

ALAIN BOUVIER

Demi-groupes avec base et demi-groupes atomiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1971,
tome 8, fascicule 1
, p. 23-54

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1971__8_1_23_0>

© Université de Lyon, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEMI-GROUPES AVEC BASE ET DEMI-GROUPES ATOMIQUES.

Alain BOUVIER

Ce travail est une *étude comparative* de différentes notions de demi-groupes avec bases, d'une part entre elles d'autre part avec la notion de demi-groupes atomiques que nous avons introduits dans [3].

Dans la première partie, nous comparons entre eux les travaux de Tamura, Kasahara, Aubert, Knight et Storey. Nous montrons l'identité des demi-groupes avec base au sens de Tamura et au sens de Aubert (nous les appelons TA-demi-groupes) ainsi que l'identité des demi-groupes avec base au sens de Knight et Storey et au sens de Kasahara (nous les appelons KSK-demi-groupes).

Nous introduisons la notion de demi-groupes à longueur maximum de factorisation (demi-groupes vérifiant la condition (*) de Kasahara) et les demi-groupes équidivisibles présentés par Knight et Storey comme généralisation des demi-groupes libres. Nous montrons que tout demi-groupe libre est équidivisible et

à longueur maximum de factorisation, que ces derniers sont des KSK-demi-groupes et que les KSK-demi-groupes sont des TA-demi-groupes. Nous donnons des exemples montrant que les réciproques sont inexactes et des conditions suffisantes pour que certains des demi-groupes présentés soient des demi-groupes libres.

Dans la seconde partie, nous commençons par étudier les *demi-groupes atomiques à gauche* et à préciser leurs liens avec les TA-demi-groupes à gauche. Nous appelons *demi-groupe atomique* tout demi-groupe atomique à gauche et à droite. Nous démontrons que le demi-groupe simple de BRUCK $\mathcal{G}(D)$ est atomique si et seulement si D est un groupe, ce qui prouve, en particulier, l'atomicité du demi-groupe bicyclique.

Nous examinons ensuite les demi-groupes atomiques forts. Nous montrons que tout demi-groupe de type (R) fini est soit un groupe soit un demi-groupe atomique fort avec zéro, puisque tout KSK-demi-groupe est atomique fort, nous donnons des conditions suffisantes pour que les notions des KSK-demi-groupes, de TA-demi-groupes, de demi-groupes atomiques à gauche, de demi-groupes atomiques et de demi-groupes atomiques forts soient équivalentes.

PREMIERE PARTIE : Demi-groupes avec bases

§1 - Demi-groupes libres - Demi-groupes équidivisibles

Soit X un ensemble non vide ; on appelle *demi-groupe libre sur l'ensemble X* tout couple (D, d) , où D est un demi-groupe et $d : X \rightarrow D$ une application, tel que si (D', d') est un couple

formé d'un demi-groupe D' et d'une application $d' : X \longrightarrow D'$, il existe un unique homomorphisme de demi-groupes $f : D \longrightarrow D'$ tel que $d' = f \circ d$. Par abus de langage, on dit que D est un demi-groupe libre sur X . Le demi-groupe libre sur un ensemble X est unique à un isomorphisme près.

On note $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des suites finies d'éléments de X . C'est un demi-groupe sur X pour la loi définie par juxtaposition :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_p) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$$

On identifie X à une partie de $\mathcal{F}_X$ au moyen de l'injection :

$d_x : x \longmapsto (x)$. On dit qu'un demi-groupe D est un *demi-groupe libre* s'il existe un ensemble X tel que D soit isomorphe à $\mathcal{F}_X$. Les éléments d'un demi-groupe libre sont appelés des *mots*.

(I-1) Lemme : Un demi-groupe D est libre si et seulement s'il contient un complexe B tel que :

- B engendre D (on écrit $\langle B \rangle = D$)
- Si les a_i et les b_j sont des éléments de B alors $a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_p$ entraîne $n=p$ et si $1 \leq i \leq n$ $a_i = b_i$

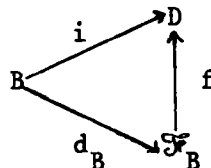
Démonstration

- Si $D \cong \mathcal{F}_X$ il suffit de prendre $B = X$.

- Soit B un complexe de D vérifiant les deux conditions de l'énoncé, et soit $i : B \longrightarrow D$ l'injection canonique.

Par définition du demi-groupe libre sur B , il existe un unique homomorphisme de demi-groupes $f : \mathcal{F}_B \longrightarrow D$ tel que $f \circ d_B = i$.

Puisque f est un homomorphisme de demi-groupes :



$$f((b_1, \dots, b_n)) = f((b_1) \dots (b_n)) = f_{oD}(b_1) \dots f_{oD}(b_n) = b_1 \dots b_n.$$

Comme B engendre D, f est surjective. f est injective, car

$$f((b_1, \dots, b_n)) = f((c_1, \dots, c_p)) \text{ entraîne } b_1 \dots b_n = c_1 \dots c_p$$

d'où $n = p$ et si $1 \leq i \leq n$ $b_i = c_i$.

Soit D un demi-groupe. On note π l'homomorphisme surjectif de $\mathcal{F}_D$ sur D défini par $\pi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 \dots a_n$. Il vérifie $\pi_{oD} = 1_D$. Lorsque $\pi(w) = d$, on dit que le mot w est une factorisation de d. Si $w = (a_1, \dots, a_n)$ $n = l(w) \in \mathbb{N}^*$ est appelé longueur du mot w. $l : \mathcal{F}_D \rightarrow \mathbb{N}^*(+)$ est un homomorphisme de demi-groupes.

Définition : On dit que le mot $w' = (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{F}_D$ raffine le mot $w = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{F}_D$ (on écrit $w' \leq w$) s'il existe des entiers naturels $i_0, i_1, \dots, i_n$ tels que $i_0 = 0 < i_1 < i_2 \dots < i_{n-1} < m$ et tels que

$$a_1 = b_1 b_2 \dots b_{i_1} ; a_2 = b_{i_1+1} b_{i_1+2} \dots b_{i_2} ; \dots,$$

$$a_n = b_{i_{n-1}+1} b_{i_{n-1}+2} \dots b_m.$$

On remarque que :

$$(+)\ w' \leq w \text{ entraîne } \pi(w') = \pi(w) \text{ et } l(w') \geq l(w).$$

(I-2) Lemme

La relation $\leq$ est un ordre partiel compatible sur $\mathcal{F}_D$.

Démonstration : Cette relation est réflexive et transitive. Elle est antisymétrique car si $w' = (b_1, \dots, b_m)$ raffine $w = (a_1, \dots, a_n)$ avec les notations introduites plus haut, compte tenu de (+), on

$a_n = p$, d'où $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{n-1}$ ce qui entraîne

$$a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

- Cet ordre n'est pas nécessairement total : dans

$\mathfrak{F}_D(\cdot)$, $w = (2, 3)$ et $w' = (1 ; 4)$ sont incomparables puisque $\pi(w) \neq \pi(w')$.

