

ALAIN BOUVIER

ALAIN FAISANT

Propriétés des demi-groupes de fractions

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971,
tome 8, fascicule 2
, p. 115-136

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_2_A3_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_2_A3_0)

© Université de Lyon, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETES DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Alain BOUVIER - Alain FAISANT

MM. ZARISKY et SAMUEL, [10] ont étudié l'ensemble des éléments d'un anneau A rendus inversibles dans l'anneau de fractions $A[S^{-1}]$, lorsque A est commutatif, unitaire, et intègre, et S une partie multiplicative de A . En partant de cette idée on étudie pour un demi-groupe D l'application $S \longmapsto J(S)$ où $J(S)$ désigne précisément l'ensemble des éléments de D rendus inversibles dans $D[S^{-1}]$ demi-groupe des fractions de D par rapport à S , [7]. On montre comment cette application permet d'étendre aux demi-groupes de fractions d'un demi-groupe quelconque certains résultats connus pour les anneaux dans le cas commutatif intègre : conditions de fermeture de diagrammes, propriétés de transfert pour les homomorphismes, les idéaux, la factorisation ; commutation avec l'équivalence de Rees ; condition suffisante pour que $D[ST^{-1}]$ soit isomorphe à $D[TS^{-1}]$

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de [7] dont ce travail constitue une suite.

§1. THEOREME FONDAMENTAL

Si S est un complexe d'un demi-groupe D , on note φ_S l'homomorphisme canonique de D dans $D[S^{-1}]$.

(1-1) Théorème : Pour tout complexe S d'un demi-groupe D l'homomorphisme $\varphi_S : D \longrightarrow D[S^{-1}]$ est un épimorphisme de la catégorie des demi-groupes.

Démonstration : Supposons que $u \circ \varphi_S = v \circ \varphi_S$ et soit e l'élément neutre de $D[S^{-1}]$.

* $u(e) = v(e)$ En effet, S n'étant pas vide, soit $s \in S$; on a :
d'une part : $u(e)v(e) = u(e)v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1} = u(e)u(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1}$

$$= u(\varphi_S(s)) \cdot v(\varphi_S(s))^{-1} = v(\varphi_S(s))v(\varphi_S(s))^{-1} = v(e)$$

et d'autre part : $u(e)v(e) = u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))v(e)$

$$= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s))v(e)$$

$$= u(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s)) = u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$$

$$= u(e)$$

* $\forall s, s \in S : u(\varphi_S(s))^{-1} = v(\varphi_S(s))^{-1}$ En effet puisque $u(e) = v(e)$:

$$u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s)) = v(\varphi_S(s))^{-1}v(\varphi_S(s)) \text{ donc } u(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$$

$$= v(\varphi_S(s))^{-1}u(\varphi_S(s))$$

$$\begin{aligned}
 \text{soit encore : } u(\varphi_S(s)^{-1}) &= v(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1})u(\varphi_S(s)^{-1}) \\
 &= v(\varphi_S(s)^{-1})u(e) = v(\varphi_S(s)^{-1})v(e) \\
 &= v(\varphi_S(s))^{-1}
 \end{aligned}$$

* $\forall x, x \in D[S^{-1}] : u(x) = v(x)$ En effet x s'écrit

$$x = \varphi_S(x_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(x_n)^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_i = \pm 1 \text{ et } \alpha_i = 1$$

seulement si $x_i \in S$. Donc :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u(\varphi_S(x_1)^{\alpha_1}) \dots u(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}) = v(\varphi_S(x_1)^{-1}) \dots v(\varphi_S(x_n)^{\alpha_n}) \\
 &= v(x)
 \end{aligned}$$

Remarque : Il est immédiat que φ_S est simplifiable dans la sous-catégorie des demi-groupes avec élément neutre, le résultat ci-dessus est strictement plus fort.

§2. L'APPLICATION J

(2.1) Soit D un demi-groupe : à tout complexe S de D on associe le complexe $J(S) = \{x, x \in D, \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])\}$ et l'on désigne par J l'application ainsi définie.

Lorsque $S = \emptyset$ le problème universel (D, S) , [6], admet encore une solution : le couple (D^1, i) où $i : D \longrightarrow D^1$ est l'injection canonique. Ceci permet de prolonger J à l'ensemble $\mathcal{O}(D)$. (il est à remarquer que i n'est pas nécessairement

un épimorphisme)

- . Il est clair que $J(D) = D$, $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ et que $J(S) = \emptyset$ équivaut à $S = \mathcal{U}(D) = \emptyset$
- . $\forall S, S \in \mathcal{S}(D) : S \subseteq J(S)$ et $J(S)$ est une partie stable de D .

(2.2) Proposition : Pour toute partie S de D $J(S)$ est la plus grande des parties T de D telles que $D[T^{-1}] \approx D[S^{-1}]$ par un isomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

Démonstration : . On a $D[J(S)^{-1}] \approx D[S^{-1}]$; en effet φ_S rend inversibles les éléments de $J(S)$ et il existe donc un unique homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_S$; d'autre part $S \subseteq J(S)$ donc pour la même raison il existe τ unique homomorphisme tel que $\tau \circ \varphi_S = \varphi_{J(S)}$. On en déduit $\sigma \circ \tau \circ \varphi_S = \varphi_S$ et $\tau \circ \sigma \circ \varphi_{J(S)} = \varphi_{J(S)}$ donc, (d'après (1.1)) : $\sigma \circ \tau = 1$ et $\tau \circ \sigma = 1$.

. si $\sigma : D[T^{-1}] \longrightarrow D[S^{-1}]$ est un isomorphisme tel que $\sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$

On a $\forall t \in T \quad \varphi_S(t) = \sigma \circ \varphi_T(t) = \sigma(\varphi_T(t)) \in \sigma(\mathcal{U}(D[T^{-1}])) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}])$, donc $t \in J(S)$. Ainsi $T \subseteq J(S)$

(2-3) Corollaire : L'application J est une fermeture sur $\mathcal{S}(D)$.

- . J est extensive car $S \subseteq J(S)$.
- . J est croissante : si $S \subseteq T$ φ_T rend inversibles les éléments de S donc il existe un homomorphisme unique σ tel que $\sigma \circ \varphi_S = \varphi_T$.

Comme σ conserve l'élément neutre, $[6]$, si $x \in J(S)$

$\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ d'où $\varphi_T(x) = \sigma \circ \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[T^{-1}])$ soit : $x \in J(T)$.

. J est idempotente: d'après (2.2) $D[S^{-1}] \approx D[J(S)^{-1}] \approx D[J^2(S)^{-1}]$;
il résulte alors de (2.2) que $J^2(S) \subseteq J(S)$ donc $J^2(S) = J(S)$.

(2.4.) Théorème : Les propriétés suivantes sont équivalentes

$$1) J(S) = J(T)$$

$$2) D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}] \text{ par un isomorphisme } \sigma \text{ tel}$$

$$\text{que } \sigma \circ \varphi_T = \varphi_S$$

$$3) \varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}]) \text{ et } \varphi_T(S) \subseteq \mathcal{U}(D[T^{-1}])$$

Démonstration

$$1) \implies 2) . \text{ car d'après (2.2) : } D[S^{-1}] \approx D[J(S)^{-1}] = D[J(T)^{-1}] \approx D[T^{-1}]$$

$$2) \implies 3) \text{ car } (D[S^{-1}], \varphi_S) \text{ et } (D[T^{-1}], \varphi_T) \text{ sont alors solutions}$$

du même problème universel

$$3) \implies 1) \text{ Si } \varphi_S(T) \subseteq \mathcal{U}(D[S^{-1}]) \text{ on a } T \subseteq J(S) \text{ donc } J(T) \subseteq J(S) \text{ d'après}$$

$$(2.3) . \text{ De même } J(S) \subseteq J(T) .$$

$$(2.5) \text{ Pour tout complexe } S \text{ de } D : J(S. \mathcal{U}(D^1)) = J(S). \mathcal{U}(D^1) = J(S)$$

$$. J(S) \subseteq J(S. \mathcal{U}(D^1)) \text{ d'une part ; d'autre part si } x = y.u \in J(S). \mathcal{U}(D^1) \\ \text{alors } \varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}]) \text{ donc } x \in J(S) .$$

$$. \text{ On a } J(S) \subseteq J(S. \mathcal{U}(D^1)) \text{ car } S \subseteq S. \mathcal{U}(D^1) \text{ et d'après (2.3) . Ré-} \\ \text{ciproquement } J(S. \mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$$

$$\text{car } S. \mathcal{U}(D^1) \subseteq J(S) \text{ et d'après (2.3) .}$$

Définitions : On dit qu'une partie S est un fermé si $S = J(S)$.

Un ouvert est le complémentaire d'un fermé.

(2.6) $\mathcal{U}(D)$ est le plus petit fermé

En effet $\mathcal{U}(D)$ est fermé : si $\mathcal{U}(D) = \emptyset$ on a $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D) = \emptyset$

si $\mathcal{U}(D) \neq \emptyset$ on a $D[\mathcal{U}(D)^{-1}] \approx D$, cf [6]

donc $J(\mathcal{U}(D)) = \mathcal{U}(D)$

$\mathcal{U}(D)$ est le plus petit fermé car pour toute partie $S: \mathcal{U}(D) \subseteq J(S)$.

On ne connaît pas encore la caractérisation des fermés dans le cas général. Remarquons toutefois que si $\langle S \rangle$ est le sous-demi-groupe engendré par $S : \{x, x \in D, xDx \cap \langle S \rangle \neq \emptyset\} \subseteq J(S)$ car si $xyx \in xDx$ alors $\varphi_S(xyx) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ donc $\varphi_S(x) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $x \in J(S)$.

(2.7) Théorème : Soit S un complexe d'un demi-groupe commutatif D :

- 1) $J(S) = \{x, x \in D, xD \langle S \rangle \neq \emptyset\}$
- 2) Les fermés de D sont les parties stables consistantes et les ouverts sont les idéaux premiers.

Démonstration : 1) Si $xy \in \langle S \rangle$ alors $\varphi_S(xy)$ est inversible donc

$\varphi_S(x)$ aussi car D est commutatif et l'on a $x \in J(S)$. Si $x \in J(S)$ il existe $(a, s) \in DX \langle S \rangle$ tel que : $\varphi_S(x) \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1} = e_D[S^{-1}]$

donc il existe $t \in \langle S \rangle$ tel que $xat = st \in \langle S \rangle$

) $J(\emptyset) = \mathcal{U}(D)$ est une partie consistante et stable ;
 si $S \neq \emptyset : xy \in J(S)$ entraîne $\varphi_S(x) \cdot \varphi_S(y) \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$

donc $x, y \in J(S)$.

Si S est stable et consistant soit $x \in J(S)$; il existe d'après 1) $y \in D$ tel que $xy \in \langle S \rangle = S$ d'où $x \in S$ d'après la consistance de S .

Remarque : . La réunion de deux fermés n'est pas nécessairement un fermé car l'intersection de deux idéaux premiers n'est pas nécessairement premier.

(2.8) Corollaire : Soient S et T deux complexes d'un demi-groupe commutatif D . Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) $J(S) = J(T)$

b) Pour tout ouvert $A : A \cap \langle S \rangle \neq \emptyset \iff A \cap \langle T \rangle \neq \emptyset$

a) $\implies$ b) Si $x \in A \cap \langle S \rangle$ comme $\langle S \rangle \subseteq J(S)$ on a $x \in J(S)$ donc $x \in J(T)$ soit, d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $xy \in \langle T \rangle$ et comme A est un idéal : $xy \in A \cap \langle T \rangle \neq \emptyset$

b) $\implies$ a) $\left[J(S) \text{ est un ouvert et } \left[J(S) \cap \langle S \rangle = \emptyset \text{ d'où } \left[J(S) \cap \langle T \rangle = \emptyset \right. \right.$
 c'est à dire que $T \subseteq J(S)$ donc $J(T) \subseteq J(S)$. De même $J(S) \subseteq J(T)$.

§3. PROPRIÉTÉS DE TRANSFERT POUR LES HOMOMORPHISMES.

Soient D et D' deux demi-groupes, S une partie de D , T une partie de D' et $f : D \longrightarrow D'$ un homomorphisme.

(3.1) Les assertions suivantes sont équivalentes

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & D' \\
 \varphi_S \downarrow & & \downarrow \varphi_T \\
 D[S^{-1}] & \dashrightarrow & D'[T^{-1}]
 \end{array}$$

1) il existe un unique homomorphisme $\hat{f}$ conservant l'élément neutre tel que $\hat{f} \circ \varphi_S = \varphi_T \circ f$

2) $f(S) \subseteq J(T)$

Dans ce cas on a $f(J(S)) \subseteq J(T)$

1) $\implies$ 2) Soit $x = f(s) \in f(S) : \varphi_T(x) = \varphi_T \circ f(s) = \hat{f} \circ \varphi_S(s) \in \mathcal{U}(D'[T^{-1}])$
car $\hat{f}$ conserve l'élément neutre, donc $x \in J(T)$.

2) $\implies$ 1) $\varphi_T \circ f$ rend inversibles les éléments de S donc il existe $\hat{f}$ conservant le neutre tel que $\hat{f} \circ \varphi_S = \varphi_T \circ f$. L'unicité de $\hat{f}$ s'en déduit aussitôt. Il est clair que $f(J(S)) \subseteq J(T)$

[3-2] Théorème : a) si f est un épimorphisme, il en est de même pour $\hat{f}$

b) Pour toute partie S de D $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$

c) Si $J(f(S)) = J(T)$ et si f est rétractable, $\hat{f}$ l'est aussi

d) Si de plus $J(f(S)) = f(J(S))$ et si f est surjectif [resp. isomorphisme] il en est de même pour $\hat{f}$

Démonstration :

a) Immédiat puisque φ_S et φ_T sont des épimorphismes (1.1).

b) On a $f(S) \subseteq J(f(S))$ donc d'après (3.1) $f(J(S)) \subseteq J(f(S))$

c) On a toujours (dès que $\hat{f}$ existe) : $f(J(S)) \subseteq J(f(S)) \subseteq J(T)$.

Si de plus $J(f(S)) = J(T)$ et s'il existe r tel que $r \circ f = 1_D$

on a : $r(T) \subseteq r(J(T)) = r(J(f(S)))$ or d'après b)

$r(J(f(S))) \subseteq J(r \circ f(S)) = J(S)$; donc $r(T) \subseteq J(S)$ et d'après (3.1)

il existe $\hat{r}$ unique tel que $\hat{r} \circ \varphi_T = \varphi_S \circ r$ d'où $\hat{r} \circ \hat{f} = 1_{D[S^{-1}]}$

d'après (1.1)

d) Si f est surjectif il suffit de montrer que les éléments de la forme $\varphi_T(y)$ et $\varphi_T(t)^{-1}$ sont atteints par $\hat{f}$:

. $\varphi_T(y) = \varphi_T(f(x)) = \hat{f}(\varphi_S(x))$ car f est surjectif

. si $t \in T \subseteq J(T) = f(J(S))$ donc $t = f(s)$, $s \in J(S)$. D'où :

$$\varphi_T(t)^{-1} = [\varphi_T \circ f(s)]^{-1} = [\hat{f} \circ \varphi_S(s)]^{-1} = \hat{f}[\varphi_S(s)^{-1}]$$

Si f est un isomorphisme f est rétractable et surjectif donc $\hat{f}$ aussi.

Remarque : On a le transfert " f injectif $\implies \hat{f}$ injectif" dans les cas suivants :

. S et T simplifiables dans D et D' respectivement, et

$$f(S) \subseteq J(T)$$

. D et D' commutatifs et $f(J(S)) = J(T)$.

§4. PROPRIÉTÉS DE TRANSFERT POUR LES IDÉAUX

Nous étudions ici les relations entre les idéaux de D et de $D[S^{-1}]$: si I est un idéal de $D[S^{-1}]$, $\varphi_S^{-1}(I)$ peut être vide ; nous nous limiterons donc au cas où $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite ([6] et [8]) ; dans ce cas tout

élément de $D[S^{-1}]$ peut s'écrire $\varphi_S(x) \varphi_S(s)^{-1}$ avec $x \in D$, $s \in \langle S \rangle$.

On note $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'ensemble des idéaux à droite (resp. bilatère) de D , et $\mathcal{D}_S$, $\mathcal{B}_S$ les ensembles analogues pour $D[S^{-1}]$. Lorsque $I \in \mathcal{D}_S$, $\varphi_S^{-1}(I)$ n'est pas vide puisque :

$$\varphi_S(x) \varphi_S(s)^{-1} \in I \implies x \in \varphi_S^{-1}(I).$$

Nous avons à utiliser les applications suivantes :

$r : \mathcal{D}_S \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $r(I) = \varphi_S^{-1}(I)$; $\delta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ définie par $\delta(I) = \varphi_S(I) \cdot D[S^{-1}]$; et $\beta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S$ définie par $\beta(I) = D[S^{-1}] \varphi_S(I) \cdot D[S^{-1}]$.

L'application r est appelée restriction, δ et β sont appelées extensions. Remarquons que $\delta(I) = \{\varphi_S(i) \cdot \varphi_S(s)^{-1}, i \in I, s \in \langle S \rangle\}$ et que $\beta(I) = D[S^{-1}] \cdot \delta(I)$.

Les applications r , δ , β sont des applications croissantes d'ensembles ordonnés par inclusion. De plus :

$$(4.1) \quad \delta \circ r = 1_{\mathcal{D}_S} \text{ et } \beta \circ r = 1_{\mathcal{B}_S}$$

ce qui montre que r est injective, δ et β sont surjectives et que : $\text{card } \mathcal{B}_S \leq \text{card } \mathcal{D}_S \leq \text{card } \mathcal{D}$; en général ces applications ne sont pas bijectives.

(4.2) Théorème : Si $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite et si D vérifie l'une des conditions suivantes :

- . D est noëthérien
- . D est noëthérien à droite

- . D est artinien
- . D est artinien à droite
- . D est simple
- . D est simple à droite

alors $D[S^{-1}]$ vérifie la même propriété

La démonstration se déduit aisément de (4.1). Il résulte également de (4.1) que $r \circ \delta$ et $r \circ \beta$ sont des fermetures dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$. Si $\bar{\mathcal{D}}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ désignant les ensembles d'idéaux fermés pour $r \circ \delta$ et $r \circ \beta$ on a :

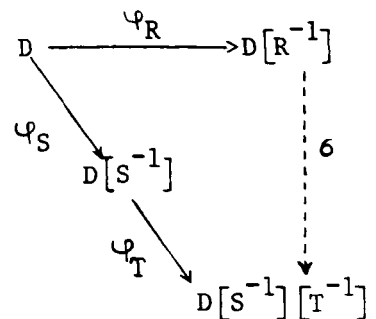
(4.3) Théorème : r et la restriction de δ à $\bar{\mathcal{D}}$ (resp. r et la restriction de β à $\bar{\mathcal{B}}$) sont des isomorphismes réciproques entre les ensembles ordonnés $\bar{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}_S$ (resp. $\bar{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{B}_S$)

(4.4) Si T est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$ contenant $\varphi_S(S)$ et si $R = \varphi_S^{-1}(T)$ alors : $D[R^{-1}]$ est isomorphe à $D[S^{-1}][T^{-1}]$

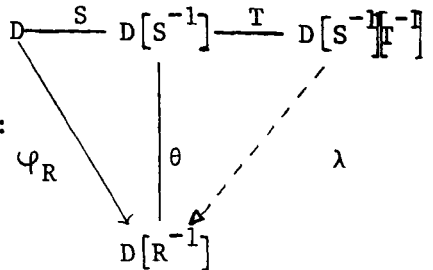
Démonstration

- . $\varphi_T \circ \varphi_S$ rend inversibles les éléments de R car si $x \in R$ on a $\varphi_S(x) \in T$; il existe donc un homomorphisme σ tel que $\sigma \circ \varphi_R = \varphi_T \circ \varphi_S$

- . φ_R rend inversibles les éléments de S , car si $s \in S$ $\varphi_S(s) \in T$ donc $s \in R$; donc il existe θ tel que $\theta \circ \varphi_S = \varphi_R$



. θ rend inversibles les éléments de T : si $t \in T$ on a $t = \varphi_S(x) \cdot \varphi_S(s)^{-1}$; or $\varphi_S(s) \in T$ donc $\varphi_S(x) \in T$ ie $x \in R$; alors : $\theta(t) = \varphi_R(x) \cdot \theta[\varphi_S(s)^{-1}]$ inversible. Il existe donc λ tel que $\lambda \circ \varphi_T = \theta$. Il résulte alors de (1.1) que $\sigma = \lambda^{-1}$ est un isomorphe.



Lorsque P est un idéal premier on note D_P au lieu de $D[(D-P)^{-1}]$: demi-groupe localisé de D en P

(4-5) Théorème : Soit P un idéal premier et propre de $D[S^{-1}]$ et $P' = r(P)$. Alors D_P est isomorphe à $D[S^{-1}]_{P'}$

Démonstration : P étant un idéal premier propre, $T = D[S^{-1}] - P$ est un sous-demi-groupe de $D[S^{-1}]$; comme $P \cap \varphi_S(S) = \emptyset$ on a $\varphi_S^{-1}(T) = D - r(P)$ et l'on applique (4.4)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux bilatères premiers de D ne contenant pas $\langle S \rangle$, et $\mathcal{P}_S$ l'ensemble des idéaux bilatères premiers et propres de $D[S^{-1}]$.

(4.6) Théorème : Lorsque S est simplifiable dans D , ou lorsque D est commutatif, β et r sont des isomorphismes entre les ensembles ordonnés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_S$.

Démonstration : a) Supposons S simplifiable dans D

. si $P \in \mathcal{P}$ P est fermé : soit $x \in r \circ \beta(P)$, d'où $\varphi_S(x) = \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1}$.

avec $p \in P$, soit $\varphi_S(xt) = \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(p) \varphi_S(t)$
 $\varphi_S(p) = \varphi_S(a) \varphi_S(b) \varphi_S(u)^{-1}$

avec $sb = pu \in P$ donc $b \in P$. Alors : $\varphi_S(xtu) = \varphi_S(ab)$ donc $xtu = ab \in P$ et $x \in P$.

. Il suffit de montrer d'après (4.3) que $P \in \mathcal{F} \implies \beta(P) \in \mathcal{F}_S$ et que $P \in \mathcal{F}_S \implies r(P) \in \mathcal{F}$.

- si $P \in \mathcal{F}_S$ $r(P)$ est premier et $r(P) \cap \langle S \rangle = \emptyset$ sinon

$$\beta \circ r(P) = P = D[S^{-1}]$$

- si $P \in \mathcal{F}$ $\beta(P)$ est propre sinon $P = r \circ \beta(P) = D$; $\beta(P)$ est premier : si $\xi \cdot \eta = \varphi_S(a) \varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(b) \cdot \varphi_S(t)^{-1} \in \beta(P)$ alors $\varphi_S(ac) \in \beta(P)$, avec $sc = bt$; donc $ac \in r \circ \beta(P) = P$ et l'on a soit $a \in P$, d'où $\xi \in \beta(P)$, soit $c \in P$ d'où $sc = bt \in P$ et $b \in P$, donc $\eta \in \beta(P)$.

b) Supposons D commutatif et posons $\beta = \delta = e$

. si $P \in \mathcal{F}$ P est fermé : soit $x \in r \circ e(P)$, d'où $\varphi_S(x) = \varphi_S(p) \varphi_S(s)^{-1}$ avec $p \in P$; donc $\varphi_S(xs) = \varphi_S(p)$ et il existe $t \in \langle S \rangle$ tel que $xst = pt \in P$ d'où $x \in P$.

. - si $P \in \mathcal{F}_S$ $r(P) \in \mathcal{F}$ pour la même raison qu'en a)

- si $P \in \mathcal{F}$ $e(P)$ est propre (même raison qu'en a) ; $e(P)$ est premier : si $\xi \eta = \varphi_S(a) \cdot \varphi_S(s)^{-1} \cdot \varphi_S(b) \cdot \varphi_S(t)^{-1} \in e(P)$

alors $\varphi_S(ab) \in e(P)$ donc $ab \in r \circ e(P) = P$ donc $a \in P$ ou $b \in P$ soit $\xi \in e(P)$ ou $\eta \in e(P)$.

§5. COMPOSITION DES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

Soit $\alpha \in D$ un élément fixé ; on pose $\mathcal{F}_\alpha(D) = \{S \in \mathcal{F}(D), S \cap \alpha \neq \emptyset\}$ et l'on munit $\mathcal{F}_\alpha(D)$ des deux lois $(S, T) \longmapsto S.T$ et $(S, T) \longmapsto S \cup T$

qui font de $\mathcal{D}_\alpha(D)$ un demi-anneau. La loi $\cup$ est idempotente et admet l'élément D pour zéro. $\mathcal{D}_\alpha(D)$ est préordonné par la relation $\leq$ définie par $S \leq T$ si $J(S) \subseteq J(T)$.

On pose $D_\alpha = \{D[S^{-1}], S \in \mathcal{D}_\alpha(D)\}$ et l'on définit une application f_α de $\mathcal{D}_\alpha(D)$ dans D_α par $f_\alpha(S) = D[S^{-1}]$; f_α étant bijective on peut transporter sur D_α la structure de $\mathcal{D}_\alpha(D)$:

$$D[S^{-1}] \cdot D[T^{-1}] = D[(ST)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \cup D[T^{-1}] = D[(S \cup T)^{-1}]$$

$$D[S^{-1}] \leq D[T^{-1}] \text{ si } J(S) \subseteq J(T)$$

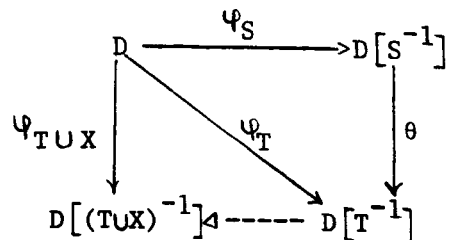
Soit $\mathcal{R}_\alpha$ l'équivalence sur D_α associée au préordre $\leq$:
 $D[S^{-1}] \mathcal{R}_\alpha D[T^{-1}]$ si $J(S) = J(T)$ Il résulte de (2.4) que
 $\frac{D[S^{-1}]}{D[S^{-1}]} \mathcal{R}_\alpha \frac{D[T^{-1}]}{D[T^{-1}]}$ si $D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}]$. Posons $\Delta_\alpha = D_\alpha / \mathcal{R}_\alpha$ et notons $\frac{D[S^{-1}]}{D[S^{-1}]}$ la classe de $D[S^{-1}]$ modulo $\mathcal{R}_\alpha$.

(5.1) Théorème : Pour tout $\alpha \in D$ on a les propriétés suivantes :

- $\mathcal{R}_\alpha$ est compatible avec les deux lois de $\mathcal{D}_\alpha$
- Dans Δ_α les deux lois $\cdot$ et $\cup$ coïncident
- Δ_α est une bande commutative ayant $\frac{D[D^{-1}]}{D[D^{-1}]}$ pour zéro et $\frac{D[\langle \alpha \rangle^{-1}]}{D[\langle \alpha \rangle^{-1}]}$ pour élément neutre.

Démonstration :

- Compatibilité avec la loi $\cup$:
 supposons $D[S^{-1}] \approx D[T^{-1}]$ et montrons que pour tout $X \in \mathcal{D}_\alpha(D)$
 $D[(S \cup X)^{-1}] \approx D[(T \cup X)^{-1}]$: il



existe par hypothèse un isomorphisme θ tel que $\theta \circ \varphi_S = \varphi_T$, d'autre part φ_{TUX} rend inversibles les éléments de T , donc il existe ϕ tel que $\phi \circ \varphi_T = \varphi_{TUX}$. Il s'ensuit que φ_{TUX} rend inversibles les éléments de SUX : c'est évident pour les éléments de X , et si $s \in S$ $\varphi_{TUX}(s) = \phi \circ \theta \circ \varphi_S(s)$ est inversible. De même φ_{SUX} rend inversibles les éléments de TUX d'où l'isomorphisme d'après (2.4)

. compatibilité avec la loi . : notons d'abord que pour tout $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D)$ on a $\alpha \in J(S)$ car $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D) \implies \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \alpha^n \in S$ donc $\varphi_S(\alpha^n)$ est inversible dans $D[S^{-1}]$ et $\varphi_S(\alpha)$ aussi, ie $\alpha \in J(S)$. Pour montrer la compatibilité de la loi. nous allons prouver que $\forall S, T \in \mathfrak{D}_\alpha(D) : D[(ST)^{-1}] \simeq D[(SUT)^{-1}]$ ce qui démontrera aussi b).

- φ_{SUT} rend inversibles les éléments de ST donc $J(ST) \subseteq J(SUT)$

- φ_{ST} rend inversibles les éléments de $SUT : T \in \mathfrak{D}_\alpha(D) \implies \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \alpha^n \in T$

si $s \in S$ on a $\varphi_{ST}(s) = \varphi_{ST}(s\alpha^n) \varphi_{ST}(\alpha^n)^{-1}$ inversible. De même $S \in \mathfrak{D}_\alpha(D)$ donc $\exists p \in \mathbb{N}^* \alpha^p \in S$ et si $t \in T$ on a $\varphi_{ST}(t) = \varphi_{ST}(\alpha^p)^{-1}$.

$\varphi_{ST}(\alpha^p t)$ inversible

L'isomorphisme résulte alors de (2.4).

La propriété c) s'en déduit aisément. Notons la conséquence suivante de b) :

(5.2) Corollaire : Si S et T sont deux complexes de D et s'il existe α dans D tel que S et T appartiennent à $\mathfrak{D}_\alpha(D)$ alors $D[(ST)^{-1}]$ est isomorphe à $D[(TS)^{-1}]$

§6. DEMI-GROUPES DE FRACTIONS D'UN DEMI-GROUPE ATOMIQUE

Soit D un demi-groupe commutatif, $\mathcal{R}$ l'équivalence de Green sur D , [5] ; on dit que $p \in D - \mathcal{U}(D)$ est irréductible si $a|p$ ("a divise p") implique soit $a \in \mathcal{U}(D)$, soit $a \mathcal{R} p$. On note $D^* = D - \{0\}$ si D possède un zéro, et $D^* = D$ sinon. D est atomique si tout élément de D^* admet une factorisation complète c'est-à-dire peut s'écrire $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec $\forall i \ p_i$ irréductible et $\alpha_i \in \mathbb{N}$. On appelle base de D un système représentatif d'éléments irréductibles, si B est une base d'un demi-groupe atomique D tout élément $d \in D$ s'écrit $u \prod_{p \in B} p^{\alpha_p}$ avec $u \in \mathcal{U}(D^1)$, $\alpha_p \in \mathbb{N}$ presque tous nuls : S est un complexe de D on pose $M(S) = J(S) \cap B$ et $P(S) = \langle M(S) \rangle$. Remarquons que $M(S) \subseteq P(S) \subseteq J(S)$.

(6.1) Soit D un demi-groupe atomique et S un complexe de D^* .

On a : $S \subseteq P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)$

Soit $s \in S$ et B une base de D ; comme $s \in D^*$ on a $s = u p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ donc : $\varphi_S(s) = \varphi_S(u) \varphi_S(p_1)^{\alpha_1} \dots \varphi_S(p_n)^{\alpha_n} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$ et $\forall i \ \varphi_S(p_i)$

inversible, soit $p_i \in J(S)$ donc $p_i \in J(S) \cap B$ et

$s = u \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \in P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)$.

(6.2) Proposition : Soit D un demi-groupe atomique et S un complexe de D^* . Les demi-groupes $D[S^{-1}]$, $D[J(S)^{-1}]$, $D[N(S)^{-1}]$, $D[P(S)^{-1}]$ sont isomorphes.

Démonstration :

. d'après (2.2) $D[S^{-1}] \simeq D[J(S)^{-1}]$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ d'après (2.5) et (6.1) : } S \subseteq P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1) &\subseteq J(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1) \\ &= J(S) \cdot \mathcal{U}(D^1) \cup \mathcal{U}(D^1) = J(S) \end{aligned}$$

J étant croissante et idempotente : $J(S) \subseteq J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)) \subseteq J(S)$
soit $J(S) = J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1))$.

$$\begin{aligned} \text{Appliquons à nouveau (2.5) : } J(S) &= J(P(S)^1 \cdot \mathcal{U}(D^1)) = J(P(S)^1) \\ &= J(P(S)) \text{ d'après [6] .} \end{aligned}$$

Par conséquent $D[S^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$ (d'après (2.4)). Comme
 $P(S) = \langle M(S) \rangle$ on a : $D[M(S)^{-1}] \simeq D[P(S)^{-1}]$

Notations : $\mathfrak{S}^*(B) = \mathfrak{S}(B) - \{\emptyset\}$; avec les notations du §5 :

$\mathfrak{S}(D) = \{D[S^{-1}] ; S - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset\}$ On dit que $p \in D - \mathcal{U}$ est premier

si $p \mid ab \implies p \mid a$ ou $p \mid b$.

(6.3) Théorème : Soit D un demi-groupe atomique simplifiable de base B dans lequel tout élément irréductible est premier. Alors $\mathfrak{S}^*(B)$ et $\mathfrak{S}(D)$ sont équipotents.

Démonstration : . On définit $\psi : \mathfrak{S}(D) \longrightarrow \mathfrak{S}^*(B)$ par

$$\psi(D[A^{-1}]) = J(A) \cap B = M(A)$$

C'est bien une application car $D[A^{-1}] = D[C^{-1}] \iff J(A) = J(C)$

donc $J(A) = J(C) \cap B$; $J(A) \cap B \in \mathfrak{S}^*(B)$ car par définition de α_n

$\mathfrak{S}(D) : A - \mathcal{U}(D) \neq \emptyset$; soit $x \in A - \mathcal{U}(D)$ donc $x = \uparrow_1^{\alpha_1} \dots \uparrow_n^{\alpha_n}$

et du moins l'un des α_i est distinct de zéro donc $p_i \in J(A) \cap B$
et $J(A) \cap B \neq \emptyset$.

. soit $\varphi : \mathfrak{S}^*(B) \longrightarrow \mathfrak{S}(D)$ définie par

$$\varphi(A) = D[A^{-1}]. \text{ On a bien } \varphi(A) \in \mathfrak{S}(D) \text{ car } B \cap \mathcal{U}(D) = \emptyset \text{ donc}$$

$$A - \mathcal{U}(D) = A \neq \emptyset.$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ d'après (6.2) : } \varphi \circ \psi \left(\overline{D[A^{-1}]} \right) &= \varphi(J(A) \cap B) \\ &= D[M(A)^{-1}] = D[A^{-1}] \end{aligned}$$

$\cdot \quad \psi \circ \varphi(A) = \psi(D[A^{-1}]) = J(A) \cap B$. Montrons que $A = J(A) \cap B$:
il est immédiat que $A \subseteq J(A) \cap B$; soit $p \in J(A) \cap B$ donc $p \in B$ et
d'après (2.7) il existe $y \in D$ tel que $py \in \langle A \rangle$. Donc $py = q_1 q_2 \dots q_n$
avec $q_i \in A$. p est irréductible donc premier. Par conséquent :
 $\exists i \ p \mid q_i$. D'où $p \mathcal{R} q_i$. Comme $p \in B$ et $q_i \in B$ on a $p = q_i \in A$.

Donc $\psi \circ \varphi(A) = A$.

§7. DEMI-GROUPES A FACTORISATION UNIQUE

Soit B une base d'un demi-groupe atomique D : on dit que
 D est à factorisation unique si : $\forall d \in D^* : d = u p_1 p_2 \dots p_m = v q_1 q_2 \dots q_n$
implique $n = m$ et $\forall i \ p_i \mathcal{R} q_i$.

Dans ce cas tout élément d de D^* peut s'écrire $d = u \prod_{p \in B} p^{v_p(d)}$
avec $v_p(d) \in \mathbb{N}$ et dans ce produit seul un nombre fini de $v_p(d)$
n'est pas nul. [3] On démontre, cf [3], que : $xy \neq 0 \implies v_p(xy)$
 $= v_p(x) + v_p(y)$.

(7.1) Théorème : Soit D un demi-groupe à factorisation unique.
Alors pour tout sous-demi-groupe S de D
 $D[S^{-1}]$ est à factorisation unique.

Démonstration

$\cdot$ d'après [3] il suffit de trouver un sous-ensemble A de $D[S^{-1}]$
tel que tout élément de $D[S^{-1}]$ s'écrive de façon unique à
"une unité près" comme produit fini d'éléments de A . Si card

$D[S^{-1}] = 1$ le résultat est évident. Supposons donc $\text{card } D[S^{-1}] > 1$.

. Soit B une base de D , $B_0 = \{p \in B, \exists s \in S \text{ } ps = 0\}$ et

$$B' = B - (B_0 \cup J(S))$$

. par définition de B et $J(S)$: $\forall s \in S \text{ } s = u \prod_{p \in B \cap J(S)} p^{v_p(s)}$

. Cherchons les unités de $D[S^{-1}]$ (on note $\frac{d}{s}$ au lieu de

$\varphi_S(d) \varphi_S(s)^{-1}$). Si $\frac{d}{s}$ est inversible il existe $\frac{b}{t}$ tel que

$$\frac{d}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{s}{s} \text{ donc } \exists \sigma \in S \text{ tel que } \sigma db s = \sigma s^2 t \text{ } S. \text{ Comme } \text{card } D[S^{-1}] > 1$$

on a $S \subseteq D^*$ donc $\sigma s^2 t \neq 0$ donc si $p \in B$: $v_p(d) + v_p(b) = v_p(s) + v_p(t)$;

et si $p \notin J(S)$: $v_p(d) = v_p(b) = 0$. Donc si $\frac{d}{s}$ est une unité :

$\forall p \notin J(S) \text{ } v_p(d) = 0$. Réciproquement si $\forall p \notin J(S) \text{ } v_p(d) = 0$:

$$\varphi_S(d) = \varphi_S(u) \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d)} \text{ donc } \frac{d}{s} \text{ est inversible.}$$

Les unités de $D[S^{-1}]$ sont donc les fractions de la forme

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u) \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec } u \in \mathcal{U}(D^1).$$

. Soit $\frac{d}{s} \in D[S^{-1}]$ donc $d \neq 0$ et $s \neq 0$ et l'on peut écrire

$$\frac{d}{s} = \varphi_S(u) \varphi_S(v)^{-1} \prod_{p \in B} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec } u, v \in \mathcal{U}(D^1).$$

Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S$: $\forall p \in B_0 \text{ } v_p(d) = v_p(s) = 0$ et l'on

$$\text{peut écrire } \frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \text{ avec}$$

$u, v \in \mathcal{U}(D^1)$. Puisque $\frac{d}{s} \neq 0$ et que $s \in S : \forall p \in B, v_p(d) = v_p(s) = 0$

et l'on peut écrire $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)}$ avec

$$\omega = \frac{u}{v} \prod_{p \in B \cap J(S)} \varphi_S(p)^{v_p(d) - v_p(s)} \in \mathcal{U}(D[S^{-1}])$$

Pour $p \in B' \quad \alpha_p = v_p(d) - v_p(s) = v_p(d) \geq 0$ donc $\frac{d}{s} = \omega \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\alpha_p}$

. L'écriture précédente est unique à une unité près : si

$\frac{d}{s} = \omega' \prod_{p \in B'} \varphi_S(p)^{\beta_p}$, ω' unité, alors $\omega' = \frac{a}{t}$ avec $\forall p \notin B \cap J(S)$

$v_p(a) = 0$. Si $d' = \prod_{p \in B'} p^{\beta_p}$ on a $\frac{d}{s} = \frac{ad'}{t}$ donc il existe

$\sigma \in S$ tel que $\sigma dt = \sigma ad's$. Mais $\frac{d}{s} \neq 0$ et $\sigma t \in S \Rightarrow \sigma dt \neq 0$, donc

si $p \in B : v_p(d) + v_p(t) = v_p(a) + v_p(d') + v_p(s)$; si $p \notin J(S) :$

$v_p(d) = v_p(d') = \beta_p$, d'où le résultat.

Remarque : On a démontré que $\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'} \implies \forall p \in B' \quad v_p(d) = v_p(d')$

§8. AUTRES PROPRIÉTÉS

[8.1] Proposition : Soit D un demi-groupe commutatif avec élément neutre e_D , et S un sous-demi-groupe de D^* .

Si (D, S) est de type (R) [2], les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $S \subseteq \mathcal{U}(D)$

b) φ_S est un isomorphisme

c) φ_S est surjectif

Démonstration : a) $\implies$ b) d'après [6]

b) $\implies$ c) évident

c) $\implies$ a) $e_D \in S$ car si $s \in S$ $se_D = s$ et comme $S \subseteq D^*$ et (D, S) est de type (R) on en déduit $e_D = e_S \in S$. Soit $s \in S$; comme φ_S est surjectif, $\exists x \in D : \varphi_S(x) = \varphi_S(s)^{-1}$, donc il existe $t \in S$ tel que $txs = te_D = t$; (D, S) étant de type (R) on a $xs = e_D = e_S$, puisque $S \subseteq D^*$; donc $s \in \mathcal{U}(D)$.

(8.2) Commutation avec l'équivalence de Rees

Soit D un demi-groupe commutatif, I un idéal et S un complexe de D ; $\alpha : D \longrightarrow D/I$, $\beta : D \longrightarrow D[S^{-1}]$, $\varphi' : D/I \longrightarrow D/I[\alpha(S)^{-1}]$ les homomorphismes canoniques. Alors les demi-groupes $D/I[\alpha(S)^{-1}]$ et $D[S^{-1}]/e(I)$ sont isomorphes.

Démonstration : D'après (3.2) il existe $\bar{\alpha}$ surjectif tel que $\bar{\alpha} \circ \varphi = \varphi' \circ \alpha$. Montrons que l'équivalence d'homomorphisme de $\bar{\alpha}$ est l'équivalence de Rees dans $D[S^{-1}]$ modulo $e(I)$:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D/I \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ D[S^{-1}] & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & D/I[\alpha(S)^{-1}] \end{array}$$

. Si $x = \varphi(a) \varphi(s)^{-1}$, $y = \varphi(b) \varphi(t)^{-1}$ et $\bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ on a $\varphi'(\alpha(at)) = \varphi'(\alpha(bs))$ donc il existe $u \in \langle \alpha(S) \rangle = \langle S \rangle$ tel que $u \circ \alpha(at) = u \circ \alpha(bs)$; si $u = \alpha(\sigma)$ avec $\sigma \in \langle S \rangle$: $\alpha(\sigma at) = \alpha(\sigma bs)$ donc ou bien $\sigma at = \sigma bs$ d'où $x = y$

ou bien $\sigma at, \sigma bs \in I$ d'où $x, y \in e(I)$

. De même si $x \equiv y \pmod{e(I)} : \bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(y)$ D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI : Algèbre commutative - Ch. 2 - Hermann
- [2] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - C.R. Acad. Sc.
Paris t 268 (1969) p. 372 - 375
- [3] A. BOUVIER : Demi-groupes de type (R) - Thèse de 3ème Cycle - Lyon
- [4] A. BOUVIER et A. FAISANT : Quelques propriétés des demi-groupes
de fractions - Séminaire P. Lefebvre (Lyon 1968/69) Exp. 14
- [5] A.G. CLIFFORD and G.B. PRESTON : The algebraic theory of semi-
groups - Math. Surveys Amer. Math. Soc.
- [6] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de fractions - Publications
du dép. de Math. de Lyon 1969 T 6-1 p. 73-85
- [7] A. FAISANT : Sur les demi-groupes de quotients - C.R. Acad.
Sc. Paris t. 268 (1969) p. 521-523
- [8] P. LEFEBVRE : Semi-groups and rings of fractions - University
of Tennessee (1968) Knoxville U.S.A.
- [9] P. SAMUEL : Anneaux factoriels - Soc. de Math. de São-Paulo
- [10] ZARISKY and P. SAMUEL : Commutative algebra - Von Nostrand

Manuscrit remis en janvier 1970

A. BOUVIER Maître-assistant
A. FAISANT Assistant
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard
43, boulevard du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE