$$

$$\langle \varphi(T_2)^*, u_1 \rangle = \overline{\langle \varphi(T_2), \widetilde{u_1} \rangle} = \overline{\langle T_2, \theta(\widetilde{u_1}) \rangle}.$$

L'égalité (2.41.) est donc équivalente à $\varphi(T_2^*) = \varphi(T_2)^*$.

On a, d'autre part :

$$\langle \varphi(T_2 S_2), u_1 \rangle = \langle T_2 S_2, \Theta(u_1) \rangle = \langle T_2, S_2 \Theta(u_1) \rangle \quad \text{et}$$

$$\langle \varphi(T_2) \varphi(S_2), u_1 \rangle = \langle \varphi(T_2), \varphi(S_2) u_1 \rangle = \langle T_2, \Theta({}^t \Theta(S_2) u_1) \rangle.$$

Ceci montre que l'égalité (2.42.) est équivalente à

$$\varphi(T_2 S_2) = \varphi(T_2) \varphi(S_2).$$

2.43.- Corollaire

Soit $\Theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue vérifiant (2.42.). Alors (2.41.) est équivalent à

$$2.44.- \quad \Theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+.$$

Supposons que Θ vérifie (2.41.), alors, d'après 2.40., $\varphi = {}^t \Theta$ est un morphisme d'algèbres involutives ; par suite ([4], p. 8, proposition 8.) $\varphi(VN_{\pi_2}^+) \subset VN_{\pi_1}^+$ et $\Theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+$.

Réciproquement, si $\Theta(A_{\pi_1}^+) \subset A_{\pi_2}^+$, on a $\varphi(VN_{\pi_2}^+) \subset VN_{\pi_1}^+$; ce qui entraîne $\varphi(T_2^*) = \varphi(T_2)^*$ pour tout $T_2 \in VN_{\pi_2}$ ([4], p. 53, Déf. 2.). Par suite φ est un morphisme d'algèbres involutives, et Θ vérifie (2.41.).

2.45.- Proposition

Soit $\Theta : A_{\pi_1} \longrightarrow A_{\pi_2}$ une application linéaire continue, vérifiant (2.41.) et (2.42.) si Θ est surjective alors A_{π_2} est isométrique à l'espace de Banach quotient $A_{\pi_1}/\text{Ker}(\Theta)$. Si Θ est injective, Θ est une isométrie de A_{π_1} dans A_{π_2} .

Supposons Θ injective ; soit $\varphi = {}^t \Theta$. D'après (1.10.) on sait que la topologie de dualité $\sigma(VN_{\pi}, A_{\pi})$ est la topologie ultra-faible, donc, d'après Bourbaki ([2] p. 103, corollaire de la proposition 6.), φ est ultra-faiblement continu. D'autre part, Θ étant injective, $\varphi(VN_{\pi_2})$ est ultra-faiblement dense dans VN_{π_1} . Alors d'après (2.38.) Θ est une isométrie.

Supposons Θ surjective. Alors $\varphi = {}^t \Theta$ est une injection ultra-faiblement continue. La proposition (2.37.) montre que A_{π_2} est isométrique à $A_{\pi_1}/\text{Ker}(\Theta)$.

2.46.- Remarque

On peut remplacer, dans l'énoncé de la proposition (2.45.) l'hypothèse " Θ est surjective " par " $\Theta(A_{\pi_1})$ est partout dense dans A_{π_2} ". Cela suffit, en effet, pour que φ soit injective.

2.47.- Exemple

Soit H un sous-groupe fermé de G . Alors, $A(H)$ s'identifie aux restrictions à H des fonctions de $A(G)$. On retrouve ainsi un théorème de C. Herz (C.R. Acad. Sc. t. 271, n° 4, p. 244-246) à partir du fait, simple à vérifier, que $A(G)|_H$ est dense dans $A(H)$. Ce dernier fait, par exemple, est évident si G est un groupe de Lie, car alors toute fonction de $\mathcal{D}(H)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(G)$, et de plus $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $A(G)$, (cf. [5] proposition (3.26.)).

Soit H un sous-groupe fermé de G ; soit G/H l'espace homogène des classes à gauche $\dot{x} = xH$ de G selon H , sur lequel G opère continûment à gauche : si $\dot{x} \in G/H$ et $s \in G$, on désigne par $s\dot{x}$ la classe $\overline{sx}$ de sx . On désigne par λ une mesure > 0 sur G/H quasi-invariante, c'est-à-dire

$$3.1.- \quad \int_{G/H} f(s\dot{x}) d\lambda \dot{x} = \int_{G/H} \chi(s^{-1}, \dot{x}) f(\dot{x}) d\lambda \dot{x}$$

où

$$3.2.- \quad \chi(s, \dot{x}) = \frac{\rho(sx)}{\rho(x)} \quad \text{où } s \in G \text{ et } \dot{x} = xH \in G/H,$$

ρ étant une certaine fonction continue > 0 sur G telle que

$$3.3.- \quad \rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)} \rho(x) \quad \text{pour } x \in G \text{ et } \xi \in H,$$

où Δ_G et Δ_H sont les fonctions modulaires de G et H respectivement. On définit la représentation quasi-régulière, π , de G dans $L^2(G/H, \lambda)$ par la formule

$$3.4.- \quad \pi(s)f(\dot{x}) = f(s^{-1}\dot{x}) \sqrt{\chi(s^{-1}, \dot{x})} \quad \text{pour } s \in G \text{ et } f \in L^2(G/H, \lambda).$$

La représentation π n'est autre que la représentation induite sur G par la représentation triviale de H ([7]).

3.5.- Lemme

Le noyau de π dans G est contenu dans H .

Soit $s \in G$ tel que $s \notin H$. Alors $s^{-1}s \neq s$ et il existe une fonction f continue, à support compact, sur G/H , telle que

$$f(s^{-1}s) \sqrt{\rho(s^{-1}s)} \neq f(s) \sqrt{\rho(s)} \quad \text{donc}$$

$\pi(s)f(s) \neq f(s)$ et $\pi(s)f \neq f$. Par suite $\pi(s) \neq 1_{L^2(G/H, \lambda)}$ et $s \notin \text{Ker}(\pi)$.

On a donc $\text{Ker}(\pi) \subset H$.

3.6.- Proposition

Soit π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(G/H, \lambda)$. Soit $u \in A_\pi$; alors les fonctions $\bar{u}$ et $\check{u}$ appartiennent à A_π et

$$3.7.- \quad \|\bar{u}\| = \|\check{u}\| = \|u\|.$$

Soient f et g dans $L^2(G/H, \lambda)$; on a

$$\overline{f * g}(x) = \overline{(\pi(x)f | g)} = (\pi(x)\bar{f} | \bar{g}) = \bar{f} * \bar{g}(x) \quad \text{et}$$

$$(f * g)^\vee(x) = (\pi(x^{-1})f | g) = (\pi(x)\bar{g} | \bar{f}) = \bar{g} * \bar{f}(x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Ceci montre que $\bar{u}$ et $\check{u}$ sont dans A_π pour tout $u \in A_\pi$. D'autre part l'égalité $\|f\| = \|\bar{f}\|$ pour tout $f \in L^2(G/H, \lambda)$ entraîne les égalités (3.7.).

3.8.- Proposition

Pour que H soit distingué, il faut et il suffit que les fonctions de A_π soient constantes sur les classes xH . Dans ce cas A_π s'identifie canoniquement à $A(G/H)$.

Supposons H distingué : Soit $p : G \rightarrow G/H$ la surjection canonique. La mesure de Haar sur G/H est G -invariante. Soit σ la représentation régulière gauche de G/H ; alors π et σ sont à valeurs dans le même espace de Hilbert et $\pi = \sigma \circ p$. En effet soit $s \in G$ et $f \in L^2(G/H)$; on a

$$\sigma(\dot{s})(f)(\dot{x}) = f(\dot{s}^{-1}\dot{x}) = f(s^{-1}\dot{x}) = \pi(s)(f)(\dot{x}) \text{ pour tout } \dot{x} \in G/H.$$

Il en résulte que l'application qui à $\pi(s)$ associe $\sigma(p(s))$ se prolonge en un isomorphisme (d'algèbres involutives car H est distingué) de VN_π sur VN_σ . D'après (2.39.), on obtient par transposition une isométrie θ de $A(G/H)$ sur A_π , qui à $u \in A(G/H)$ fait correspondre $\theta(u)$ défini par

$$\theta(u)(s) = \langle \pi(s), \theta(u) \rangle = \langle \sigma(p(s)), u \rangle = u(\dot{s}), \text{ pour } s \in G.$$

Ceci montre que les fonctions de A_π sont constantes sur les classes xH et que A_π s'identifie à $A(G/H)$.

Réciproquement supposons que les fonctions de A_π sont constantes sur les classes xH . Soit $x \in H$; alors pour tout $u \in A_\pi$ on a $u(x) = u(e)$. Par suite $\pi(x) = \pi(e)$ et $x \in \text{Ker}(\pi)$.

On obtient alors $H \subset \text{Ker}(\pi)$; d'après (3.5.) on a donc $H = \text{Ker}(\pi)$ et H est distingué.

3.9.- Remarque

Soit H un sous-groupe distingué non compact de G . Alors toute fonction non nulle $u \in A_\pi$, ne tend pas vers zéro à l'infini. On voit aussi qu'on ne peut obtenir de partitions de l'unité dans A_π . La situation est donc ici moins riche en possibilités que dans le cas où $H = \{e\}$, c'est-à-dire dans le cas de l'algèbre de Fourier $A(G)$ (cf [5]).

Soient G_1 et G_2 des groupes localement compacts ; soit π_1 (resp. π_2) une représentation de G_1 (resp. G_2) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$). Soit $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ la représentation de $G_1 \times G_2$ dans $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$, produit tensoriel de π_1 et π_2 ($\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ désigne le produit tensoriel hilbertien de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$). On rappelle que π est définie par

$$\pi(s_1, s_2) = \pi(s_1) \otimes \pi(s_2) \text{ pour } (s_1, s_2) \in G_1 \times G_2.$$

Le but de ce chapitre est de construire A_π à partir de A_{π_1} et A_{π_2} et de comparer A_π aux produits tensoriels $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$ et $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$.

Posons, pour simplifier les écritures,

$$A_1 = A_{\pi_1} ; A_2 = A_{\pi_2} ; A = A_\pi ; V_1 = VN_{\pi_1} ; V_2 = VN_{\pi_2} ; V = VN_\pi.$$

§ 1.- L'injection de $A_{\pi_1} \otimes A_{\pi_2}(G_1 \times G_2)$ dans $A_{\pi_1}(G_1) \hat{\otimes} A_{\pi_2}(G_2)$

4.1.- Proposition

L'algèbre de Von Neumann V est le produit tensoriel des algèbres de Von Neumann V_1 et V_2 .

En effet V est engendré par les éléments de la forme $\pi(s_1, s_2) = \pi(s_1) \otimes \pi(s_2)$ pour $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$. De plus $V_1 \otimes V_2$ est l'algèbre engendrée par $\pi(G_1 \times G_2)$, donc est dense dans V pour l'une quelconque des topologies, forte, faible, ultra-forte, ultra-faible.

4.2.- Corollaire

La boule unité de $V_1 \otimes V_2$ est dense dans la boule unité de V pour la topologie forte.

4.3.- Proposition (T. Turumaru [9]).