- Il est compatible ; vérifions le à gauche. Si

$w' = (b_1, \dots, b_m)$ raffine $w = (a_1, \dots, a_n)$, si $w' = (c_1, \dots, c_p)$,

avec les notations introduites plus haut :

$$c_1 = c_1; \dots; c_p = c_p ; a_1 = b_1 b_2 \dots b_{i_1} ; \dots; a_n = b_{i_{n-1}+1} b_{i_{n-1}+2} \dots b_m.$$

Ce qui montre que le mot $w'w'$ raffine le mot $w''w$.

Remarque : On verrait de la même façon que si $(a_1, \dots, a_n)$ raffine $(b_1, \dots, b_p)$, alors $(a_1, \dots, a_n, x)$ raffine $(b_1, \dots, b_p, x)$. (++)

Notations. Si le demi-groupe D possède un élément neutre bilatère, on le note e_D . Dans ce cas, $U_d(D)$, -respectivement $U_g(D)$ -désigne l'ensemble des éléments de D inversibles à droite, -respectivement à gauche- Sinon, on pose : $U_d = U_g = \emptyset$.

Si $w \in \mathfrak{F}_D$, on note $u(w)$ le nombre de lettres de w appartenant à U_d . L'application $u : \mathfrak{F}_D \longrightarrow \mathbb{N}(+)$ est un homomorphisme de demi-groupes. On pose $a(w) = l(w) - u(w)$.

(I-3) Lemme

a) - L'application $a : \mathfrak{F}_D \longrightarrow \mathbb{N}(+)$ est un homomorphisme de demi-groupes.

b) - Si w' raffine w alors $a(w') \geq a(w)$.

Démonstration. a) -a, différence de deux homomorphismes à valeurs dans un demi-groupe commutatif est un homomorphisme de demi-groupe.

b) - Si $w' = (b_1, \dots, b_m)$ raffine $w = (a_1, \dots, a_n)$, il existe des entiers naturels $i_0 = 1 < i_1 < \dots < i_n = m$, tels que si $1 \leq j \leq n$ alors :

$$a_j = b_{i_{j-1}+1} b_{i_{j-1}+2} \dots b_{i_j}$$

Comme U_d est stable, si $a_j \notin U_d$, l'un au moins des termes de sa factorisation n'appartient pas à U_d . Dans ce cas, on a donc :

$$a(a_j) = 1 \text{ et } a((b_{i_{j-1}+1}, b_{i_{j-1}+2}, \dots, b_{i_j})) \geq 1$$

à droite, si a_j appartient à v_d ,

$$\text{soit : } a((b_{i_{j-1}+1}, \dots, b_{i_j})) \geq a(a_j)$$

Si $a_j \in U_d$, alors $a(a_j) = 0$;

Dans ce cas, on a encore $a((b_{i_{j-1}+1}, \dots, b_{i_j})) \geq a(a_j)$. Comme a est homomorphisme, finalement : $a(w') \geq a(w)$.

Notations. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ désignent les équivalences de Green (5), définies sur D par $a\mathcal{R}b \iff aD^1 = bD^1$ et $a\mathcal{L}b \iff D^1a = D^1b$. $\mathcal{D}$ est l'équivalence associée au préordre $\preceq_D$ défini sur D par $a_D | b \iff bD^1 \subseteq aD^1$, appelé relation de divisibilité à gauche (2).

On note S_n le groupe symétrique de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Définition. : On dit que deux mots $w = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $w' = (b_1, \dots, b_p)$ de $\mathfrak{F}_D^1$ sont isomorphes à gauche (on écrit $w \sim w'$) si :

- $n = l(w) = p = l(w')$ et $\pi(w) = \pi(w')$.

- Il existe $\xi \in S_n$ tel que pour tout i si $1 \leq i \leq n$ alors $a_i \mathcal{R} b_{\tau i}$.

La relation " $\sim$ " est une congruence sur $\mathcal{F}_D$. U_d est vide ou est une classe modulo $\mathcal{R}$; donc $a_i \in U_d \iff b_{\tau i} \in U_d$;

(I-4) Lemme : Si w et w' sont deux mots isomorphes à gauche, alors :

$$u(w) = u(w') \text{ et } a(w) = a(w').$$

Définition : Soient a, b, c, d quatre éléments d'un demi-groupe D . On dit que $s \in D^1$ est solution de l'équation $ab=cd$ si $as=c$ et $sd=b$ ou si $a=cs$ et $sb=d$.

Lorsque w est un raffinement connu à w' et w'' , on écrit : $w \in w' \wedge w''$.

(I-5) Lemme (7) : Dans un demi-groupe D , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- a)- Deux factorisations de tout élément de D possèdent un raffinement commun.
- b)- Toute équation $ab = cd$ possède une solution dans D^1 .

Définition : On appelle demi-groupe équidivisible (7) tout demi-groupe qui vérifie les assertions équivalentes du lemme I-5

On remarque que si D est équidivisible, il en est de même de D^1 et D^0 .

(I-6) Théorème : (Knight et Storey)

Tout demi-groupe libre est équidivisible

Démonstration :

Soit $wv = w'v'$ une équation dans $\mathcal{F}_X$ avec $w = (x_1, \dots, x_n)$,

$v = (y_1, \dots, y_m)$, $w' = (z_1, \dots, z_p)$ et $v' = (t_1, \dots, t_q)$. On a donc :

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (z_1, \dots, z_p, t_1, \dots, t_q).$$

$n + m = p + q$, les lettres correspondantes des deux mots sont deux à deux égales.

+ si $n = p$ alors $m = q$ et $1 \in \mathcal{D}_X^{p1}$ est solution.

+ si $n < p$ alors $(z_{n+1}, \dots, z_p)$ est solution.

+ si $n > p$ alors $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ est solution.

La réciproque de ce théorème est inexacte.

§2-Demi-groupes de Knight-Storey-Kasahara.

(2- I) Lemme : Si B est un complexe d'un demi-groupe D , si

$\langle B \rangle = D$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) - $B = D - D^2$

(b) - $B \subseteq D - D^2$

(c) - $n > 1$ entraîne $B^n \cap B = \emptyset$

Démonstration :

Il est clair que $(a) \implies (b) \implies (c)$ montrons $(c) \implies (a)$. D'une part, si $b \in B$ et si $b = dd'$, comme $D = \langle B \rangle$ on aurait

$b(b_1 b_2 \dots b_n)(c_1 c_2 \dots c_p)$ avec b_i et c_j dans B , donc $b \in B^{n+p}$ avec

$n+p \geq 2$ ce qui est contradictoire ; par conséquent

$$B \subseteq D - D^2$$

D'autre part, si $x \in D - D^2$, comme $\langle B \rangle = D$, on peut écrire

$x = b_1 b_2 \dots b_n$ avec $b_i \in B$, et d'après (c), $n = 1$, donc $x = b_1 \in B$.

$$D - D^2 \subseteq B$$

Définition. On appelle demi-groupe de Knight-Storey-Kasahara ou KSK-demi-groupe tout demi-groupe D tel que $\langle D-D^2 \rangle = D$.
On dit alors que $\langle D-D^2 \rangle$ est la KSK-base de D .

(2-2) Théorème : Tout demi-groupe libre est un KSK-demi-groupe

Démonstration : Conséquence immédiate du lemme 1-1.

La réciproque est inexacte ; le demi-groupe
ci-contre est un KSK-demi-groupe de base
 $B = \{a\}$, mais n'est pas libre.

	a	b	o
a	b	o	o
b	o	o	o
o	o	o	o

Cet exemple montre qu'un KSK-demi-groupe peut posséder des zéros
à gauche ou à droite ; par contre :

(2-3) Lemme : Dans un KSK-Demi-groupe, il n'existe ni élément
neutre à droite, ni élément neutre à gauche.

Démonstration : Si e est un élément neutre à gauche d'un KSK-demi-
groupe D , e peut s'écrire $e = b_1 b_2 \dots b_n$ avec $b_i \in B$; donc :
 $b_n = b_1 b_2 \dots b_n b_n \in B^{n+1}$ avec $b_i \in B$ et $n+1 \geq 2$ ce qui est absurde.

On peut remarquer que si D est un KSK-demi-groupe
sans zéro alors D^0 n'est pas un KSK-demi-groupe ; en particulier
 $\mathfrak{F}_X^0$ n'est pas un KSK-demi-groupe.

Définition : Soit D un demi-groupe ; on dit que deux éléments x
et y de D sont indépendants à gauche si R_x et R_y sont deux élé-
ments incomparables de l'ensemble ordonné $D/\mathfrak{R}$. Toute partie A
de D dont les éléments sont deux à deux indépendants à gauche
est appelée partie libre à gauche.

On dit que $p \in D - U_D$ est irréductible à gauche si :

$$a_D \mid p \text{ entraîne } a \in U_D \text{ ou } a \in \mathcal{R}p$$

On dit que p est irréductible s'il est irréductible à droite et à gauche.

(2-4) Théorème : Dans un KSK-demi-groupe, la base est une partie libre maximale ; c'est l'ensemble des éléments irréductibles.

Démonstration : + Soit B la base d'un KSK-demi-groupe D ; puisque $B \subseteq D - D^2$, les éléments de B sont irréductibles à droite et à gauche.

+ B est une partie libre à droite et à gauche ; si par exemple b et b' sont deux éléments distincts de B et si $b_D \mid b'$, alors il existe x dans D tel que $b' = bx$. Comme $\langle B \rangle = D$ alors $x = b_1 b_2 \dots b_n$ avec $b_i \in B$ et $b' = b b_1 b_2 \dots b_n$ donc $b' \in B^{n+1}$ ce qui est absurde.

+ C'est une partie libre maximale, car si L est une partie libre contenant strictement B , si $y \in L - B$, comme $\langle B \rangle = D$, $y = b_1 \dots b_n$ avec $b_i \in B \subseteq L$, donc $b_{1D} \mid y$ ce qui contredit la liberté de L .

+ Soit P l'ensemble des éléments irréductibles de D , on a $B \subseteq P$; montrons l'inclusion opposée. Soit $p \in P$; comme $\langle B \rangle = D$, $p = b_1 \dots b_n$, donc $b_{1D} \mid p$. Comme p et b_1 sont irréductibles, $b_{1D} \mid p$ entraîne $b_1 \in \mathcal{R}p$.

En particulier, $p_D \mid b_1$, c'est-à-dire : il existe $x \in D^1$ tel que $b_1 = px$. Comme $b_1 \notin D^2$ on a nécessairement $x = 1$ et $p = b_1 \in B$.

(2-5) Lemme : Soit D un KSK-Demi-groupe de base B et $\pi : \mathfrak{F} \rightarrow D$ l'homomorphisme canonique surjectif. π est un isomorphisme si et seulement si D est équidivisible.

Démonstration : + Si π est un isomorphisme, D est un demi-groupe libre, donc est équidivisible (2-2).

+ Si D est équidivisible, π est injectif :

Supposons que $b_1 b_2 \dots b_n = c_1 c_2 \dots c_m = d$ avec b_i et c_j éléments de B . Ces deux factorisations de d possèdent un raffinement commun $(e_1, \dots, e_p)$. On peut supposer que chaque $e_k \in B$. Alors,

$(e_1, \dots, e_p) = (b_1, \dots, b_n)$, sinon au moins l'un des b_i admettrait une factorisation ce qui est absurde. On a donc :

$$(b_1, \dots, b_n) = (e_1, \dots, e_p) = (b_1, \dots, c_m).$$

(2-6) Théorème : (Knight et Storey)

Tout KSK-demi-groupe équidivisible est libre.

§3-Demi-groupes à longueur maximum de factorisation.

Notation. On note $Z_g(D)$ ou Z_g l'ensemble des zéros à gauche du demi-groupe D , et $N_d(D)$ ou N_d , l'ensemble de ses éléments neutres à droite.

Définitions. 1) - On dit que D est un demi-groupe de type (R) à gauche (2) si : $(\forall d \in D)(\forall d' \in D)(dd' = d \implies d \in Z_g \text{ ou } d' \in N_d)$.

On appelle demi-groupe de type (R) tout demi-groupe de type (R) à gauche et à droite.

2) - On dit qu'un demi-groupe D est un demi-groupe à longueur maximum de factorisation si :

$$(\forall d \in D) (\exists n \in \mathbb{N}^*) (\forall w \in \mathcal{F}_D) (\pi(w) = d \implies l(w) \leq n).$$

(3-1) Lemme : a) - tout demi-groupe libre est un demi-groupe à longueur maximum de factorisation.

b) - Un demi-groupe à longueur maximum de factorisation est de type (R) sans idempotent.

Par contre, un demi-groupe à longueur maximum de factorisation (même simplifiable) n'est pas nécessairement un demi-groupe : $D = \{x \in \mathbb{Z} ; |x| \geq 2\}$ est, pour la multiplication usuelle, un demi-groupe à longueur maximum de factorisation ; il n'est pas libre puisque $2 \cdot 2 = (-2)(-2)$. De même, un demi-groupe de type (R) sans idempotent n'est pas nécessairement à longueur maximum de factorisation (6). On remarque encore qu'un demi-groupe à longueur maximum de factorisation est nécessairement infini mais pas nécessairement simplifiable.

(3-2) Théorème: (Kasahara)

Tout demi-groupe à longueur maximum de factorisation est un KSK-demi-groupe.

Démonstration : + Soit D un demi-groupe à longueur maximale de factorisation ; posons $B = D \setminus D^2$ et montrons que $\langle B \rangle = D$.

+ Soit $d \in D$; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d = d_1 d_2 \dots d_m \text{ entraîne } m \leq n. \text{ donc } M = \{n \in \mathbb{N}^*; d = d_1 d_2 \dots d_m \implies m \leq n\} \neq \emptyset$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit élément de M .

+ Il existe $b_1, b_2, \dots, b_k$ dans B tels que

$d = b_1 b_2 \dots b_k$, car si $d \in D^k$ alors l'entier $k-1$ serait un élément de M . Donc il existe $d_1, \dots, d_k$ tels que $d = d_1 d_2 \dots d_k$. Pour

$1 \leq i \leq k$, $d_i \in B$ car si l'un des d_i n'est pas un élément de B , il

peut se factoriser, et d possède une factorisation de longueur supérieure à $k+1$ ce qui est absurde. D'où le résultat.

La réciproque de ce théorème est inexacte (6). De 3-2 et 2-6, on déduit :

(3-3)Théorème (Knight et Storey)

Tout demi-groupe équidivisible à longueur maximum de factorisation est un demi-groupe libre.

§4-Demi-groupes de Tamura-Aubert.

(4-1) Lemme : Soit B un complexe d'un demi)groupe D tel que $BD^1 = D$; les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) - B est minimal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des complexes X de D tels que $XD^1 = D$
- b) - B est un complexe libre.

Démonstration : + Supposons que B soit un complexe minimal dans l'ensemble des complexes X de D tels que $XD^1 = D$ et ne soit pas libre. Par définition, il existe deux éléments a et b distincts de B tels que, par exemple, $b_D | a$. Posons $X = B - \{a\}$; on a $b \in X$ donc : $b_D | a \implies aD^1 \subseteq bD^1 \subseteq XD^1$.
Alors : $D = BD^1 = (X \cup \{a\})D^1 = XD^1 \cup aD^1 = XD^1$ avec $X \subset B$ ce qui est absurde.

+ Soit B un complexe libre tel que $BD^1 = D$.

Si B n'est pas minimal dans l'ensemble des complexes X tels que $XD^1 = D$, il existe un complexe Y tel que $Y \subset B$ et tel que $YD^1 = D$.

Soit $b \in B-Y$; comme $b \in YD^1$, il existe $y \in Y$ tel que $y_D \mid b$.

Puisque $y \in Y$ et $b \notin Y$, on a $y \neq b$ ce qui contredit la liberté de B .

Définition : On dit qu'un demi-groupe D est un demi-groupe de Tamura-Aubert à gauche, ou un TA-demi-groupe à gauche s'il possède un complexe libre B tel que $BD^1 = B$; B est alors appelé une base à gauche au sens de Tamura-Aubert ou TA-base à gauche.

On appelle TA-demi-groupe tout TA-demi-groupe à droite et à gauche et TA-demi-groupe fort tout TA-demi-groupe tel que toute TA-base à droite est une TA-base à gauche et réciproquement.

Il est évident que :

(4-2) Lemme : Pour un complexe B d'un demi-groupe D , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) - $BD^1 = D$

b) - Pour tout $d \in D$ il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$.

(4-3) Théorème : Tout KSK-demi-groupe D est un TA-demi-groupe fort et la KSK-base de D est une TA-base de D .

Démonstration : Soit D un KSK-demi-groupe de base B ; d'une part, B est libre (2-4) ; d'autre part, puisque $\langle B \rangle = D$, pour tout $d \in D$, il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$, donc $BD^1 = D$ (4-2).

Remarque : La réciproque^{de} 4-3 est inexacte ; $\mathfrak{F}_X^0$ est un TA-demi-groupe fort mais n'est pas une KSK-demi-groupe

(4-4) Théorème (Tamura)

Dans un TA-demi-groupe à gauche D , deux TA-bases à gauche sont équipotentes. Si B est une TA-base à gauche de D ,

si, D possède un élément neutre, $B = \{u\}$ avec $u \in U_d$; Sinon B est un système représentatif d'éléments irréductibles

Démonstration : + Notons $\mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$ l'ensemble des éléments minimaux de $D/\mathfrak{R}$; et soit B une TA-base à gauche de D . Si $b \in B$ alors $R_b \in \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$; sinon il existe $d \in D$ tel que $R_d < R_b$. Comme B est une TA-base à gauche de D , il existe $b' \in B$ tel que $R_{b'} < R_d$ (4-2) ; on a donc $R_{b'} < R_b$ ce qui est absurde puisque B est libre à gauche.

L'application $b \mapsto R_b$ de B dans $\mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$ est injective car B est libre à gauche ; elle est surjective car si $R_x \in \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$, d'après (4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_x$; comme R_x est minimal dans $D/\mathfrak{R}$, on a $R_b = R_x \in \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$.

$$\text{Card } B = \text{Card } \mathcal{K}(D/\mathfrak{R}).$$

+ Si D est unitaire, alors $\mathcal{K}(D/\mathfrak{R}) = \{U_d\}$.

Comme $\{1\}$ est une TA-base à gauche, on a $\text{Card } B = 1$ et $B = \{u\}$ avec $u \in U_d$.

Si D n'est pas unitaire, dire que $R_b \in \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$ équivaut à dire que b est irréductible à gauche. Comme B est libre à gauche et que $\text{Card } B = \text{Card } \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$, B est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche.

(4-5) Corollaire (Aubert)

Un TA-demi-groupe à gauche est réunion de ses idéaux principaux à droite maximaux.

En effet, $xD^1 \subseteq yD^1 \iff R_y \leq R_x$; donc dD^1 est un idéal

à droite maximal si et seulement si $R_d \in \mathcal{K}(D/\mathfrak{R})$. Si $d \in D$, d'après

(4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$ donc tel que $d \in bD^1$ où bD^1 est un idéal à droite maximal.

Remarque. Soit D un demi-groupe non unitaire ; si $\mathcal{K}(D/\mathcal{R})$ n'est pas vide, un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche n'est pas nécessairement une TA-base à gauche, même si D n'est pas unitaire. Par exemple, soit D_1 un demi-groupe de carré nul, $D_2 = \{e_2\}$ on pose $D = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$; on définit sur D une loi prolongeant celles de D_1 et D_2 , tous les autres produits étant nuls. $\{e_2\}$ est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche. Ce n'est pas une TA-base à gauche car $e_2 D^1 = \{e_2, 0\} \subset D$.

On peut préciser ceci en remarquant que lorsque D n'est pas unitaire et que $\mathcal{K}(D/\mathcal{R})$ n'est pas vide, un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche est une TA-base à gauche si et seulement si pour tout $x \in D$, il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_x$.

Définition : On dit qu'un complexe B d'un demi-groupe D est une pseudo-base à gauche de D si B est une partie libre à gauche maximale

(4-6) Lemme : Toute TA-base à gauche est une pseudo-base à gauche.

Démonstration : Soit B une TA-base à gauche de D ; par définition, B est libre à gauche. Si B n'est pas maximal, il existe $b_0 \notin B$ tel que $B \cup \{b_0\}$ est libre. Comme $b_0 \in D$, d'après (4-2), il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_{b_0}$. Puisque $b_0 \in B$, on a en fait

$R_b \{ R_{b_0} \}$, ce qui contredit la liberté de $B \cup \{b_0\}$.

Le lemme suivant montre que la réciproque de (4-6) est inexacte : toute pseudo-base à gauche n'est pas nécessairement une TA-base à gauche.

(4-7) Lemme : Dans tout demi-groupe, il existe une pseudo-base à gauche contenant une partie libre à gauche donnée.

On peut faire un classement des demi-groupes de la façon suivante :

1ère classe : les demi-groupes sans TA-base à gauche ; par exemple $\mathbb{N}$ muni de la loi $x \star y = \min(x, y)$

2ème classe : Les TA-demi-groupes à gauche possédant des pseudo-bases à gauche qui ne sont pas des bases à gauche. C'est le cas par exemple de tout demi-groupe commutatif unitaire principal qui n'est pas un groupe. (il existe de tels demi-groupes : le demi-groupe multiplicatif de tout anneau à valuation dont le groupe de valuation n'est pas discret) Un tel demi-groupe est avec TA-base ; par contre si aD est un idéal principal propre $\{a\}$ est une pseudo-base à gauche et n'est pas une TA-base à gauche de D

3ème classe : Les TA-demi-groupes à gauche tels que toute pseudo-base à gauche est une TA-base à gauche. Concernants ces derniers, on peut énoncer le théorème suivant qui étend au cas non commutatif un résultat de AUBERT (1).

(4-8) Théorème : Si D est un demi-groupe unitaire, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Tout pseudo-base à gauche est une TA-base à gauche.
 b) D est un groupe.

Démonstration : $(b) \implies (a)$. Si D est un groupe, une pseudo-base à gauche est nécessairement réduite à un élément x et $xD = D$.

$(a) \implies (b)$. Soit e l'élément neutre de D ; $B = \{e\}$ est une TA-base à gauche de D . Soit $d \in D$; d'après (4-6) comme d est libre à gauche, il existe une pseudo-base à gauche M contenant $\{d\}$. Par hypothèse, M est une TA-base à gauche ; d'après (4-4)
 $\text{Card } M = \text{Card } B = 1$ donc $M = \{d\}$

Comme M est une TA-base à gauche $dD = D$, donc il existe $y \in D$ tel que $dy = e$; d est inversible à droite dans D . D est un groupe.

Remarque. On démontre (8) que dans un TA-demi-groupe à gauche, si B est une TA-base à gauche, les translations à gauche sont entièrement déterminées par les applications $f : B \longrightarrow D$ telles que

$$(\forall (b, b') \in B_x B) (\forall (x, y) \in D_x D) (bx = b'y \implies f(b)x = f(b')y)$$

DEUXIEME PARTIE : Atomicité

§1-Demi-groupes atomiques à gauche.

On pose $Z = Z_g \cup Z_d$ (c'est un idéal bilatère) et $D^* = D - Z$. On appelle éléments non nuls les éléments de D^*

Définitions : 1) On dit qu'un demi-groupe D est atomique à gauche s'il possède un complexe B , formé d'éléments irré-

ductibles à gauche et tel que

$$\langle B \rangle = D^* - U_d$$

2) On dit qu'un demi-groupe vérifie la condition si $N_g = \emptyset$ ou si $N_g = \{e_D\}$.

Exemple : Tout demi-groupe simple à droite est atomique à gauche, car dans un tel demi-groupe, tout élément est irréductible à gauche.

(1-1) permet de construire de nombreux demi-groupes atomiques à gauche.

(I-I) Théorème : Si D est un demi-groupe de type (R) à droite vérifiant la condition N_g , si $D/\mathfrak{R}$ et $D/\mathfrak{L}$ vérifient la condition minimale alors D est un demi-groupe atomique à gauche.

Démonstration : a) - Tout élément de $D - U$ admet un diviseur à gauche irréductible à gauche.

On sait (2) que dans un demi-groupe de type (R) d'un côté on a : $U_d = U_g = U$. Soit $d \in D - U$ tel que $R_{d_1} < R_d$. Si d_1 n'est pas irréductible à gauche, il existe $d_2 \in D - U$ tel que $R_{d_2} < R_{d_1}$.

Ce raisonnement est fini ; sinon, il permettrait de construire, par récurrence, une suite strictement décroissante de $D/\mathfrak{R}$, ce qui est absurde puisque $D/\mathfrak{R}$ vérifie la condition minimale.

b) - Soit $d \in D^* - U$; si d n'est pas irréductible à gauche, d'après (a), il existe p_1 irréductible à gauche tel que $d = p_1 d_1$. Comme d n'est pas irréductible à gauche, on est assuré que $d_1 \notin U$. Puisque Z est un idéal bilatère de D

$p_1 d_1 \notin Z \implies d_1 \notin Z$ donc $d_1 \in D^* - U$. Si d_1 n'est pas irréductible à gauche, on peut refaire avec d_1 le raisonnement tenu pour d . Ce procédé est fini ; sinon, par récurrence, il permet de construire deux suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(d_n)_{n \geq 1}$ où p_n est irréductible à gauche, $d_n \in D^* - U$ et telles que $d_n = p_{n+1} d_{n+1}$. En particulier, $d_{n+1} \mid_D d_n$ donc $L_{d_{n+1}} \subseteq L_{d_n}$. Comme $D/\mathcal{Q}$ vérifie la condition minimale, la suite décroissante $(L_{d_n})_{n \geq 1}$ est stationnaire. Il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que $L_{d_{n+1}} = L_{d_n}$. Comme D est un demi-groupe de type (R) à droite vérifiant la condition N_g ,

$$d_{n+1} \in L_{d_n} \implies \exists u \in U(D^1) \quad d_{n+1} = u d_n.$$

Alors : $d_n = p_{n+1} d_{n+1} = p_{n+1} u d_n$; puisque $d_n \notin Z$, que D est de type (R) et vérifie la condition N_g

$d_{n+1} = p_{n+1} u d_n \implies p_{n+1} u = e_D \implies p_{n+1} \in U$ ce qui est contradictoire.

Remarque : Ce théorème est une généralisation du résultat suivant (DUBREIL Algèbre-Gauthier-Villars th. 6 P. 217) : "Si D est un demi-groupe commutatif, unitaire, simplifiable, si $D/\mathcal{Q}$ vérifie la condition minimale, tout élément de D qui n'est pas une unité est le produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles.

Exemples : 1) - Tout demi-groupe fini, de type (R) à droite et vérifiant la condition N_g est un demi-groupe atomique à gauche.

2) - $D = \{x \in \mathbb{Z} ; |x| \neq 1\}$ muni de la loi $x * y = x |y|$

est un demi-groupe de type (R) à gauche vérifiant la condition N_d ; $D/\mathcal{R}$ et $D/\mathcal{L}$ vérifient la condition minimale donc D est un demi-groupe atomique à droite.

La notion de demi-groupe atomique d'un côté est latéralisée : on peut construire un demi-groupe atomique à gauche qui n'est pas atomique à droite. Voir "BOUVIER A. Demi-groupes avec bases - Séminaire P. LEFEBVRE 69/70 Exposés 14 et 15 Dep. Math. Univ. Lyon 1."

(I-2)Théorème : Pour qu'un demi-groupe atomique à gauche soit un TA-demi-groupe à gauche, il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

$Z_g = D$; $Z_g = 0$; $Z_g = \emptyset$
 si en outre $N_g = \emptyset$, tout système représentatif d'éléments irréductibles à gauche de D est une TA-base à gauche de D .

Démonstration : + Si $N_g \neq \emptyset$, D est un TA-demi-groupe à gauche ; supposons donc $N_g = \emptyset$.

+ Nous avons déjà vu que lorsque $Z_g = D$, D est un TA-demi-groupe à gauche.

+ Si $Z_g = \emptyset$, soit I un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche. I est libre à gauche. Soit $d \in D$; deux cas sont possibles :

Si $d \in Z_d$, si l'on désigne par B un complexe de D formé d'éléments irréductibles à gauche, pour tout élément $b \in B$ on a $R_b \leq R_d$.

Si $d \in D^*$, il existe $b \in B$ tel que $R_b \leq R_d$. Comme I est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche, il

existe $p \in I$ tel que $R_p = R_b \triangleleft R_d$. D'après le lemme 1-4-2, cela montre que I est une TA-base à gauche de D .

+ Si $Z = \{0\}$, on voit de même que si $d \in D^*$, il existe $p \in I$ tel que $R_p \triangleleft R_b$; comme pour tout $p \in I$ on a $R_p \triangleleft R_0$, I est une TA-base à gauche de D .

Un TA-demi-groupe à gauche n'est pas nécessairement atomique à gauche ; en effet, soit D un demi-groupe de carré nul (c'est à dire un demi-groupe avec zéro bilatère w tel que pour tout couple d'éléments $xy = yx = w$; D^1 est un TA-demi-groupe à gauche. Soient D_1 et D_2 deux demi-groupes isomorphes au TA-demi-groupe à gauche précédent. On note e_1 et e_2 leur élément neutre respectif, w_1 et w_2 leur zéro bilatère. On pose $E = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$. $B = \{e_1, e_2\}$ est une TA-base à gauche de E ; mais E n'est pas atomique à gauche car ses éléments irréductibles à gauche sont e_1 et e_2 , et $\langle \{e_1, e_2\} \rangle = \{e_1, e_2, 0\} \subset E^*$.

Toutefois, on peut donner une condition suffisante pour qu'un TA-demi-groupe à gauche soit atomique à gauche :

(1-3) Lemme : *Pour qu'un TA-demi-groupe à gauche sans élément neutre à gauche soit atomique à gauche, il suffit qu'il soit de type (R) à droite et que $D/\mathcal{L}$ vérifie la condition minimale.*

Démonstration : Il est facile de voir que dans un TA-demi-groupe à gauche sans élément neutre à gauche, tout élément de D admet un diviseur à gauche irréductible à gauche ; on peut alors refaire la même démonstration que pour le théorème 1-1.

Remarques : Soit D un demi-groupe atomique à gauche, P l'ensemble des éléments de D irréductibles à gauche et non nuls. Supposons $P \neq \emptyset$. Alors

$$\mathcal{K} = \{B ; \emptyset \subset B \subseteq P \text{ et } \langle B \rangle = D^* \cup_d\} \neq \emptyset$$

On peut au sujet des éléments de $\mathcal{K}$ poser les questions suivantes : $\mathcal{K}$ possède-t-il des éléments minimaux pour l'inclusion ? Un élément minimal de $\mathcal{K}$ est-il un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls ? Un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls est-il un élément minimal de $\mathcal{K}$? Nous connaissons quelques réponses à ces questions :

+ Tout élément A de $\mathcal{K}$ contient un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls. Car si I est un tel système, si $p \in I$ alors $p = a_1 a_2 \dots a_n$ avec $a_i \in A$ donc $p \mathcal{R} a_1$.

+ Lorsque D est commutatif, les éléments minimaux de $\mathcal{K}$ sont les systèmes représentatifs d'éléments irréductibles non nuls.

+ Dans $\mathcal{E}(p, q), \{q\}$ est un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls ; ce n'est pas un élément de $\mathcal{K}$ car $\langle \{q\} \rangle = D \cup_d$.

+ Toujours dans $\mathcal{E}(p, q), \{q, qp^2\}$ est un élément minimal de $\mathcal{K}$ mais ce n'est pas un système représentatif d'éléments irréductibles à gauche non nuls de D puisque q et qp^2 sont associées à gauche.

§2 - Demi-groupes atomiques

Définition : On dit qu'un demi-groupe est atomique s'il est atomique à gauche et à droite.

Dans un tel demi-groupe, tout élément de $D^* - (U_d \cup U_g)$ possède une factorisation en éléments irréductibles à gauche (appelée factorisation complète à gauche) et une factorisation en éléments irréductibles à droite. Mais on n'exige pas qu'une factorisation complète à gauche soit une factorisation complète à droite, ni l'inverse.

On sait que tout demi-groupe D est immersible dans un demi-groupe simple $\mathcal{E}(D)$: Théorème de BRUCK (5). $\mathcal{E}(D)$ est appelé demi-groupe de BRUCK associé à D . Tout élément de $\mathcal{E}(D)$ s'écrit de façon unique $q^m x p^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$. La loi de $\mathcal{E}(D)$ est soumise aux règles suivantes :

$$pq = 1 ; p^n q^n = 1 ; p^0 = q^0 = 1 ; p\bar{x} = p ; \bar{x}q = q.$$

On démontre également que si $P = \{p^n\}_{n \geq 0}$ alors :

$$R(q^i \bar{x} q^j) = q^i \overline{R(x)} P \text{ et } U_d(\mathcal{E}(D)) = \overline{U_d(D^1)} P$$

(2-1) Théorème : Atomicité du demi-groupe de BRUCK

Le demi-groupe de BRUCK $\mathcal{E}(D)$ est un demi-groupe atomique si et seulement si D est un groupe.

Démonstration : a) - Cherchons les diviseurs à gauche de $a = q^n x p^n$. On pose $n = q(a)$. Il est facile de vérifier que l'on a toujours : $q(ab) \geq q(a)$.

Par conséquent, si b divise a à gauche, alors :

$q(a) \gg q(b)$. D'après ce que nous avons dit plus haut sur les classes à gauche modulo $\mathfrak{R}$ et les éléments inversibles à droite dans $\mathcal{E}(D)$, les diviseurs à gauche de $a = q \bar{x}^i p^j$, non inversibles à droite et non associés à gauche à a sont de l'un des trois

types suivants : - $q \bar{y}^i p^k$ avec $y \notin R(x)$
 - $q \bar{y}^n p^k$ avec $0 < n < i$
 - $\bar{y}^k p^k$ avec $y \notin U_d(D^1)$.

b) - Si $n > 1$ alors $q \bar{x}^n p^m$ est réductible à gauche car

$$q \bar{x}^n p^m = q \bar{x}^{n-1} \bar{x} p^m q^{m+1} \bar{x} p^m$$

avec $q \bar{x}^{n-1} \bar{x} p^m \notin R(q \bar{x}^n p^m)$ et $q \bar{x}^{n-1} \bar{x} p^m \notin U_d(\mathcal{E}(D))$ puisque $n-1 > 0$.

c) - Condition suffisante : supposons que D soit un groupe et montrons que $\mathcal{E}(D)$ est atomique. D'après ce que nous venons de voir, si $\mathcal{E}(D)$ possède des éléments irréductibles à gauche ils ne peuvent être que de la forme $q \bar{y}^k p^k$ (car $\bar{x} p^m \in U_d(\mathcal{E}(D))$).

D'après (a), un diviseur à gauche de $q \bar{y}^k p^k$ est soit de la forme $q \bar{x} p^m \in q \overline{R(y)} p = R(q \bar{y}^m p^m)$ puisque D est un groupe, soit de la forme $q \bar{x} p^m \in U_d(\mathcal{E}(D))$. Donc tout élément de la forme $q \bar{x} p^k$ est irréductible à gauche.

$\mathcal{E}(D)$ est atomique à gauche puisque

$$q \bar{x} p^m = (q \bar{x}) (q \bar{x}) \dots (q \bar{x} p^m)$$

On verrait de la même façon que $\mathcal{E}(D)$ est atomique à droite.

d) - Condition nécessaire : Supposons que D ne soit pas un groupe, et montrons que dans ce cas $\mathcal{E}(D)$ n'est pas atomique. Puisque D n'est pas un groupe : $U_d(D^1) \subset D^1$. D'après (b), les élé-

ments de $\mathcal{E}(D)$ éventuellement irréductibles à gauche sont de la forme $q\bar{x}p^m$ ou $\bar{x}p^m$:

* Soit $y \notin U_d(D^1)$; les éléments de la forme $q\bar{x}p^m$ sont réductibles à gauche car : $\bar{y}p^2q^3\bar{x}p^m = \bar{y}q\bar{x}p^m = q\bar{x}p^m$ avec $\bar{y}p^2 \notin U_d(D)$ puisque $y \notin U_d(D^1)$ et $\bar{y}p^2 \notin R(q\bar{x}p^m)$.

* Par conséquent, l'ensemble E des éléments irréductibles à gauche de $\mathcal{E}(D)$ est un sous-ensemble de $\{\bar{x}p^m\}_{x \in D^1} = F$.

Comme $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle \subseteq \mathcal{E}(D) - U_d(\mathcal{E}(D))$, on voit que D n'est pas atomique à gauche donc n'est pas atomique.

(2-2) Corollaire : Le demi-groupe bicyclique est atomique.

Car $\mathcal{E}(p, q) = \mathcal{E}(\{e\})$.

Remarque : Dans $\mathcal{E}(p, q)$ l'élément q^2p^3 admet $q(qp^3)$ pour factorisation complète à gauche et $(q^2p)pp$ pour factorisation complète à droite.

Définition : On dit que D est un demi-groupe atomique fort si $U_d = U_g = U$ et si tout élément de $D^* - U$ possède une factorisation en éléments irréductibles (éléments qui sont à la fois irréductibles à droite et à gauche). Une factorisation en éléments irréductibles est appelée factorisation complète.

Tout demi-groupe atomique fort est atomique ; la réciproque est inexacte : $\mathcal{E}(p, q)$ est atomique mais n'est pas atomique fort. Le résultat suivant permet de donner des exemples de demi-groupes atomiques forts :

(2-3) Théorème : Si D est un demi-groupe de type (R) , si $D/\mathcal{Q}$ et $D/\mathcal{L}$ vérifient la condition minimale, alors D est un demi-groupe atomique fort.

Démonstration : Dans un demi-groupe de type (R), $U_d = U_g$, les notions d'irréductibilité à droite et à gauche sont confondues (3), les conditions N_g et N_d sont satisfaites. Il suffit donc d'appliquer (1-1).

(2-4) Théorème : Structure des demi-groupes finis de type (R)
 si D est un demi-groupe fini de type (R),
 deux cas sont possibles :
 - D est un groupe
 - D est atomique fort avec zéro.

Démonstration : Dans un demi-groupe de type (R), deux cas sont possibles : $Z_g = Z_d = \emptyset$ ou $Z_g = Z_d = \{0\}$.

+ Si $Z_g = Z_d = \emptyset$, si $x \in D$, x est d'ordre fini, donc il existe deux entiers $n > m$ tels que $x^n = x^m$. Comme D est de type (R) sans zéro, cela entraîne $x^{n-m} = 1$ avec $n-m \geq 1$.

+ Si $Z_g = Z_d = \{0\}$, d'après (2-3), D est un demi-groupe atomique fort avec zéro.

Remarques. 1) - Ce théorème redonne le résultat classique : tout demi-groupe fini simplifiable est un groupe.

2) - Un demi-groupe de type (R) fini avec zéro n'est pas nécessairement la réunion d'un groupe et d'un zéro comme le montre l'exemple ci-contre.

	a	b	o
a	b	o	o
b	o	o	o
o	o	o	o

(2-5) Théorème : Tout KSK-demi-groupe est un demi-groupe atomique fort.

Démonstration : Soit D un KSK-demi-groupe et B la KSK-base. On dit que D est sans élément neutre (Lemme 1-2-3), que les élé-

ments de B sont irréductibles (Théorème 1-2-4) et que $\langle B \rangle = D$.

La réciproque de ce théorème est inexacte ; $\mathcal{R}_X^0$ est un demi-groupe atomique fort mais n'est pas un KSK-demi-groupe.

(2-6) Théorème : Si D est un demi-groupe de type (R) sans idempotent tel que $D/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale les assertions suivantes sont équivalentes

- a) - D est atomique fort
- b) - D est atomique
- c) - D est atomique à gauche
- d) - D est un TA-demi-groupe
- e) - D est un TA-demi-groupe à gauche
- f) - D est un KSK-demi-groupe

Démonstration : Les implications suivantes sont triviales :

$$(a) \implies (b) \implies (c) \text{ et } (d) \implies (e)$$

$(c) \implies (a)$ car dans un demi-groupe D de type (R), l'irréductibilité à droite est équivalente à l'irréductibilité à gauche, et D est sans idempotent, donc $U_d = U_g = \emptyset$.

$(a) \implies (d)$ d'après (1-2) $(e) \implies (c)$ d'après (1-3) $(f) \implies (a)$ d'après (2-5) $(c) \implies (f)$ conséquence du lemme (2-7) suivant :

(2-7) Lemme : Pour qu'un demi-groupe atomique à gauche soit un KSK-demi-groupe, il suffit qu'il soit de type (R) sans idempotent.

Soit B l'ensemble des éléments de D irréductibles à gauche. Comme D est atomique à gauche, on est assuré que B

n'est pas vide. Pour la même raison, puisque D est sans idempotents $\langle B \rangle = D$. Il nous reste à prouver que si $n \geq 2$ alors $B \cap B^n = \emptyset$. Supposons le contraire ; si $b \in B \cap B^n$ avec $n \geq 2$, on peut écrire

$$b = b_1 b_2 \dots b_n \quad \text{avec } b_i \in B$$

On a donc $b_{1D} | b$. Comme b est irréductible à gauche et que $U_d = \emptyset$

$$b_{1D} | b \implies b_{1D} \mathfrak{R} b$$

Comme D est de type (R) $R_b = \{ bu ; u \in U(D^1) \} = \{ b \}$; par conséquent $b_1 = b$ et $b = b b_2 b_3 \dots b_n$.

Or dans un demi-groupe de type (R) sans idempotent, on a nécessairement pour tout d et d' de D : $dd' \neq 0$. D'où une contradiction.

Définition : On appelle demi-groupe à factorisation unique à gauche tout demi-groupe D qui vérifie les conditions suivantes :

- * D est atomique
- * Dans D, les notions d'irréductibilité à gauche et à droite sont confondues.
- * Deux factorisations complètes d'un élément de $D^* - U_d$ sont isomorphes à gauche (§I-1).

$\mathfrak{F}_X$ et $\mathfrak{F}_X^0$ sont à factorisation unique à gauche.

Mais un demi-groupe à factorisation unique à gauche n'est pas nécessairement un demi-groupe libre. On peut remarquer que tout demi-groupe à factorisation unique à gauche est atomique fort.

Définition : On appelle demi-groupe prééquidivisible à gauche tout demi-groupe D tel que deux factorisations d'un élément de $D^* - U_d$ possèdent des raffinements isomorphes à gauche dans D^1 .

Il est clair que tout demi-groupe équidivisible est prééquidivisible à gauche et à droite.

(2-8) Théorème : Tout demi-groupe à factorisation unique à gauche est prééquidivisible à gauche.

Démonstration : Supposons que $d \in D^* - U_D$ possède deux factorisations $w_1 = (a_1, \dots, a_n)$ et $w_2 = (b_1, \dots, b_p)$. Puisque Z est un idéal bilatère de D : $d \notin Z \implies a_i \notin Z$ et $b_j \notin Z$. Puisque D est à factorisation unique à gauche, on peut raffiner w_1 et w_2 en remplaçant les a_i et les b_j par l'une de leurs factorisations complètes. On obtient :

$$w'_1 = (c_1, \dots, c_m) \leq w_1 \text{ et } w'_2 = (d_1, \dots, d_q) \leq w_2.$$

Dans w'_1 et w'_2 , "absorbons" les unités (on peut le faire à droite ou à gauche, car les notions d'irréductibilité à gauche et à droite sont confondues). On obtient ainsi deux factorisations w''_1 et w''_2 telles que $w''_1 \geq w'_1$, $w''_2 \geq w'_2$ et dont tous les termes sont irréductibles. w''_1 et w''_2 sont donc deux factorisations complètes de d ; par hypothèse, elles sont isomorphes à gauche. Comme les éléments qui les composent sont les éléments non inversibles à droite de w'_1 et w'_2 , nous voyons que les éléments non inversibles de ces deux mots sont associés à gauche (à une permutation près).

Si $m = q$, il est clair que $w'_1 \sim w'_2$

Supposons par exemple $m > q$; alors, si

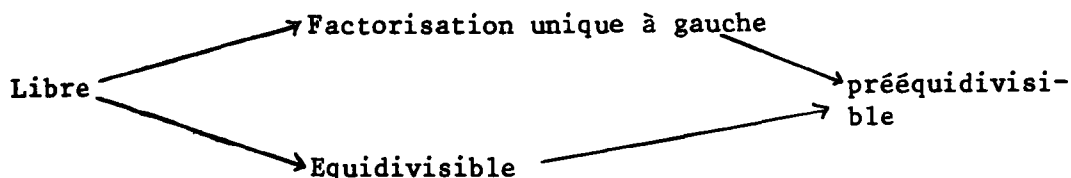
$w''_1 = (d_1, \dots, d_q, 1, \dots, 1)$ où 1 figure $m-q$ fois, w'_2 raffine w''_1 donc w_2 ; comme ses termes non inversibles sont ceux

de w''_2 , il est clair que

$$w''_2 \sim w'_1$$

La réciproque de ce théorème est inexacte : un demi-groupe prééquidivisible à gauche n'est pas nécessairement à factorisation unique à gauche. En effet, le demi-groupe bi-cyclique est équidivisible (7) donc prééquidivisible à gauche ; mais il n'est pas à factorisation unique à gauche.

Remarque : On a donc la situation suivante :



BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.E. AUBERT : On the ideal theory of commutative semi-groups
Math. Scand. 1 (1953) p. 39 - 54
 - [2] BOUVIER A. : Demi-groupes de type (R). Demi-groupe commutatifs à factorisation unique C.R. Acad. Sciences Paris
t 268 (1969) p. 372-375
 - [3] BOUVIER A. : Demi-groupes de type (T) C.R. Acad. Sciences
Paris t 270 (1970) p. 561-563
 - [4] BOUVIER A et FAISANT A : Une généralisation du demi-groupe bicyclique Séminaire P. Lefebvre 69/70 Exp. 5 Dep. Math. Fac.
Sciences LYON
 - [5] CLIFFORD A.H. and PRESTON G.B. : Algebraic theory of semi-groups. Math. Survey Number 7 T1 et 2 (1967)
 - [6] KASAHARA S. : A note on semi-groups with a base Math. Japon
6 (1962) p. 45-57
 - [7] KNIGHT J.D. and STOREY A.J. : Equidivisible semigroups Journal of algebra 12 1969 p. 24-48
 - [8] TAMURA T. : One sided bases and translations of a semigroup
Math. J AP. 3(1955) p. 137-141
-

Manuscrit reçu le 15 avril 1970

A. BOUVIER
Maitre assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE