PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALAIN BOUVIER

Remarques sur la factorisation dans les anneaux commutatifs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971, tome 8, fascicule 3
, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_3_1_0>

Publications du
Département de
Mathematiques
Lyon 1971.t.8.3.4

REMARQUES SUR LA FACTORISATION DANS LES ANNEAUX COMMUTATIFS

Alain BOUVIER

Comme nous l'avons montré dans (3), les notions d'anneaux à factorisation unique au sens de (5) (appelés ici *anneaux à factorisation unique*) et au sens de (7), (appelés ici *anneaux de Fletcher*) sont distinctes. Afin de comparer ces deux notions et de les généraliser simultanément, nous introduisons dans ce travail, les *anneaux localement à factorisation unique*. Ce sont les anneaux produits directs finis d'anneaux à factorisation unique. Tous leurs localisés sont des anneaux à factorisation unique, d'où leur nom.

Les anneaux localement à factorisation unique sont localement présimplifiables au sens de (4). Aussi commençons nous par établir quelques propriétés élémentaires de ces derniers.

Puis nous étudions les anneaux localement à factorisation unique, à partir des anneaux à factorisation unique par passage au produit direct : atomicité, présimplifiabilité, pgcd, ppcm, propriétés de transfert, hauteur de leurs idéaux premiers principaux etc.

En utilisant les S-anneaux de (9), nous donnons une caractérisation des anneaux atomiques de Fletcher qui précise les liens entre ces anneaux et les anneaux à factorisation unique. Nous en déduisons une nouvelle propriété caractéristique des anneaux de Fletcher dans le cas noethérien localement présimplifiable.

Nous étudions ensuite le transfert à $A(X)$ et $A((X))$ de la notion d'anneau localement à factorisation unique.

Nous terminons par quelques remarques et un tableau récapitulatif des propriétés des anneaux localement à factorisation unique et de leurs deux cas particuliers, les anneaux à factorisation unique et les anneaux Fletcher.

§ 1 - ANNEAUX LOCALEMENT PRESIMPLIFIABLES.

(1.1) Les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Si A est un anneau, on note $U(A)$ le groupe de ses unités et $div(A)$ l'ensemble de ses diviseurs de zéro. On pose $1-U(A) = \{1-u\ ;\ u \in U(A)\}$.

A est un *anneau présimplifiable* (3) si $div(A) \subseteq 1-U(A)$. A est un *anneau localement présimplifiable* (4) si A est un produit direct fini d'anneaux présimplifiables.

Les anneaux intègres, les anneaux locaux et les anneaux primaires sont des anneaux présimplifiables [(3) 1-1]. Les anneaux principaux (non nécessairement intègres) [(3)-4-3], les anneaux de Fletcher [(8) Th 15], les anneaux artiniens sont localement présimplifiables, [(3) 1-2].

(1.2) Soit A un anneau localement présimplifiable. D'après [(3) 1-4], A peut s'écrire, de façon unique à l'ordre près des facteurs $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des anneaux présimplifiables. Soit $k \geq 0$ l'entier ainsi défini :

- Si $1 \leq i \leq k$, A_i est intègre et n'est pas un corps.
- Si $k+1 \leq i \leq n$, A_i est non intègre ou est un corps.

On pose $h = n-k \geq 0$. Le couple (k,h) ainsi défini est appelé *le type* de l'anneau localement présimplifiable A.

Nous savons (4), que pour un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes :

I) A est présimplifiable.

II) A est localement présimplifiable et spec(A) est connexe.

Tout anneau localement présimplifiable est semi-connexe, c'est-à-dire ne possède qu'un nombre fini d'idempotents.

Un anneau localement présimplifiable de type (k,h) est présimplifiable si et seulement si k+h = 1.

(1.3) **PROPOSITION**

Soit A *un anneau noethérien localement présimplifiable de type* (k,h), $A = \prod_{i=1}^{k+h} A_i$ *sa décomposition en anneaux présimplifiables,* $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{a}_i$ *un idéal de* A. *Si pour tout* $i = 1,\dots,k+h$, $\mathfrak{a}_i \subset A_i$, *l'anneau* A, *muni de la topologie* $\mathfrak{a}$*-adique, est séparé.*

<u>**Démonstration.**</u> Pour tout $i = 1,\dots,k+h$, puisque A_i est présimplifiable, par définition $\mathrm{div}(A_i) \subsetneq 1-U(A_i)$. Comme $\mathfrak{a}_i \subset A_i$, alors, $\mathfrak{a}_i \cap U(A_i) = \emptyset$ et $(1-\mathfrak{a}_i) \cap (1-\mathcal{U}(A_i)) = \emptyset$.

On a donc : $(1-\mathfrak{a}_i) \cap \mathrm{div}(A_i) = \emptyset$. D'après le théorème de KRULL [(11) p. 216], nécessairement $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{a}_i^n = 0$, donc :

$\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n = 0$.

(1.4) PROPOSITION.

Soit A *un anneau noethérien localement présimplifiable de type* $(k,h), A = \prod_{i=1}^{k+h} A_i$ *sa décomposition en anneaux présimplifiables et* $\mathfrak{P} = A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times \mathfrak{P}_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_{k+h}$ *un idéal premier principal tel que* $0 \neq \mathfrak{P}_i \neq A_i$. *Alors :*

Si $1 \leq i \leq k$, $\mathfrak{P}$ *est de hauteur* 1 ; *si* $k+1 \leq i \leq k+h$, $\mathfrak{P}$ *est de hauteur* 0.

<u>Démonstration.</u> Nous pouvons appliquer à $\mathfrak{P}_i$, le lemme [(3) (1.7)]. Notre assertion en est alors une conséquence immédiate.

(1.5) Soit $p \in A-U(A)$. On dit que :

I) p est *premier* si pA est un idéal premier.

II) p est *irréductible* si pA est maximal parmi les idéaux principaux distincts de A.

III) p est *indécomposable* (3) et (7) si : $p = xy \Rightarrow x \in pA$ ou $y \in pA$.

Ces trois notions sont distinctes (3) ; toutefois :

(1.5) **LEMME.**

Soit A *un anneau localement présimplifiable de type* (k,h).

a) - Tout élément premier est indécomposable.

b) - Indécomposable non nul équivaut à irréductible non nul si et seulement si A *est de type* (1,0) *ou* (0,h).

Démonstration. C'est une vérification de routine, conséquence immédiate des remarques suivantes :

- Tout élément premier - resp. irréductible -, non nul est indécomposable.
- 0 premier $\Longleftrightarrow$ 0 indécomposable $\Longleftrightarrow$ A intègre.
- 0 irréductible $\Longleftrightarrow$ A corps.
- Si $p = (x_1,\ldots,x_{k+h}) \in A-U(A)$, p est premier -resp. irréductible, indécomposable- si et seulement s'il existe $i = 1,\ldots,k+h$; tel que x_i est premier -resp. irréductible, indécomposable- dans A_i, et si, pour $i \neq j\, x_j \in U(A_j)$.
- Si A est un anneau présimplifiable, pour un élément $p \in A^*-U(A)$, p indécomposable équivaut à p irréductible [(3) (1.6)].

(1.7) PROPOSITION.

Soit A *un anneau localement présimplifiable de type* (k,h). *Si* A *vérifie la condition maximale pour les* *idéaux principaux,* A *est atomique* (3) *si et seulement si* A *est de type* (1,0) *ou* (0,h).

Démonstration. La condition est nécessaire d'après (1). Elle est suffisante : Si A est de type (1,0), on est dans les conditions d'applications de [(3)(2.1)] ; Si A est de type (0,h), si $A = \prod_{i=1}^{h} A_i$, alors chaque A_i est présimplifiable et vérifie la condition maximale pour les idéaux principaux ; il est atomique d'après [(3)(2.1)] et il en est de même de A d'après (1).

En particulier, *un anneau de Fletcher* (7) *est atomique si et seulement s'il est de type* (1,0) *ou* (0,h).

§2 - ANNEAUX LOCALEMENT A FACTORISATION UNIQUE.

Les notions d'anneaux de Fletcher (7) et d'anneaux à factorisation unique (3) sont distinctes, [(3) §3]. Nous introduisons ici une notion qui permet de les développer simultanément, et de préciser leurs liens.

(2.1) - On appelle *anneau localement à factorisation unique* tout anneau produit direct fini d'anneaux à factorisation unique. C'est le cas de tout anneau à factorisation unique et de tout anneau de Fletcher [(3) (3.2)].

Comme tout anneau à factorisation unique est présimplifiable, tout anneau localement à factorisation unique est localement présimplifiable.

(2.2) - En utilisant le passage au produit direct, et les propriétés des anneaux à factorisation unique de [(3), §2], on peut énoncer : soit A un anneau localement à factorisation unique de type (k,h).

1) - A est présimplifiable si et seulement si $k+h = 1$.

2) - A est atomique si et seulement si A est de type $(1,0)$ ou $(0,h)$.

3) - A est à factorisation unique si et seulement si $k+h = 1$.

4) - A vérifie la condition maximale pour les idéaux principaux.

5) - Deux éléments de A possèdent un pgcd et un ppcm.

6) - L'intersection de deux idéaux principaux est un idéal principal.

7) - $S^{-1}A$ est localement à factorisation unique.

8) - Le produit direct de deux anneaux localement à factorisation unique est un anneau localement à factorisation unique.

9) - Si $k = 0$, A est semi-local.

<u>(2.3) Remarque</u>. Si A est localement à factorisation unique, et $A_{\mathfrak{M}}$ l'un de ses localisés, alors, d'après (2.2) 7 $A_{\mathfrak{M}}$ est un anneau localement à factorisation unique de type (k,h). Il est local donc présimplifiable [(3)(1.1)]. D'après (2.2) 1, on

a $k+h = 1$; donc $A_{\mathfrak{P}}$ est à factorisation unique d'après 2-2-3

(2.4) PROPOSITION.

Soit A *un anneau localement à factorisation unique de type* <u>(k,h)</u>, $A = \prod_{i=1}^{k+h} A_i$ *sa décomposition en anneaux présimplifiables et* $\mathfrak{P} = A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times \mathfrak{P}_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_{k+h}$ *un idéal premier principal tel que* $0 \neq \mathfrak{P}_i \neq A_i$. *Alors si* $1 < i < k$, $\mathfrak{P}$ *est de hauteur* . *Si* $k+1 < i < k+h$, *est de hauteur* 0.

<u>Démonstration</u>. La hauteur de $\mathfrak{P}$ dans A est égale à la hauteur de $\mathfrak{P}_i$ dans A_i. Si $1 \leq i \leq k$, A_i est un anneau factoriel, donc $\mathfrak{P}_i$ est bien de hauteur 1 $\big((10)$ p. $38\big)$. On peut donc supposer que A est un anneau à factorisation unique non intègre.

Si $P = xA$ est un idéal premier distinct de A, alors $x \notin U(A)$. Soit Q un idéal premier tel que $0 \subsetneq Q \subset P$. Posons $I = \{a \in A \ ; \ ax \in Q\}$. I est un idéal de A et $Q = xI$; mais $xI \subseteq I$; donc $y \in I \Longrightarrow xy \in I \Longrightarrow y \in Q$ d'où $I = Q$.

Alors : $Q = xQ = x^2Q = \ldots = x^nQ = \ldots$ D'une part, puisque A n'est pas intègre, on a $Q \neq 0$. D'autre part, si $q \in Q$, si $q \neq o$, pour tout $n \in \mathbb{N}, qA \subsetneq x^nA$. D'après $\big((3)(2.4)\big)$, l'ensemble des idéaux principaux contenant qA est fini. Donc il existe $n \geq 1$ tel que $x^nA = x^{n+1}A$. D'après $\big((3)(1.6)\big)$, celà entraîne $x^n = 0$ ou $x \in U(A)$. Ces deux éventualités sont impossibles.

L'idéal premier P ne contient strictement aucun idéal **premier** ; il est de hauteur 0.

(2.5) -

1) On dit que deux éléments a,b d'un anneau A sont *S-premiers entre eux* (9) si, pour tout x,d de A :

$ax \in dA$ et $bx \in dA \Rightarrow x \in dA$

On écrit alors $S(a,b) = 1$. Cette notion est stable par association.

On dit que A est un *S-anneau* ou *admet des* S-pgcd si (9) :

$\forall a,b \in A\ \exists a',b',c \in A$ tels que $S(a',b') = 1$ $a = ca'$ et $b = cb'$

On écrit $S(a,b) = c$, et l'on dit que c'est un S-pgcd de a et b.

2) Il est clair (9) que si $S(a,b) = 1$, $x = au$ et $g = bv$ avec $u, v \in U(A)$, Alors $S(x,y) = 1$

(2.6) PROPOSITION.

Soit **A** *un anneau atomique localement présimplifiable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) - A *est un S-anneau*

b) - A *est un anneau de Fletcher*

c) - *Tout irréductible de* **A** *est premier*

d) - A *est factoriel ou principal*

Démonstration. (c) $\Rightarrow$ (d) d'après [(3)(3.4)]. (d) $\Rightarrow$ (b) d'après [(8) Th. 19] (b) $\Rightarrow$ (a) d'après [(9) Th. III-B-3]. Montrons que (a) $\Rightarrow$ (c).

A est un S-anneau atomique ; d'après (1), il est nécessairement de type (1,0) ou (0,h). S'il est de type (1,0), notre assertion n'est autre que [(9) Th. III-A-4]. On peut donc le supposer de type (0,h).

Soit p un irréductible de A. Supposons que $p|ab$ et que $a \in pA$. Montrons que $b \in pA$. On peut supposer que p est de la forme :

$p = (p_1, u_2, u_3, \dots, u_h)$ avec p_1 irréductible dans A_1 et pour $i \geq 2, u_i \in U(A_i)$. Si $p_1 = 0, A_1$ est un corps et p est un élément premier de A. Supposons $p_1 \neq 0$. On a donc $p \neq 0$. D'après (1.6), p est indécomposable dans A.

Puisque A est un S-anneau, il existe a',p' et d dans A tels que $a = da'$, $p = dp'$ et $S(a',p') = 1$.

p étant indécomposable, on a $pA = dA$ ou $pA = p'A$. Le premier cas est exclu car $a \in dA$ et $a \notin pA$. Donc :
$pA = p'A = dp'A$.

Comme $p = dp'$ et que pour tout $i = 1,\dots,h$ $p_i \neq 0$, on a $p_i' \neq 0$. A_i étant un anneau présimplifiable, d'après (1.6), $d_i p_i' A_i = p_i' A_i \neq 0 \Rightarrow d_i \in U(A_i)$ donc $d \in U(A)$.

On en déduit, d'après (2.5)2 que $S(a,p) = 1$. Par définition des S-pgcd :

$ab \in pA, pb \in pA$ et $S(a,p) = 1 \Rightarrow b \in pA$. (c.q.f.d.)

(2.7) COROLLAIRE.

Soit A *un anneau noethérien localement présimplifiable, de type* (1,0) *ou* (0,h). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) - A *est un anneau de Fletcher.*

b) - *Tout idéal premier de hauteur* ≤ 1 *est principal.*

<u>**Démonstration.**</u> (a) $\Rightarrow$ (b) d'après [(8) Th. 19]. Montrons que (b) $\Rightarrow$ (a). D'après (1.7) A est un anneau atomique. D'après (2.6), pour montrer qu'il est de Fletcher, il suffit de prouver que tout élément irréductible est premier. Soit p un irréductible de A. Le résultat est trivial si $p \neq 0$. D'après [(11) p. 238], puisque $p \notin U(A)$, il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 et contenant pA. Par hypothèse, $\mathfrak{P}$ est principal : $\mathfrak{P} = xA$. Alors $0 \subset pA \subsetneq xA \subset A$, entraîne, puisque p est irréductible : $pA = xA$. Donc p est premier.

<u>**(2.8) Remarques.**</u>

1) - *Dans un anneau à factorisation unique, même noethérien, un idéal premier de hauteur* ≤ 1 *n'est pas nécessairement principal.* Par exemple, si K est un corps et $A = K[X^2,X^3]/(X^4)$,

A est à factorisation unique $\big((3)(2.5)\big)$, local, de radical $\mathfrak{m} = (X^2, X^3)$. Comme tout élément de $\mathfrak{m}$ est de carré nul, le seul idéal premier de A est $\mathfrak{m}$. Donc ce dernier est un idéal premier de hauteur 0. Néanmoins, il n'est pas principal.

2) - Un anneau de Fletcher est un S-anneau ; ce n'est pas vrai pour un anneau à factorisation unique. D'après (2.6), *les seuls anneaux à factorisation unique qui soient des S-anneaux sont les anneaux factoriels et les anneaux principaux spéciaux.*

3) - Dans un S-anneau atomique localement présimplifiable, pour un élément $p \in A^*-U(A)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
p est indécomposable ; p est premier ; p est irréductible.

4) - Le fait d'être un S-anneau est une propriété très forte : dans le cas des anneaux atomiques présimplifiables, elle est strictement plus forte que l'unicité des décompositions en facteurs irréductibles.

Pour étudier le transfert à $A[x]$ et $A[[x]]$ de la notion d'anneaux localement à factorisation unique, nous considérons le cas particulier des anneaux à factorisation unique.

(2.9) PROPOSITION.

Soit A *un anneau à factorisation unique.*

I) $A[X]$ *est à factorisation unique si et seulement si* A *est intègre.*

II) *Si* A *est noethérien non intègre,* $A[[X]]$ *n'est pas à factorisation unique.*

<u>Démonstration.</u>

I) Si A est intègre, l'anneau $A[X]$ des polynômes de l'anneau factoriel A est factoriel. Si A est non intègre, $B = A[X]$ est non intègre ; il est clair que $1+X \in B-U(B)$ et que $1+X \notin \mathrm{div}(B)$. Donc : $\mathrm{div}(B) \neq B-U(B)$; B n'est pas à factorisation unique d'après [(3) (2.6)].

II) Soit $a \notin U(A)$; $f = a + \sum_{i \geq 1} X^i \notin U(A[[X]])$. Si A est non intègre, il en est de même de $A[[X]]$. Donc si $A[[X]]$ est à factorisation unique, d'après [(3) (2.6)], on a $f \in \mathrm{div}(A[[X]])$. D'après [(6) Th. 5], il existe $\alpha \in A^*$ tel que $\alpha f = 0$, ce qui est absurde.

<u>(2.10) Remarques.</u>

I) Si A est noethérien à factorisation unique et non intègre, $A[[X]]$ n'est *jamais* à factorisation unique, alors que, dans le cas des anneaux intègres, l'anneau des séries formelles d'un anneau factoriel n'est pas *nécessairement* factoriel (10).

II) Soit A un anneau à factorisation unique.

- Si A est intègre, A est factoriel, donc, semi-simple si et seulement s'il n'est pas semi-local (2).

- Si A est non intègre, A n'est pas semi-simple, car A est local et d'après [(3)(2.6)], rad(A) = div(A) $\neq 0$.

Par contre, un anneau de Fletcher non intègre et à fortiori un anneau localement à factorisation unique peut-être semi-simple.

III) Tout anneau de Fletcher artinien est principal [(8) Th. 19]. *Il n'en est pas nécessairement de même pour un anneau à factorisation unique* : Si $A = K[X^2,X^3]/(X^4)$ (voir (2.8)1), A est à factorisation unique [(3)(2.5)], artinien, mais non principal.

Nous donnons ; ci-dessous, un tableau récapitulant les propriétés des anneaux localement à factorisation unique et de leur deux cas particuliers, les anneaux à factorisation unique et les anneaux de Fletcher.

	Loc. Fact. unique	Fact. Unique	Fletcher
Structure	Produit direct de factoriels et d'anneaux locaux	Intègre ou local	Produit direct de factoriels et princ. Spec.

Localement présimplifiable	Oui	Oui	Oui
Présimplifiable	P.N.	Oui	P.N.
Atomique	ssi type (1,0) ou (0,h)	Oui	ssi type (1,0) ou (0,h)
Cond. Max. Idéaux principaux	Oui	Oui	Oui
Existence des pgcd	Oui	Oui	Oui
Existence des ppdm	Oui	Oui	Oui
Existence de S-pgcd	P.N.	P.N.	Oui
La somme de 2 idéaux Princ. est princ.	P.N.	P.N.	Oui
L'inter. de 2 idéaux Princ. est princ.	P.N.	P.N.	Oui
Transfert à $S^{-1}A$	Oui	Oui	Oui
Transfert à $A(X)$	ssi int.	ssi int.	ssi int.
Transfert à $A((X))$	Non si A noethérien	Non si A noethérien	Non si A noethérien
Transfert au produit direct	Oui	Non	Oui

Transfert au			
produit direct	Oui	Non	Oui
$f_S(A)$ intégrale-			
ment cols dans			
$S^{-1}A$			
Soit P un idéal			
premier $P \neq A$	?	Oui	?
P principal $\Rightarrow$ P			
de hauteur $\leqslant 1$	Oui	Oui	Oui
P de hauteur			
$\leqslant 1 \Rightarrow$ P prin-			
cipal	P.N.	P.N.	Oui
artinien $\Rightarrow$ prin-			
cipal	P.N.	P.N.	Oui
non intègre $\Rightarrow$			
semi-simple	Non	Non	P.N.
contient les			
Bezout atomi.			
loc. Pres.	Oui	P.N.	Oui

P.N. : pas nécessairement.

ssi. : si et seulement si.

BIBLIOGRAPHIE

(1) ALLARD J.C. *Demi-groupes D-atomiques*, C.R.Acad. Sc ; Paris 273 A 1971 p. 661.

(2) BOURBAKI *Algèbre*. Chap. 7.

(3) BOUVIER A. *Anneaux présimplifiables*. Revue Roumaine Math. Pures et Appliquées . A paraître.

(4) BOUVIER A. *Résultats nouveaux sur les anneaux présimplifiables*, C.R.Acad. Sc. Paris 275 1972 A p. 955.

(5) BOUVIER A. *Demi-groupes de type (R). Demi-groupes à factorization unique*. C.R.Acad. Paris 268 Série A 1969 p. 372.

(6) FIELDS D. *Zero divisors and nilpotents elements in power series rings*. Proc. Amer. Math. Soc. 2e 3 1971.

(7) FLETCHER C.R. *Unique factorization rings*. Proc. Camb. Phil. Soc. 1969 65 p. 579.

(8) FLETCHER C.R. *The structure of unique factorization rings*. Proc. Camb. Phil. Soc. 1970 67 p. 535.

(9) HACHE J. *Eléments premiers entre eux dans un anneau commutatif unitaire*. Thèse de 3e cycle 1972 Reims.

(10) SAMUEL P. *Anneaux factoriels*. Soc. Math. Sao-Paulo.

(11) ZARIKI & SAMUEL *Commutative algebra*.

A. BOUVIER
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE

Manuscrit remis le 25 janvier 1973.