On a $A_1 \otimes A_2 \subset A$ et $A_1 \otimes A_2$ est partout dense en norme dans A . De plus, si $u = u_1 \otimes u_2 \in A$, avec $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, on a

$$\|u\| \leq \|u_1\| \|u_2\|.$$

Soient $u_1 \in A_1$ et $u_2 \in A_2$; on peut écrire

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{i1} * \eta_{i1} \text{ avec } \xi_{i1} \in \mathcal{H}_1 ; \eta_{i1} \in \mathcal{H}_1 ; \|u_1\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_{i1}\| \|\eta_{i1}\|, \text{ et}$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{j2} * \eta_{j2} \text{ avec } \xi_{j2} \in \mathcal{H}_2 ; \eta_{j2} \in \mathcal{H}_2 ; \|u_2\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|\xi_{j2}\| \|\eta_{j2}\|.$$

d'où 4.4.-

$$\sum_{i,j} \|\xi_{i1}\| \|\eta_{i1}\| \|\xi_{j2}\| \|\eta_{j2}\| = \sum_{i,j} \|\xi_{i1} \otimes \xi_{j2}\| \|\eta_{i1} \otimes \eta_{j2}\| = \|u_1\| \|u_2\|.$$

Par suite $\sum_{i,j} (\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) * (\eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2})$ appartient à A .

Soit $s = (s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$; alors

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) * (\eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2})(s) &= \sum_{i,j} ((\pi_1(s_1) \otimes \pi_2(s_2))(\xi_{i_1} \otimes \xi_{j_2}) | \eta_{i_1} \otimes \eta_{j_2}) \\ &= \sum_{i,j} (\pi_1(s_1)\xi_{i_1} | \eta_{i_1})(\pi_2(s_2)\xi_{j_2} | \eta_{j_2}) \\ &= u_1(s_1) u_2(s_2) = u_1 \otimes u_2(s) . \end{aligned}$$

Donc $u_1 \otimes u_2$ appartient à A , les égalités (4.4.) montrent que

$$\|u_1 \otimes u_2\| \leq \|u_1\| \|u_2\| .$$

Soit maintenant $T \in V$ tel que $\langle T, u \rangle = 0$ pour tout u de $A_1 \otimes A_2$. Si T est non nul, il existe des vecteurs de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ tels que

$$(T(\sum_{i=1}^n \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2}) | \sum_{j=1}^p \eta_{j_1} \otimes \eta_{j_2}) \neq 0 \text{ d'où}$$

$$\langle T, (\sum_{i=1}^n \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2}) * (\sum_{j=1}^p \eta_{j_1} \otimes \eta_{j_2}) \rangle \neq 0 \text{ soit}$$

$$\langle T, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\xi_{i_1} * \eta_{j_1}) \otimes (\xi_{i_2} * \eta_{j_2}) \rangle \neq 0 .$$

Ceci est contradictoire, donc $T = 0$ et $A_1 \otimes A_2$ est partout dense dans A .

4.5.- Remarque

En général on considère deux représentations σ_1 et σ_2 d'un même groupe G . La représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est définie comme représentation de G . L'algèbre de Von Neumann associée à $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est alors une sous-algèbre du produit tensoriel des algèbres de Von Neumann $VN \sigma_1$ et $VN \sigma_2$. D'après G. Arsac ([1]) l'application restriction à la diagonale de $G \times G$, est une application de $A \sigma_1 \otimes A \sigma_2$ dans $A \sigma_1 \otimes A \sigma_2$. La proposition (2.37.) montre alors que $A \sigma_1 \otimes A \sigma_2$ est le quotient de l'espace de Fourier associé à la représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, considérée comme représentation de $G \times G$, par le sous-espace des fonctions nulles sur la diagonale de $G \times G$.

Sur $A_1 \otimes A_2$ on peut considérer trois normes :

$$\|u\|_{\wedge} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|u_{i_1}\| \|u_{i_2}\| , u = \sum_{i=1}^n u_{i_1} \otimes u_{i_2} \right\}$$

$$\|u\| = \sup \left\{ |\langle T, u \rangle| , T \in V , \|T\| \leq 1 \right\}$$

$$\lambda(u) = \sup \left\{ |\langle T_1 \otimes T_2, u \rangle| , T_1 \in V_1, T_2 \in V_2, \|T_1\| \leq 1, \|T_2\| \leq 1 \right\} .$$

Soit $u \in A_1 \otimes A_2$; on a

$$4.6.- \quad \lambda(u) \leq \|u\| \leq \|u\|_\lambda.$$

La première inégalité est évidente. La seconde résulte de (4.3.). D'autre part, de $\lambda(u_1 \otimes u_2) = \|u_1\| \|u_2\|$ et de (4.3.), on déduit $\|u_1 \otimes u_2\| = \|u_1\| \|u_2\|$.

Soit $u = \sum_{i=1}^n u_{i_1} \otimes u_{i_2}$; alors, si on identifie u à l'opérateur $T_1 \rightarrow \sum_{i=1}^n \langle T_1, u_{i_1} \rangle u_{i_2}$,

on définit une isométrie i de $A_1 \otimes A_2$, muni de la norme λ , dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(V_1, A_2)$ muni de la norme d'opérateur. On note $A_1 \hat{\otimes} A_2$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(V_1, A_2)$ de $i(A_1 \otimes A_2)$, et l'on note λ la norme dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$. (Cf. R. Schatten, A theory of cross-spaces, Princeton university press, 1950).

Soit $u = \sum_{i=1}^n u_{i_1} \otimes u_{i_2}$ et soient $T_1 \in V_1$ et $T_2 \in V_2$. On a

$$i(u)T_1 = \sum_{i=1}^n \langle T_1, u_{i_1} \rangle u_{i_2} ; \text{ d'où}$$

$$\langle T_2, i(u)T_1 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle T_1, u_{i_1} \rangle \langle T_2, u_{i_2} \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, \sum_{i=1}^n u_{i_1} \otimes u_{i_2} \rangle.$$

On a donc

$$4.7.- \quad \langle T_2, i(u)T_1 \rangle = \langle T_1 \otimes T_2, u \rangle.$$

Si maintenant $u \in A_1 \hat{\otimes} A_2$, alors on a $u = \lim_n i(u_n)$.

Par suite $u(T_1) = \lim_n i(u_n)T_1$ d'où

$$4.8.- \quad \langle T_2, u(T_1) \rangle = \lim_n \langle T_1 \otimes T_2, u_n \rangle.$$

D'après (4.6.), l'injection canonique i , de $A_1 \otimes A_2$ dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$ est continue si l'on met sur $A_1 \otimes A_2$ la norme de A et sur $A_1 \hat{\otimes} A_2$ la norme λ . Et on a le résultat suivant :

4.9.- Proposition

L'application i se prolonge en une injection abaissant les normes, encore notée i , de A muni de la norme $\|\cdot\|$ dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$.

Soit $u \in A$, tel que $i(u) = 0$. On a donc pour $T_1 \in V_1$ et $T_2 \in V_2$, $\langle T_2, i(u)T_1 \rangle = 0$. D'après la proposition (4.3.), il existe une suite (u_n) d'éléments de $A_1 \otimes A_2$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$. On en déduit, d'une part que $\langle T, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, u_n \rangle$ pour $T \in V$, d'autre part que $\lim_{n \rightarrow \infty} i(u_n) = i(u) = 0$.

D'après (4.8.) on a, pour tout $T_1 \in V_1$, $T_2 \in V_2$,

$$\langle T_1 \otimes T_2, u \rangle = \lim_n \langle T_1 \otimes T_2, u_n \rangle = \langle T_2, i(u)T_1 \rangle = 0 \text{ donc } u = 0.$$

4.10.- Corollaire

Soit u un élément positif de A ; alors $\lambda(u) = \|u\|$.

En effet, dans ce cas on a $\|u\| = \langle \pi(e), u \rangle = \langle \pi_1(e_1) \otimes \pi_2(e_2), u \rangle \leq \lambda(u)$.

Donc $\|u\| = \lambda(u)$.

§ 2.- Comparaison entre $A_{\pi_1} \otimes \pi_2$ et $A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$.

D'après (4.6.) l'application identité de $A_1 \otimes A_2$ se prolonge en une application continue $j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \rightarrow A$ et l'application $i \circ j$ est l'application canonique de $A_1 \hat{\otimes} A_2$ dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$. Pour que $i \circ j$ soit une injection il faut et il suffit (d'après 4.9.) que j soit une injection. C'est le cas lorsque l'espace A_1 (ou A_2) vérifie la propriété d'approximation ([6] prop. 35, p. 165), en particulier lorsque V_1 (ou V_2) vérifie la propriété d'approximation ([6] prop. 36, p. 167).

Si V_1 (ou V_2) est une algèbre commutative, V_1 est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$, où Ω est un compact. Or $\mathcal{C}(\Omega)$ vérifie la propriété d'approximation, donc V_1 la vérifie aussi et on a le résultat suivant :

4.11.- Théorème

Pour que l'application canonique j de $A_1 \hat{\otimes} A_2$ dans l'espace de Banach $(A, \|\cdot\|)$ soit une isométrie, il faut et il suffit que V_1 ou V_2 soit une algèbre commutative.

Supposons l'algèbre V_1 commutative. D'après ce qui précède j est une injection. D'autre part d'après M. Takesaki [8], la norme de $T \in V_1 \otimes V_2$ est alors donnée par

$$\|T\| = \sup \left\{ |\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle|, \varphi_1 \in V_1', \varphi_2 \in V_2', \|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1 \right\}.$$

4.12.- Lemme (R. Schatten)

Soit $T \in V_1 \otimes V_2$ et soit $\mathcal{K}_1$ (resp $\mathcal{K}_2$) la boule unité de A_1 (resp. A_2). Alors on a

$$4.13.- \quad \|T\| = \sup \left\{ |\langle T, u_1 \otimes u_2 \rangle|, u_1 \in \mathcal{K}_1, u_2 \in \mathcal{K}_2 \right\}$$

Soit $T = \sum_{i=1}^n T_{i1} \otimes T_{i2}$ et, pour $j = 1, 2$ soit $\varphi_j \in V_j', \|\varphi_j\| \leq 1$.

Pour la topologie $\sigma(V_j', V_j)$ la boule $\mathcal{K}_j$ est dense dans la boule unité de V_j' , pour $j = 1, 2$. Par suite il existe des $u_{1\alpha} \in \mathcal{K}_1$ et des $u_{2\alpha} \in \mathcal{K}_2$ tels que $\varphi_1 = \lim_{\alpha} u_{1\alpha}$

et $\varphi_2 = \lim_{\alpha} u_{2\alpha}$. Donc, on a, pour $1 \leq i \leq n$

$$\langle T_{i1}, \varphi_1 \rangle = \lim_{\alpha} \langle T_{i1}, u_{1\alpha} \rangle \text{ et } \langle T_{i2}, \varphi_2 \rangle = \lim_{\alpha} \langle T_{i2}, u_{2\alpha} \rangle.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle T_{i1}, \varphi_1 \rangle \langle T_{i2}, \varphi_2 \rangle = \lim_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \langle T_{i1}, u_{1\alpha} \rangle \langle T_{i2}, u_{2\beta} \rangle \\ &= \lim_{\alpha, \beta} \langle T, u_{1\alpha} \otimes u_{2\beta} \rangle \end{aligned}$$

d'où 4.13.-

Soit $\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2)$ l'enveloppe convexe dans $A_1 \otimes A_2$, des éléments de la forme $u_1 \otimes u_2$, avec $u_1 \in \mathcal{K}_1$ et $u_2 \in \mathcal{K}_2$. Soit $\mathcal{K}$ la boule unité de A et $\mathcal{K}'$ celle de $A_1 \hat{\otimes} A_2$. On sait, d'après [6] (prop. 1, p. 28) que $\mathcal{K}'$ est l'adhérence dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$ de $\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2)$.

On a d'autre part,

$$j(\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2)) \subset \overline{j(\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2))} \subset \overline{j(\mathcal{K}')} \subset \mathcal{K}$$

car $\|j(u)\| \leq \|u\|_A$ pour $u \in A_1 \hat{\otimes} A_2$. D'après (4.13.) $j(\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2))$ est dense dans $\mathcal{K}$. Par suite, $\overline{j(\mathcal{K}')} = \mathcal{K}$ et j est une isométrie surjective (A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo, 1964 ; corollaire 1, p. 54).

Réciproquement, si j est une isométrie, alors j est surjective, car $A_1 \otimes A_2$ est partout dense dans $A_1 \hat{\otimes} A_2$ et dans A . Par suite, on a $\mathcal{K} = j(\overline{\Gamma(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2)})$, donc, pour $T \in V$,

$$\|T\| = \sup_{u \in \mathcal{K}} |\langle T, u \rangle| = \sup_{\substack{u_1 \in \mathcal{K}_1 \\ u_2 \in \mathcal{K}_2}} |\langle T, u_1 \otimes u_2 \rangle|$$

donc, d'après (4.12.), on a

$$\|T\| = \sup \left\{ |\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle|, \varphi_1 \in V'_1, \varphi_2 \in V'_2, \|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1 \right\}.$$

Alors, d'après M. Takesaki [8], V_1 ou V_2 est une algèbre commutative.

4.14.- Corollaire

Si G_1 ou G_2 est commutatif, alors $A_{\pi_1} \otimes A_{\pi_2} = A_{\pi_1} \hat{\otimes} A_{\pi_2}$ pour toutes représentations π_1 et π_2 .

Ce corollaire s'applique, en particulier, si l'on prend pour π_1 et π_2 les représentations régulières gauches. On obtient alors la formule

$$A(G_1 \times G_2) = A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2).$$

§ 3.- Cas où π est irréductible : propriété d'approximation pour A_π .

Dans ce paragraphe nous montrons que si π_1 ou π_2 est irréductible, alors l'application $j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \rightarrow A$ est une injection.

4.15.- Proposition

Soit π une représentation irréductible de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; alors l'espace A_π vérifie la propriété d'approximation métrique ([6] p. 178).

Il faut montrer que $\text{Id}_{A_\pi} \in \mathcal{L}(A_\pi, A_\pi)$ est adhérent, pour la topologie de la convergence compacte, à l'ensemble des opérateurs de rang fini, de A_π dans A_π . Sur la boule unité de $\mathcal{L}(A_\pi, A_\pi)$ la topologie de la convergence compacte est égale à la topologie de la convergence simple sur une partie partout dense de A_π . Nous prendrons F_π pour une telle partie dense.

Soit $\varepsilon > 0$ et $v_1, \dots, v_n$ des éléments de F_π ; On va construire un opérateur de rang fini, T , sur A_π , de norme ≤ 1 tel que

$$4.16.- \quad \|T(v_k) - v_k\| \leq \varepsilon \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

$$\text{On peut écrire, pour } 1 \leq k \leq n, \quad v_k = \sum_{i=1}^{p_k} \xi_{ik} * \eta_{ik}.$$

$$\text{Soit } N = \max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p_k}} \{p_k, \|\xi_{ik}\|, \|\eta_{ik}\|\} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{2N^2}.$$

Soit K un compact de $\mathcal{H}$ contenant les ξ_{ik} et les η_{ik} , pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i \leq p_k$. L'espace hilbertien $\mathcal{H}$ vérifie la propriété d'approximation métrique ([6] p. 181, corollaire 2). Il existe donc un entier p , et pour $1 \leq i \leq p$, des éléments α_i et β_i de $\mathcal{H}$, tels que

$$4.17.- \quad \left\| \sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i - \xi \right\| \leq \gamma \text{ pour } \xi \in K$$

$$\text{et } 4.18.- \quad \left\| \sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i \right\| \leq \|\xi\| \text{ pour } \xi \in K.$$

Soient ξ et η dans K . On a les formules suivantes :

$$\left\| \sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i * \eta - \xi * \eta \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i - \xi \right) * \eta \right\| \leq \gamma \|\eta\|$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i * \eta \right) - \left(\sum_{i=1}^p (\xi_i | \alpha_i) \beta_i \right) * \left(\sum_{i=1}^p (\eta | \alpha_i) \beta_i \right) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i * \right. \\ &\quad \left. * \left(\eta - \sum_{i=1}^p (\eta | \alpha_i) \beta_i \right) \right\| \leq \gamma \|\xi\|. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\left(\sum_{i=1}^p (\xi_i | \alpha_i) \eta_i \right) * \sum_{i=1}^p (\eta | \alpha_i) \beta_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\xi | \alpha_i) (\overline{\eta | \alpha_j}) \beta_i * \beta_j.$$

Or, il existe un unique $T_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) = VN_\pi$, tel que

$$(T_{ij}(\xi') | \eta') = (\xi' | \alpha_i) (\overline{\eta' | \alpha_j}) \text{ pour tous } \xi' \text{ et } \eta' \text{ de } \mathcal{H}. \text{ On peut}$$

alors écrire

$$\left(\sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i \right) * \left(\sum_{i=1}^p (\eta | \alpha_i) \beta_i \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (T_{ij} \xi | \eta) \beta_i * \beta_j.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\xi * \eta - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (T_{ij} \xi | \eta) \beta_i * \beta_j\| &\leq \|\xi * \eta - \sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i * \eta\| + \\ &\quad \|\sum_{i=1}^p (\xi | \alpha_i) \beta_i * \eta - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (T_{ij} \xi | \eta) \beta_i * \beta_j\| \\ &\leq \gamma \|\xi\| + \gamma \|\eta\| \leq 2N\gamma. \end{aligned}$$

Ceci pour tous ξ et η dans K . Posons alors $u_{ij} = \beta_i * \beta_j$. Considérant v_k , on obtient :

$$\begin{aligned} \|v_k - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle T_{ij}, v_k \rangle u_{ij}\| &= \left\| \left(\sum_{m=1}^{p_k} \xi_{mk} * \eta_{mk} \right) - \sum_{m=1}^{p_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (T_{ij} \xi_{mk} | \eta_{mk}) \beta_i * \beta_j \right\| \\ &\leq p_k 2N\gamma \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Il reste alors à démontrer que l'application continue de A_π dans A_π ,

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle T_{ij}, v \rangle u_{ij} \text{ est de norme } \leq 1.$$

$$\text{On peut écrire } v = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i * \eta_i \text{ avec } \|v\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\| \|\eta_i\|.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle T_{ij}, v \rangle u_{ij} &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k | \alpha_i) (\overline{\eta_k | \alpha_j}) \beta_i * \beta_j \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^p (\xi_k | \alpha_i) \beta_i \right) * \left(\sum_{j=1}^p (\eta_k | \alpha_j) \beta_j \right) \right] \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle T_{ij}, v \rangle u_{ij} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\| \|\eta_k\| = \|v\| \text{ et le résultat.}$$

4.19.- Corollaire

Si π_1 ou π_2 est une représentation irréductible, alors $j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \rightarrow A$ est une injection.

En effet $i \circ j : A_1 \hat{\otimes} A_2 \rightarrow A_1 \hat{\otimes} A_2$ est une injection ([6] prop. 35, p. 165). Par suite j est une injection.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] G. ARSAC - Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact, C.R. Acad. Sc., t. 273, 1971, p. 298-300.
- [2] N. BOURBAKI - Livre V : Espaces vectoriels topologiques, chap. 3-5 - Paris, Hermann 1955.
- [3] J. DIXMIER - Les C^* - algèbres et leurs représentations - Paris, Gauthier -Villars, 1964.
- [4] J. DIXMIER - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de Von Neumann) - Paris, Gauthier -Villars, 1969 ; deuxième édition.
- [5] P. EYMARD - L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 181-236.
- [6] A. GROTHENDIECK - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the American Mathematical Society, n° 16, 1955.
- [7] G.W. MACKEY - Induced representation of locally compact groups, Ann of Math, t. 55, 1952, p. 101-139.
- [8] M. TAKESAKI - On the cross-norm of the direct product of C^* - algèbres, Tohoku Math. Journal, t. 16, 1964, p. 111-122.
- [9] T. TURUMARU - On the direct product of operator algebras, III, Tohoku Math. Journal, t. 6, 1954, p. 208-211.

Manuscrit remis le 1er mai 1972.

Paul NOUYRIGAT
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
59621 - VILLEURBANNE