J. F. PABION

Théorie des modèles sans identité

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1970, tome 7, fascicule 1
, p. 47-85
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1970__7_1_47_0>

THEORIE DES MODELES SANS IDENTITE

Par J.F. PABION

Dans les présentations usuelles de la théorie des modèles, l'identité joue un rôle constant: Il semble aller de soi que la plupart des méthodes utilisées ont un sens dans la mesure où on peut discerner deux éléments d'une structure. Cependant, l'incorporation de l'identité aux relations primitives est un bien gros moyen pour y parvenir : il suffit, pour que deux éléments soient discernables, qu'il existe une formule satisfaite pour l'un et non pour l'autre, ce qui revient à considérer l'égalité sous l'angle intentionnel. Dans une thèse de 3e cycle, soutenue à la Faculté des sciences de Lyon , [3] j'avais montré comment certaines méthodes de la théorie des modèles s'étendent sans grande modification lorsqu'on adopte le point de vue précédent. Je reprends ici les mêmes idéés, sous une forme plus complète et plus synthétique.

Le cadre est la théorie des ensembles usuelle. x et y désigneront des ensembles, $< x,y >$ désigne le couple de 1ère composante x et de deuxième composante y, et $\overline{\overline{x}}$ le cardinal de x.

I - STRUCTURE :

1) Soit $\tau = \{n_i\}_{i \in I}$ une famille d'entiers $\geqslant -1$. Une *structure de type* τ , ou τ*-structure* (nous dirons simplement *structure* lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) est un couple $\mathfrak{S} = < X, \varphi >$, où X est un ensemble non vide et φ une fonction de domaine I ayant les propriétés suivantes :

- Pour chaque $i \in I$, tel que $n_i = -1$, $\varphi(i)$ est un élément de X.
- Pour chaque $i \in I$, tel que $n_i \geqslant o$, $\varphi(i)$ est une relation n_i-aire sur X c'est-à-dire une application de X^{n_i} dans $\{o,1\}$.

X s'appelle le *domaine* de $\mathfrak{S}$, et on le désigne aussi par $|\mathfrak{S}|$. Le cardinal de $\mathfrak{S}$ est le cardinal de son domaine. Chaque élément de X de la forme $\varphi(i)$ où $n_i = -1$ est un *élément distingué.*

$\mathfrak{S} = \langle X, \varphi \rangle$ et $\mathfrak{S}' = \langle X', \varphi' \rangle$ étant deux structures, un *homomorphisme* de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$ est une application h de X dans X' tel que pour tout $i \in I$:

- Si $n_i = -1$, $h[\varphi(i)] = \varphi'(i)$

- Si $n_i \geqslant o$, pour tout $\sigma \in X^{n_i}$, $\varphi(i).\sigma = \varphi'(i).(h o \sigma)$

La classe des τ-structures et de leurs homomorphismes constitue ainsi une catégorie: On montre aisément qu'il y a identité entre les monomorphismes (les épimorphismes) et les homomorphismes injectifs (surjectifs). En particulier tout homomorphisme bijectif est un isomorphisme.

Un homomorphisme surjectif est encore appelé *contration*. Si Y est une partie non vide de X contenant les éléments distingués de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ induit une structure $\mathfrak{S}(Y)$ de domaine Y. $\mathfrak{S}(Y)$ est une *restriction* de $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{S}$ une *extension* de $\mathfrak{S}(Y)$. Si h est un homomorphisme de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$, h(X) contient les éléments distingués de $\mathfrak{S}'$. $\mathfrak{S}'$ induit donc une structure sur h(X), appelée *image de* $\mathfrak{S}$ par h, et désignée par $h(\mathfrak{S})$. h est un épimorphisme de $\mathfrak{S}$ sur son image.

2) - Equivalences compatibles :

Soit $\mathfrak{S}$ une structure de domaine X. Soient R une équivalence sur X, p la projection canonique de X sur X/R. Il existe au plus une structure $\bar{\mathfrak{S}}$, de domaine X/R, telle que p soit un homomorphisme de $\mathfrak{S}$ sur $\bar{\mathfrak{S}}$. Si elle existe, on dira que R est *compatible* avec $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ sera désignée par $\mathfrak{S}/R$ et appelée *quotient* de $\mathfrak{S}$ par R.

Pour que R soit compatible, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, si $n_i \geqslant 1$, quels que soient $a_1,\dots,a_{n_i}$, $b_1,\dots,b_{n_i} \in X$, on ait :

$$a_1 R b_1 \text{ et } \dots \text{ et } a_{n_i} R b_{n_i} \Longrightarrow \varphi(i) < a_1, \dots; a_{n_i} > = \varphi(i) < b_1, \dots; b_{n_i} >$$

Si ces conditions sont remplies pour les éléments d'une partie J de I, on dira que R est *J-compatible*. Une équivalence est compatible si et seulement si elle est $\{i\}$- compatible pour tout i tel que $n_i \geqslant 1$.

L'égalité est toujours compatible. Toute équivalence plus fine qu'une équivalence compatible est compatible. La borne supérieure d'une famille d'équivalences compatibles est compatible : Ainsi, *la famille des équivalences compatibles avec* $\mathfrak{S}$ *est une section initiale fermée du treillis des équivalences sur* X.

Le plus grand élément de cette section (qui est la moins fine des équivalences compatibles) est appelé *équivalence de séparation*. Si elle coïncide avec l'égalité, on dit que $\mathfrak{S}$ est *séparée* .

R étant une équivalence compatible avec $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}/R$ est séparée si et seulement si R est l'équivalence de séparation. Le quotient est alors désigné par $\Sigma(\mathfrak{S})$, est appelé *séparée* de $\mathfrak{S}$.

Deux éléments $a, b \in X$ sont dits *séparables* si leurs classes modulo l'équivalence de séparation sont distinctes. Sinon ils sont dits *inséparables*.

Si h est un homomorphisme de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$, la relation définie sur X par $h(x) = h(y)$ est une équivalence R compatible avec $\mathfrak{S}$. Le quotient de $\mathfrak{S}$ par R est isomorphe à l'image $h(\mathfrak{S})$. En particulier, si $\mathfrak{S}$ est séparée, R est l'égalité, donc h est *injectif*

3) - Propriétés logiques des structures et des homomorphismes :

A chaque type $\tau = \{n_i\}_{i \in I}$ on associe un langage du premier ordre L_τ comportant, outre les connecteurs usuels, et une provision infinie de variables : pour chaque $i \in I$, si $n_i = -1$ un individu a_i ; si $n_i \geqslant 0$ un prédicat de poids n_i, r_i. En outre les a_i et les r_i sont deux à deux distincts.

Toute τ-structure $\mathfrak{S} = \langle X, \varphi \rangle$ est alors une *réalisation* de L_τ, sur le domaine X, dans laquelle chaque a_i est interprété par $\varphi(i)$ et chaque r_j par $\varphi(j)$.

Soient $F(X_1, ..., X_p)$ une formule de L_τ et $\langle a_1, ..., a_p \rangle$ un p-uple extrait de X.

« $F(X_1, ..., X_p)$ est satisfaite en $\langle a_1, ..., a_p \rangle$ dans $\mathfrak{S}$ » sera désigné par :

$$\mathfrak{S} \models F(a_1, ..., a_p)$$

Cette écriture contient une impropriété, car les ai ne sont pas des constantes du langage dans lequel les formules sont écrites. Mais c'est une commodité sans conséquences fâcheuses.

On appelle *assignement* (relatif à $\mathfrak{S}$) toute application σ de l'ensemble des variables dans X. Une formule $F(X_1, ..., X_p)$ est *satisfaite par un assignement* σ si $\mathfrak{S} \models F(\sigma(x_1), ..., \sigma(x_p))$. Plus généralement, une famille $\mathcal{F}$ de formules est satisfaite par σ si chaque $F \in \mathcal{F}$ est satisfaite par σ. On dit alors que $\mathcal{F}$ est *coréalisable* (dans $\mathfrak{S}$).

Rappelons que F est *valide* dans $\mathfrak{S}$ (notation : $\mathfrak{S} \models F$) si elle est satisfaite par tout assignement. Il revient au même de dire que la clôture universelle de F est réalisée.

Un homomorphisme $h : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$ est dit *logique*, si pour toute formule $F(x_1, ..., x_p)$, et tout p-uple $\langle a_1, ..., a_p \rangle$ extrait de X,
$F(a_1, ..., a_p)$ implique $\mathfrak{S}' \models F(h(a_1), ..., h(a_p))$

Voici un critère, dérivé d'un critère de Tarski :

h est logique si et seulement si, pour toute formule $F(x_1, ..., x_p, y)$ et quels que soient $a_1, ..., a_p \in X$, si $\mathfrak{S}' \models \exists\, y\, F(h(a_1), ..., h(a_p) y)$, il existe $b' \in h(X)$ tel que $\mathfrak{S}' \models F(h(a_1), ..., h(a_p), b')$.

En particulier :

Lemme I-1 : *tout épimorphisme est logique.*

Une restriction $\mathcal{E}$ (Y) de $\mathcal{E}$ est logique si l'injection canonique de Y dans X est logique. Pour tout homomorphisme h : $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, h est logique si et seulement si h($\mathcal{E}$) est une restriction logique de $\mathcal{E}'$.

Soit (Σ) un ensemble de formules.

Rappelons que $\mathcal{E}$ est un *modèle* de (Σ) si tout $F \in \Sigma$ est valide dans $\mathcal{E}$.

Une formule F est *conséquence* de (Σ) si tout modèle de (Σ) rend F valide.
Notation : $\Sigma \vdash F$.

Deux structures $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ qui rendent valides les mêmes formules sont dites *logiquement équivalentes.*
Notation : $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$. Il revient au même de dire qu'elles satisfont les mêmes formules closes (énoncés).

S'il existe un homomorphisme logique de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$, on a évidemment $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}'$.

Il en est ainsi en particulier de $\mathcal{E}$ et $\Sigma(\mathcal{E})$: ceci montre que pour tout ce qui concerne la dualité modèles-théories, on peut se restreindre aux *modèles séparés.*

(Rappelons qu'une *théorie* est un ensemble de formules qui contient toutes ses conséquences, et admet un modèle).

Lemme I-2 : *tout modèle d'un ensemble de formules* (Σ) *peut être contracté sur un modèle séparé*
(et ceci d'une seule façon , à un isomorphisme près).

Ceci rappelle la construction des modèles normaux d'une théorie égalitaire. Nous allons voir qu'il s'agit d'une généralisation de ce cas.

4) - Structure de l'équivalence de séparation :

Une relation n-aire R sur le domaine X d'une structure $\mathcal{G}$ est dite *représentée* par la formule $F(x_1, \ldots; x_n)$, si quels que soient $a_1, \ldots, a_n \in X$:

$$R(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{G} \models F(a_1, \ldots, a_n)$$

Une relation représentable sera dite aussi *élémentaire* (dans $\mathcal{G}$)

Exemple : Soit $i \in I$ tel que $n_i \geqslant 1$. Posons $n_i = p + 1$. On considère les formules suivantes :

$$\forall x_1 \ldots x_p [r_i x x_1 \ldots x_p \leftrightarrow r_i y x_1 \ldots x_p]$$

$$\forall x_1 \ldots x_p [r_i x_1 x \ldots x_p \leftrightarrow r_i x_1 y \ldots x_p]$$

....

$$\forall x_1 \ldots x_p [r_i x_1 \ldots x_p x \leftrightarrow r_i x_1 \ldots x_p y]$$

Ces formules sont dites *associées* au prédicat r_i. Dans toute réalisation, elles représentent des équivalences, qui sont dites aussi associées à r_i. Par formule (resp. équivalence) associée, nous entendons toute formule (resp. équivalence) associée à un prédicat de poids positif.

Lemme I-3 : *Soient $\mathcal{G}$ une τ-structure,* $i \in I$ *avec* $n_i \geqslant 1$ *et* R *une équivalence sur* X. *Pour que* R *soit* $\{i\}$ *-compatible, il faut et il suffit qu'elle soit plus fine que chacune des équivalences associées à* r_i.

Soit $\bar{r}_i$ la relation qui interprète r_i dans $\mathcal{G}$ - On pose encore $n_i = p+1$.

c.n : Soient $a, b \in X$, tels que a R b. Soient $a_1, \ldots, a_p \in X$

R étant $\{i\}$ -compatible, $\bar{r}_i < a, a_1, \ldots, a_p > \; = \; \bar{r}_i < b, a_1, \ldots, a_p >$

Donc $\mathcal{G} \models \forall x_1 \ldots x_p [r_i a x_1 \ldots x_p \leftrightarrow r_i b x_1 \ldots x_p]$

On raisonne de même avec les autres formules associées.

c.s : Supposons que si $a\,R\,b$, toute formule associée à r_i est satisfaite en $<a,b>$

Soient $a_1,\dots,a_{n_i}$, $b_1,\dots,b_{n_i}$, tels que $a_k\,R\,b_k$ pour $k = 1,\dots,n_i$

On veut prouver que $\bar{r}_i<a_1,\dots,a_{n_i}> = \bar{r}_i<b_1,\dots,b_{n_i}>$

Soit q le nombre des indices k pour lesquels $a_k \neq b_k$. Si $q = 0$, c'est évident.

Supposons le vrai pour q et montrons le pour $q + 1$: soit i_0 le premier indice tel que $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Considérons la suite : $a_1,\dots,a_{i_0-1}, a_{i_0}, b_{i_0+1},\dots,b_{n_i}$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\bar{r}_i<a_1,\dots,a_{n_i}> = \bar{r}_i<a_1,\dots,a_{i_0-1},a_{i_0},b_{i_0+1},\dots,b_{n_i}>$$

$$= \bar{r}_i<b_1,\dots,b_{i_0-1},a_{i_0},b_{i_0+1},\dots,b_{n_i}> \text{ puisque } a_k = b_k \text{ pour } k < i_0.$$

Posons $F(x_1,\dots,x_p,x,y) = r_i x_1 \dots x_{i_0-1}\, x\, x_{i_0} \dots x_p \longleftrightarrow r_i\, x_1 \dots x_{i_0-1}\, y\, x_{i_0} \dots x_p$.

Par hypothèse F est satisfaite en $<a_1,\dots,a_{i_0-1}, a_{i_0+1},\dots,a_{n_i}, a_{i_0}, b_{i_0}>$

Donc $\bar{r}_i<b_1,\dots,b_{i_0-1},a_{i_0},b_{i_0+1},\dots,b_{n_i}> = \bar{r}_i<b_1,\dots,b_{n_i}>$

Lemme I-4 : *toute équivalence compatible est plus fine qu'une équivalence élémentaire.*

Soient R une équivalence compatible, R' une équivalence élémentaire.
R' est représentée par une formule $F(x,y)$. Soient $a,b \in X$ avec $a\,R\,b$.
Soit p la projection canonique de $\mathcal{E}$ sur son séparé $\Sigma(\mathcal{E})$. $a\,R\,b$ implique $p(a) = p(b)$.
Donc $\Sigma(\mathcal{E}) \models F(p(a),p(b))$ et p étant logique, $\mathcal{E} \models F(a,b)$. Donc $a\,R'\,b$.

Proposition I-1 : *L'équivalence de séparation est la borne inférieure des équivalences associées aux prédicats de poids > 0.*

On rassemble les lemmes I-3 et I-4.

Corollaire (immédiat) : *L'équivalence de séparation est la borne inférieure des équivalences élémentaires.*

Lemme I-5 : *soit un homomorphisme de* $\mathcal{G}$ *dans* $\mathcal{G}'$. *Si* a, b $\in |\mathcal{G}|$ *sont séparables dans* $\mathcal{G}$, h(a) et h(b) *sont séparables dans* $\mathcal{G}'$.

En effet la séparation se traduit par le fait que $\langle a,b \rangle$ satisfait une formule existentielle.

La réciproque n'est pas vraie. En particulier une restriction d'une structure séparée n'est par nécessairement séparée. Nous dirons que h est *séparable* si chaque fois que a, b $\in |\mathcal{G}|$ sont inséparables, h(a) et h(b) sont inséparables dans $\mathcal{G}'$. Ceci est la condition nécessaire et suffisante pourqque , p et p' étant les projections canoniques de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sur leurs séparés, il existe $\bar{h} : \Sigma(\mathcal{G}) \to \Sigma(\mathcal{G}')$ tel que $p' \circ h = \bar{h} \circ p$. h est alors unique. Ainsi, si l'on se restreint à la sous-catégorie non pleine obtenue en éliminant les homomorphismes non séparables, la séparation devient fonctorielle.

Tout homomorphisme logique (et en particulier tout épimorphisme) est réparable.

Si h est un épimorphisme, h est isomorphisme.

Proposition I-2 : *soient* $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ *deux structures. S'il existe un épimorphisme* h *de* $\mathcal{G}$ *sur* $\mathcal{G}'$ *et un épimorphisme* h' *de* $\mathcal{G}'$ *sur* $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{G}'$ *sont isomorphes :*

On introduit les séparés $\Sigma(\mathcal{G})$ et $\Sigma(\mathcal{G}')$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{G}' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "p'"] & \mathcal{G} \arrow[d, "p"] \\
\Sigma(\mathcal{G}) \arrow[r, "\bar{h}"] & \Sigma(\mathcal{G}') \arrow[r, "\bar{h}'"] & \Sigma(\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

h et h' sont réciproques l'une de l'autre. Pour tout a $\in |\Sigma(\mathcal{G})|$ (resp. a' $\in |\Sigma(\mathcal{G}')|$) posons $S_a = p^{-1}(a)$ (resp. $S_{a'} = p'^{-1}(a')$). La commutation du diagramme montre que h applique S_a dans $S_{\bar{h}(a)}$ et h' applique $S_{a'}$ dans $S_{\bar{h}'(a')}$. De plus ces applications sont surjectives. Cela montre que S_a et $S_{h(a)}$ ont même cardinal. On introduit alors une bijection $\varphi_a : S_a \to S_{h(a)}$ et le recollement des φ_a fournit un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$.

5) - Exemples.

1- Soit $i_0 \in I$, tel que $n_{i_0} = 2$. Une τ-structure $\mathcal{G}$ dans laquelle r_{i_0} est interprété par l'égalité du domaine est dite i_0-*égalitaire*. Elle est alors séparée et rend valides les formules suivantes :

$$
(\&) \qquad \begin{array}{l} r_{i_0}\, x\, x \\ r_{i_0}\, x\, y \to (F(x, z_1, \dots, z_p) \to F(y, z_1, \dots, z_p)) \end{array}
$$

Tout modèle de (&) est dit i_0-*quasi-égalitaire*. r_{i_0} définit alors une équivalence, et celle-ci est l'équivalence de séparation :

Soit en effet F(x,y) une formule qui représente une équivalence dans $\mathcal{G}$ (i_0–quasi-égalitaire)

$$\mathcal{G} \models r_{i_0}\, x\, y \to (F(x,x) \to F(x,y))$$

Soit :

$$\mathcal{G} \models F(x,x) \to (\ {}_{i_0}\, x\, y \to F(x,y))$$

or $\mathcal{G} \models F(x,x)$

Donc $\mathcal{G} \models r_{i_0}\, x\, y \to F(x,y)$

Ainsi $r_{i_0}\, x\, y$ représente la plus fine des équivalences élémentaires (et même des relations réflexives élémentaires), et a fortiori leur borne inférieure.

La notion de *modèle séparé* généralise donc celle de *modèle normal* d'une théorie égalitaire.

2- On suppose que l'ensemble des i tels que $n_i > o$ est fini. La conjonction F(x,y) des formules associées aux prédicats de poids positif représente alors l'équivalence de séparation dans toute réalisation, et joue le rôle de l'égalité. On retrouve une remarque de Hailperin (2).

3- Supposons que pour tout $i \in I$, $n_i \leqslant 1$, et qu'il y ait exactement n prédicats de poids 1. Chaque équivalence associée à un prédicat de poids 1 détermine une ou deux classes. Le quotient par l'équivalence de séparation est donc de cardinal $\leqslant 2^n$. En particulier, toute réalisation séparée est de cardinal $\leqslant 2^n$. On retrouve l'origine du procédé classique de décision pour le calcul des prédicats monadiques.

4- Soit I un ensemble non vide. Posons $\tau = \{n_i\}_{i \in I}$ avec $n_i = 1$ pour tout i. L_τa pour prédicats une famille de prédicats monadiques $\{r_i\}_{i \in I}$.

Soit (Σ) l'ensemble des formules suivantes :

$$\exists x [r_i x] \qquad (i \in I)$$

$$r_i x \to \neg r_j x \qquad (i, j \in I, i \neq j)$$

Un modèle de (Σ) est constitué d'un ensemble X, muni d'une famille de parties non vides deux à deux disjointes $\{X_i\}_{i \in I}$. Deux cas sont possibles, suivant que les X_i recouvrent ou ne recouvrent pas X. On parlera alors de modèles de 1ère espèce dans le 1-er cas, de 2-ème espèce dans le second.

Un modèle est séparé si et seulement si chaque X_i est un singleton, et s'il y a au plus un élément extérieur à $\bigcup_{i \in I} X_i$. Deux modèles séparés de même espèce sont donc isomorphes.

Si I est de cardinal ξ *infini*, tous les modèles séparés de (Σ) sont de cardinal ξ. En particulier, aucun n'a d'extension logique *séparée* de cardinal $> \xi$.

5- Prenons $I = \mathbf{N}$. Soit τ le type qui à chaque $n \in \mathbf{N}$ associe l'entier 2. L_τ est défini par une suite de prédicats dyadiques $\{r_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Soit (Φ) la famille des formules suivantes :

- $r_n x x$
- $r_n x y \to r_n y x$
- $r_n x y \to (r_n y z \to r_n x z)$ $\qquad (n \in \mathbf{N})$
- $\exists x_1 \dots x_n \forall y [r_n x_1 y \vee \dots \vee r_n x_n y]$
- $\exists x_1 x_2 [\neg r_n x_1 x_2] \to \forall x_1 x_2 [r_m x_1 x_2]$ $(n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$

Un modèle de (Φ) est un ensemble X muni d'une suite d'équivalences $\{R_n\}$ telle que :

- X/R_n est au plus de cardinal n
- si X/R_n est de cardinal > 1, pour tout $m \neq n$, X/R_n est de cardinal 1.

Dans tout modèle, l'équivalence de séparation est représentée par l'une des formules, $r_n xy$. Tous les modèles séparés de (Φ) sont finis, et pour tout entier n il existe un modèle séparé de (Φ) de cardinal n.

6- Les exemples 4 et 5 sont en contradiction avec le théorème de Löwenheim-Skolem-Tarski.

Voici d'autres singularités :

au langage utilisé pour l'exemple 4, adjoignons un individu a, et un système (Σ) les énoncés :

$$\neg\, r_i\, a \ (i \in I)$$

Soit (Σ^*) le système obtenu. Les modèles de (Σ^*) s'obtiennent à partir des modèles de deuxième espèce de (Σ), en interprétant a par un élément qui n'appartient à aucun des X_i. En particulier, *tous les modèles séparés de* (Σ*) *sont isomorphes*

Pour $\bar{\bar{I}} = \aleph_0$, (Σ^*) est donc $\aleph_0$-catégorique (en un sens élargi de manière évidente), bien que l'algèbre des ensembles définissables d'un modèle soit infinie, en contradiction avec un théorème de Ryll-Nardzewski [5]. Nous reviendrons en détails sur ce point.

Adjoignons maintenant au langage de (Σ^*) un nouveau prédicat monadique r et les axiomes : $\forall x\, [r\, x \rightarrow \neg\, r_i\, x]$ $(i \in I)$

Soit (Σ^{**}) le système obtenu. Tout modèle séparé de (Σ^*) se prolonge d'une seule manière en un modèle (séparé) de Σ^{**}, en interprétant r par $\{\bar{a}\}$ où a est l'interprétation de a. Cependant r n'est pas définissable modulo (Σ^*) en fonction des autres constantes. Ceci paraît contredire le théorème de Beth [1]. On verra aisément que ce dernier peut être rétabli sous la forme suivante :

Soit (Σ') une extension d'une théorie (Σ) dont le langage comporte un predicat supplémentaire r. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1 - r est définissable dans (Σ') en fonction des autres constantes

2- { tout modèle séparé de (Σ) se prolonge, d'une seule manière, en un modèle de (Σ')
tout modèle séparé de (Σ') induit un modèle *séparé* de (Σ) '

La dernière condition est toujours satisfaite dans le cas égalitaire, d'où la formulation usuelle du théorème.

On pourrait multiplier les exemples de singularités, généralement faciles à interpréter, et à placer dans un contexte qui les explique et contient le cas usuel égalitaire (ainsi l'importante construction de l'ultraproduit d'une famille de structures doit être modifiée si l'on veut qu'un ultraproduit de structures séparées soit séparé). Nous allons étudier en détails deux points :

1 - L'extensibilité des structures (si l'on veut, le 2-ème théorème de Löwenheim–Skolem)
2 - La réalisation (ou l'omission) d'une famille de formules.

II - EXTENSIBILITE DES STRUCTURES :

Une structure séparée $\mathfrak{S}$ est dite *inextensible* si elle n'a pas d'extension logique séparée autre qu'elle même Sinon elle est dite *extensible*. Dans le cas égalitaire, les seules structures inextensibles sont les structures finies. Dans le cas général, l'exemple n° 4 du I-5° montre qu'il n'en est rien.

1° - Interprétation topologique des notions précédents :

Soit $\mathfrak{S}$ une structure, de domaine X. Soit A une partie de X. Une partie y de X est dite A-*quasi-élémentaire* s'il existe une formule $F(x_1, \ldots, x_p, x)$ et $a_1, \ldots, a \in A$ tel que pour tout $b \in X$, $b \in Y$ si et seulement si $\mathfrak{S} \models F(a_1, \ldots, a_p, b)$.

Si $A = \emptyset$ on retrouve la notion *d'ensemble élémentaire* (cf. I-4°)

Les ensembles A-quasi-élémentaires forment une sous-algèbre booléienne $\mathfrak{S}^A$ de $\mathfrak{P}(X)$.

Ils constituent aussi la base d'une topologie $T<\mathfrak{S},A>$ sur X. Chaque ensemble A-quasi-élémentaire est un of pour cette topologie. D'où un espace engendré par ses ofs. Un tel espace est uniformisable: Plus précisément, à chaque ensemble A-quasi-élémentaire Y, associons l'équivalence sur X définie par la partition $\{Y, X\text{-}Y\}$: la famille des R_Y engendre un filtre d'entourages pour une structure uniforme compatible avec $T<\mathfrak{S},A>$

Proposition II-1 : *soit* $h : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ *un homomorphisme . Posons* $A' = h[|\mathfrak{S}|]$ | h *est logique si et seulement si* A' *est partout dense dans* $|\mathfrak{S}'|$ *pour* $T<\mathfrak{S}', A'>$!

C'est la traduction du critère de Tarski rappelé au I-3° .

Un autre exemple de traduction est le suivant : on dit que $\mathfrak{S}$ *est* A*-saturée* si toute famille compatible de $\mathfrak{S}_A$ a une intersection non vide. Ceci revient à dire que $T<\mathfrak{S}, A>$ est *quasi-compacte*

En particulier, $\mathfrak{S}$ est saturée si pour tout $A \subset X$, tel que $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{\bar{X}}}$, $\mathfrak{S}$ est A-saturée.

On peut montrer comme dans le cas égalitaire, que deux structures *séparées* saturées, de même cardinal, et logiquement équivalentes, sont isomorphes. Bien entendu, la condition de séparation est indispensable.

Si $A = |\mathfrak{S}|$, on pose $T<\mathfrak{S}, A> = T_{\mathfrak{S}}$

La famille des équivalences associées aux prédicats de poids > 0 engendre un filtre d'entourages, d'où une structure uniforme $U_{\mathfrak{S}}$

Proposition II-2 : $U_{\mathfrak{S}}$ *induit la topologie* $T_{\mathfrak{S}}$.

Auparavant, établissons le

Lemme II-1 : *Soit* $F(x_1,\ldots, x_p)$ *une formule et soit* $E(x,y)$ *la conjonction des formules associées aux prédicats de poids positifs ayant une occurrence dans* F. *Quel que soit* $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} \models E(x_1,y_1) \wedge \ldots \wedge E(x_p,y_p) \to (F(x_1,\ldots, x_p) \longleftrightarrow F(y_1,\ldots, y_p))$$

Faisant abstraction des prédicats qui ne figurent pas dans F, $E(x,y)$ représente l'équivalence de séparation. Doù le résultat.

Cela étant , soit T' la topologie induite par $U_{\mathfrak{S}}$.

Pour toute équivalence associée R, et tout $a \in X$, la classe de a modulo R est un ensemble X-quasi-élémentaire (nous dirons simplement : *quasi-élémentaire)*, donc un ouvert de $T_{\mathfrak{G}}$: ainsi $T_{\mathfrak{G}}$ est plus fine que T'.

Soit maintenant Y un ensemble quasi-élémentaire. Il est représenté par une formule $F(x_1,\ldots, x_p, x)$ et un p-uple $< a_1,\ldots,a_p >$ extrait de X. Soit E(x,y) la conjonction des formules associées aux prédicats de poids positif de F. E représente une équivalence R, qui est un entourage de $U_{\mathfrak{G}}$.

Soit $b \in Y$. Soit C_b la classe de b modulo R. Utilisant le lemme II-1, il vient, quel que soit $c \in X$:

$$\mathfrak{G} \models E(b,c) \rightarrow (F(a_1, \ldots, a_p, b) \rightarrow F(a_1,\ldots, a_p, c))$$

En particulier, si $c \in C_b$:

$$\mathfrak{G} \models F(a_1,\ldots, a_p, b) \rightarrow F(a_1,\ldots, a_p, c)$$

D'où , puisque $b \in Y$:

$$\mathfrak{G} \models F(a_1,\ldots,a_p, c)$$

Ainsi $C_b \subset Y$, ce qui montre que Y est ouvert dans T' : T' est plue fine que $T_{\mathfrak{G}}$

Corollaire : *$\mathfrak{G}$ est séparé si et seulement si $T_{\mathfrak{G}}$ est séparée.*

On utilise la proposition I-1.

Lemme II-2 : *toute équivalence élémentaire est un entourage de $U_{\mathfrak{G}}$.*

Soit F(x,y) une formule représentant une équivalence dans $\mathfrak{G}$.
Soit E(x,y) la conjonction des formules associées aux prédicats de poids positifs dans F. Oublions les prédicats qui n'ont pas d'occurence dans F : E(x,y) représente l'équivalence de séparation, donc est plus fine que l'équivalence définie par F(x,y).

Lemme II-3 : *Soit* h *un homomorphisme séparable de $\mathfrak{G}$ vers $\mathfrak{G}'$. $U_{\mathfrak{G}}$ est l'image réciproque par* h *de* $U_{\mathfrak{G}'}$.

Car les équivalences associées de $\mathcal{G}$ sont les images réciproques des équivalences associées de $\mathcal{G}'$.

En particulier, ceci est vrai si h est logique. On voit ainsi qu'un homomorphisme séparable est continu.

Soit $F(x_1, \ldots, x_p)$ une formule. Pour toute structure $\mathcal{G}$ elle représente une application $\bar{F}$ de $|\mathcal{G}|^p$ dans $\{0, 1\}$, définie par :

$$\bar{F}(a_1, \ldots, a_p) = 1 \iff \mathcal{G} \models F(a_1, \ldots, a_p)$$

On munit $\{0,1\}$ de la structure uniforme discrète. On peut alors énoncer :

Lemme II-4 : *L'application* $\bar{F}$ *est uniformément continue.*

C'est une simple traduction du lemme II-1.

2° - Le théorème de Löweinheim-Skolem - Tarski :

Le 1er théorème de Löweinheim-Skolem admet une adaptation directe en langage de modèles séparés. Nous avons remarqué qu'il n'en est pas de même du second appelé aussi théorème de Löweinheim-Skolem-Tarski.

Disons qu'une structure $\mathcal{G}$ est *localement finie* si $U_{\mathcal{G}}$ est une structure uniforme précompacte. Toute structure finie est localement finie, la réciproque étant fausse, même si $\mathcal{G}$ est séparée.

On montrera aisément le critère suivant :

Lemme II-4 : $\mathcal{G}$ *est localement finie si et seulement si pour chaque équivalence associée* R, $|\mathcal{G}| / R$ *est fini.*

Ce lemme a une forme syntaxique qui est la suivante :

Lemme II-5 : $\mathcal{G}$ *est localement fini si et seulement si pour toute formule associée* F(x,y) *il existe un entier* n *tel que :*

$$(1) \quad \mathcal{G} \models \forall x_1 \dots x_n [\, F(x_1, x_2) \quad \dots \quad F(x_1, x_n) \quad \dots \quad F(x_{n-1}, x_n)]$$

Cela étant, le théorème de Lôweinheim–Skolem de forme ascendante peut s'énoncer :

Proposition II-3 : *Soit* $\mathcal{G}$ *une structure séparée , de domaine* X, *non localement finie. Pour tout cardinal* ξ *infini, tel que* $\xi \geqslant \overline{\overline{X}}$ *et* $\xi \geqslant \overline{\overline{I}}$ *il existe une extension logique séparée de* $\mathcal{G}$ *de cardinal* ξ.

$\mathcal{G}$ étant non localement finie, il existe une formule associée F(x,y) telle que chacun des énoncés suivants soit valide :

$$\exists\, x_1\, x_2\, [\neg F(x_1, x_2)]$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\exists\, x_1 \dots x_n [\, \neg F(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \neg F(x_1, x_n) \wedge \dots \wedge \neg F(x_{n-1}, x_n)]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Le raisonnement classique fondé sur la compacité et l'utilisation du 1er théorème de Löweinheim - Skolem peut être repris, F(x,y) jouant le rôle de $x \equiv y$ dans la preuve usuelle.

Application : ceci nous conduit à reformuler le critère de complétude de Vaught [6] . Une théorie (Σ) est dite ξ*-catégorique* si elle a un modèle séparé de cardinal ξ, et si tous ses modèles séparés de cardinal ξ sont isomorphes.

Proposition II-4 : *Soit* (Σ) *une théorie. Soit* ξ *un cardinal infinié supérieur ou égal au cardinal du langage de* (Σ) *si* (Σ) *est* ξ*-catégorique, et n'admet pas de modèle localement fini,* (Σ) *est complète.*

On peut montrer que cet énoncé est faux si on remplace «localement fini» par «fini».

3o - Etude des structures localement finies :

Proposition II-5 : *Soit* $\mathcal{G}$ *une structure séparée localement finie. Soit* $\xi = \max \{\aleph_0, \overline{\overline{I}}\}$ *. Le cardinal de* $\mathcal{G}$ *est majoré par* 2^{ξ}

En effet $T_{\mathcal{G}}$ est séparée et a une base d'ouverts de cardinal $\leqslant \xi$.

Corollaire : *Soit $\mathcal{G}$ une structure séparée. Pour que pour tout cardinal ξ il existe un cardinal $\eta \geqslant \xi$ tel que $\mathcal{G}$ ait une extension logique séparée de cardinal η, il faut et il suffit que $\mathcal{G}$ soit non localement finie.*

Il suffit de composer les propositions II-3 et II-5.

Lemme II-6 : *Soit $\mathcal{G}$ une structure localement finie, de domaine* X. *Soit* Y *une partie de* X, *non vide, contenant les éléments distingués de $\mathcal{G}$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1 - Y *est partout dense pour $T_{\mathcal{G}}$*
2 - Y *est partout dense pour $T\langle\mathcal{G},Y\rangle$*
3 - $\mathcal{G}$ (Y) *est restriction logique de $\mathcal{G}$*
4 - $\mathcal{G}$ (Y) *est logiquement équivalente à $\mathcal{G}$*

$1 \Rightarrow 2$: trivialement
$2 \Rightarrow 3$: cf. proposition II-1
$3 \Rightarrow 4$: trivialement
$4 \Rightarrow 1$: soit Ω un ouvert non vide pour $T_{\mathcal{G}}$. Il existe $R_1, \ldots, R_n$, équivalences associées, telles que si $R = R_1 \cap \ldots \cap R_n$, Ω contienne une classe modulo R. R est représentée dans $\mathcal{G}$ par une formule $F(x,y)$, universelle. F définit une équivalence R' dans $\mathcal{G}$ (Y) et puisque $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(Y)$, R et R' ont le même nombre de classes. F étant universelle, deux éléments a,b de Y équivalents modulo R le sont modulo R'.

Ceci montre que tout système complet de représentants pour R' est un système complet de représentants pour R : donc Ω contient un élément de Y.

$\mathcal{G}$ étant une structure quelconque, si Y est une partie partout dense pour $T_{\mathcal{G}}$, on voit aisément que tout ensemble quasi-élémentaire est Y-quasi-élémentaire En particulier, dans le lemme II-6 on a en fait $T_{\mathcal{G}} = T\langle\mathcal{G},Y\rangle$.

Lemme II-7 : *Si $\mathcal{G}$ est une structure localement finie il existe une extension logique $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ telle que $T_{\mathcal{G}'}$ soit quasi-compacte. De plus, si $\mathcal{G}$ est séparée, on peut choisir $\mathcal{G}'$ séparée.*

En effet, pour que $\mathcal{G}$', extension logique de $\mathcal{G}$, soit quasi-compacte, il suffit, d'après la remarque précédente, qu'elle soit $|\mathcal{G}|$-saturée. De telles extensions existent par le théorème de compacité. Enfin, si $\mathcal{G}$ est séparée, la séparée d'une extension logique $|\mathcal{G}|$-saturée de $\mathcal{G}$ est encore une extension logique $|\mathcal{G}|$-saturée.

Ceci nous conduit à considérer les structures localement finies pour lesquelles $T_{\mathcal{G}}$ est *compact* Elles sont saturées, mais c'est une condition bien plus forte que la saturation.

Lemme II-8 : *Soit* $\mathcal{G}$ *une structure. Il y a équivalence entre :*

1. $T_{\mathcal{G}}$ *est quasi-compacte*
2. *Pour tout ensemble* V *de variables, pour toute application* φ *de* V *dans* $|\mathcal{G}|$, *pour tout ensemble* F *de formules, si toute partie finie de* F *est coréalisée pour un assignement qui prolonge* φ, *il existe un assignement* $\tilde{\varphi}$ *qui prolonge* φ *et coréalise* F.

$2 \Rightarrow 1$. Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ une famille compatible d'ensemble quasi-élémentaires.

On peut représenter chaque A_λ par une formule $F_\lambda(y_1^\lambda, \ldots, y_{p_\lambda}^\lambda, x)$, de sorte que pour $\lambda \neq \mu$ on ait $y_i^\lambda \neq y_j^\mu$ Enfin pour chaque λ il existe $< a_1^\lambda, \ldots, a_{p_1}^\lambda >$ tels que $b \in A_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{G} \models F_\lambda(a_1^\lambda, \ldots, a_{p_\lambda}^\lambda, b)$.

Soit V l'ensemble des y_i^λ. On définit $\varphi : V \rightarrow |\mathcal{G}|$ par $\varphi(y_i^\lambda) = a_i^\lambda$

Cela étant, quels que soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$, il existe un assignement φ' prolongeant φ qui coréalise $F_{\lambda 1}, \ldots, F_{\lambda n}$. Donc il existe $\tilde{\varphi}$ prolongeant φ et coréalisant les F_λ. $\tilde{\varphi}(x)$ est un élément commun aux A_λ •

$1 \Rightarrow 2$. On donne V φ et F une famille de formules telle que toute sous-famille finie soit coréalisée par un assignement qui prolonge φ.

Soit F^* la famille des formules F telles qu'il existe $F_1, \ldots, F_n \in F$ avec:

$$\vdash F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F$$

F^* possède encore cette propriété. On peut donc raisonner en suposant que $F = F^*$.

Enfin, pour chaque $Y \subset \mathcal{X}$, ensemble des variables, on appelle $\mathcal{F}Y$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}$ dont les variables libres appartiennent à Y.

Soit l'ensemble des couples $<Y, \psi>$ où $Y \subset \mathcal{X}$, $v \subset Y$, où ψ est une application de y dans $|\mathfrak{S}|$, prolongeable en un assignement qui coréalise $\mathcal{F}Y$

Cet ensemble contient $<v,\varphi>$, donc est non vide. Il est ordonné inductivement par la relation :

$$< Y\psi> \leqslant <Y', \psi'> \text{ si et seulement si } Y \subset Y' \text{ et } \psi' \text{ prolonge } \psi .$$

Il existe donc des éléments maximaux $<Y^*, \psi>$. Supposons $Y^* \neq \mathcal{X}$.
Il existe $x \in \mathcal{X} - Y^*$. Posons $y_1 = Y^* \cup \{x\}$

ψ^* détermine à partir des éléments de $\mathcal{F}Y_1$, une famille d'ensembles quasi-élémentaires.

Soient $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}Y_1$

$$\exists x [F_1 \wedge \ldots \wedge F_n] \in \mathcal{F} \quad , \text{ donc } \quad \exists x [F_1 \wedge \ldots \wedge F_n] \in \mathcal{F}Y^*$$

La famille des ensembles quasi-élémentaires obtenue est donc compatible. Soit b un élément de leur intersection. Prolongeons ψ^* à Y_1 en posant $\psi_1(x) = b$.

On obtient un élément $<Y_1, \psi_1'>$ majorant strictement $<Y^*, \psi^*>$. Contradiction. Donc $Y^* = \mathcal{X}$ et ψ^* est un assignement qui coréalise $\mathcal{F}$ (et prolonge φ).

Lemme II-9 : *Soit $\mathfrak{S}$ une structure compacte (i.e. $T_{\mathfrak{S}}$ est compacte). Si $\mathfrak{S}'$ est séparée et logiquement équivalente à $\mathfrak{S}$, il existe un monomorphisme logique de $\mathfrak{S}'$ dans $\mathfrak{S}$.*

Autrement dit, dans un type élémentaire dont les éléments sont localement finis, les éléments compacts sont universels.

On suppose l'ensemble X des variables est de cardinal $\geqslant$ au cardinal de $|\mathcal{G}'| = X'$.

Soit φ' une application surjective de X sur X'. Soit F l'ensemble des formules qui sont coréalisées par φ'.

Puisque $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}'$, toute partie finie de F est coréalisée dans $\mathcal{G}$. Donc il existe un assignement φ qui coréalise F dans $\mathcal{G}$.

$$\varphi'(x) = \varphi'(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x) = \varphi(y) \ :$$

en effet, $\varphi'(x) = \varphi'(y) \Longleftrightarrow$ pour toute formule associée $F(x,y)$,$\mathcal{G}' \models F[\varphi'(x),\varphi'(y)]$ ı

Alors $\mathcal{G} \models F(\varphi(x),\varphi(y))$, d'où $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Le même raisonnement prouve que $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi'(x) = \varphi'(y)$

Ceci permet de fermer par une injection $j : X' \to X = |\mathcal{G}|$ le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X' & & X \end{tikzcd}$$

φ est un morphisme logique : soit $F(x_1 ,..., x_p)$ une formule et soient $a'_1 ,..., a'_p \in X'$.

il existe $y_1 ,..., y_p$ tels que $\varphi'(y_i) = a'_i$.

$\mathcal{G}' \models F(a'_1,...,a'_p) \Rightarrow F(y_1,...,y_p) \in F \Rightarrow \quad \models F(\varphi(y_1),...,\varphi(y_p)) = F(j(a'_1),...,j(a'_p))$

Lemme II-10 : *Deux structures compactes logiquement équivalentes sont isomorphes.*

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ compactes, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}'$:

Il existe j : $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ qui est un monomorphisme logique. $j[|\mathcal{G}|]$ est donc partout dense dans $|\mathcal{G}'|$. D'autre part, j est continu, donc $j[|\mathcal{G}|]$ est compact, donc fermé.

Ainsi $j[|\mathcal{G}|] = |\mathcal{G}'|$ et j est surjective.

Dans une classe d'équivalence logique, tous les éléments sont localement finies, ou aucun n'est localement fini. Ceci permet de parler de *classe d'équivalence logique (non) localement finie.*

Ce qui précède peut être résumé ainsi :

Proposition II-6 : *dans une classe d'équivalence logique localement finie :*

1 - il existe, à l'isomorphisme près, un seul modèle compact $\mathcal{G}_0$.
2 - tout élément séparé de la classe est isomorphe à une restriction logique de $\mathcal{G}_0$.

On reconnait les propriétés renforcées d'unicité et d'universalité des structures saturées. Les restrictions logiques de $\mathcal{G}_0$ sont les structures induites sur les parties partout denses (pour $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_0}$) qui contiennent les éléments distingués.

4° - Lien avec l'espace de stone :

Soit $\mathcal{G}$ une structure, de domaine X. Soit A une partie de X. Appelons $St_A(\mathcal{G})$ l'espace de stone dual de l'algèbre $\mathcal{G}^A$ des ensembles A-quasi-élémentaires.

Il y a une application naturelle Θ_A de X dans $St_A(\mathcal{G})$, qui à tout $x \in X$ associe l'ensemble des $\Omega \in \mathcal{G}^A$ tels que $x \in \Omega$.

Un ultrafiltre p de $\mathcal{G}^A$ est dit *réalisé* dans $\mathcal{G}$ s'il est de la forme $\Theta_A(x)$.

Posons $R_e < A, \mathcal{G} > = \Theta_A(X)$.

Les rapports entre X et $R_e < A, \mathcal{G} >$ sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition II-7 :

1 - Θ_A *est injective si et seulement si* $T\langle \mathcal{G}, A\rangle$ est séparée
2 - Θ_A *est surjective si et seulement si* $\mathcal{G}$ *est* A-*saturé.*
3 - $T\langle \mathcal{G}, A\rangle$ *est l'image réciproque par* Θ_A *de la topologie de* $\mathrm{St}_A(\mathcal{G})$.
4 - $\mathrm{R_e}\langle \mathcal{G}, A\rangle$ *est partout dense dans* $\mathrm{St}_A(\mathcal{G})$.

1 - Soient a, b $\in X$, avec a $\neq$ b.

$\Theta_A(a) \neq \Theta_A(b) \iff$ il existe $\Omega \in \mathcal{G}^A$ avec $a \in \Omega$ et $b \notin \Omega \iff T_{\langle \mathcal{G}, A\rangle}$ est séparée.

2 - Θ_A surjective $\iff$ tout ultrafiltre de $\mathcal{G}^A$ est réalisé dans $\mathcal{G} \iff T\langle \mathcal{G}, A\rangle$ quasi-compact $\iff$ $\mathcal{G}$ est A-saturé.

3 - Soit Ω un ensemble A-quasi-élémentaire. Soit σ l'isomorphisme de stone de $\mathcal{G}^A$ dans l'ensemble des parties de $\mathrm{St}_A(\mathcal{G})$.

* $\Theta_A(\Omega) = \{\Theta_A(x) \mid x \in \Omega\} = \{\Theta_A(x) \mid \Omega \in \Theta_A(x)\} = \mathrm{R_e}\langle \mathcal{G}, A\rangle \cap \sigma(\Omega)$

Donc $\Theta_A(\Omega)$ est ouvert dans $\mathrm{R_e}\langle \mathcal{G}, A\rangle$

$\overset{-1}{\Theta}_A[\sigma(\Omega)] = \{x \in X \mid \Theta_A(x) \in \Omega\} = \{x \mid x \in \Omega\} = \Omega$

Donc $\overset{-1}{\Theta}_A[\sigma(\Omega)]$ est ouvert dans X.

4 - Soit ω un of non vide de $\mathrm{St}_A(\mathcal{G})$. Il est de la forme $\sigma(\Omega)$ où $\Omega \neq O$.

Soit $a \in \Omega$. $\Theta_A(a)$ contient Ω, donc $\Theta_A(a) \in \omega$

Ainsi ω coupe $\mathrm{Re}\langle \mathcal{G}, A\rangle$

Corollaire : $\mathcal{G}$ *est compact si et seulement si* Θ_X *est bijectif.*

. Si Θ_X est bijectif, c'est un homéomorphisme de X muni de $T_{\mathfrak{G}}$ sur $St_X(\mathfrak{G}) = St(\mathfrak{G})$

Donc $T_{\mathfrak{G}}$ est compacte.

. Supposons $T_{\mathfrak{G}}$ compacte.

Θ_X est un homéomorphisme de X sur $Re < \mathfrak{G}, X>$, qui est alors compact, donc fermé dans $St(\mathfrak{G})$. D'après 4, Θ_X est surjective.

Lemme II-11 : *Si* $\mathfrak{G}$ *est une structure égalitaire,* $St(\mathfrak{G})$ *est atomique*

Tout ultrafiltre de $\mathfrak{G}^X$ qui est réalisé par a est engendré par $x \equiv a$, donc principal: Ainsi, l'ensemble des points isolés de $St(\mathfrak{G})$ est partout dense.

Exemple : Soit B une algèbre de Boole: Introduisons une famille $\{ r_a \}_{a \in B}$ de prédicats monadiques, et la théorie T_B dont les axiomes sont les énoncés suivants :

* $\neg \forall x [r_\alpha x \longleftrightarrow r_\beta x]$ $(\alpha, \beta \in B,\ \alpha \neq \beta)$

* $\forall x [r_{\neg\alpha} x \longleftrightarrow \neg r_\alpha x]$ $(\alpha \in B)$

* $\forall x [r_{\alpha \vee \beta} x \longleftrightarrow r_\alpha x \vee r_\beta x]$ $(\alpha, \beta \in B)$

un modèle de T_B est une représentation de B dans un champ d'ensembles.

Les formules associées sont de la forme $r_\alpha x \longleftrightarrow r_\alpha y$.

Pour tout a appartenant au domaine X d'un modèle $\mathfrak{G}$, l'ensemble des b tels que $\mathfrak{G} \models r_\alpha a \longleftrightarrow r_\alpha b$ est représenté soit par $r_\alpha x$(si $\mathfrak{G} \models r_\alpha a$) , soit par $r_{\neg\alpha} x$ (si $\mathfrak{G} \models \neg r_\alpha a$).

Soit $\mathfrak{G}$ un modèle compact de T_B. Tout ensemble quasi-élémentaire est réunion finie de classes d'équivalences modulo des équivalences de la forme $R_1 \cap \ldots \cap R_n$, où les R_i sont associées. Ici, on voit que tout ensemble quasi-élémentaire est représenté par une formule $r_\alpha x$ (et est donc élémentaire). $<x, T_{\mathfrak{G}}>$ s'identifie canoniquement au dual de B, de telle sorte que deux *modèles compacts de* T_B *sont isomorphes*. On voit ainsi que T_B est *complète* (dans [3], ce résultat est établi en montrant que T_B est model complète et saturée pour les énoncés en $\exists$).

5° - Spectre d'une théorie :

Appelons *spectre* d'une théorie T, la classe des cardinaux de ses modèles séparés.

Le spectre de T est la réunion des spectres de ses extensions complètes. Il suffit donc d'étudier le cas où T est *complète*.

Deux cas se présentent alors :

1 - les modèles de T sont tous non localement finis *le spectre est alors une classe propre* contenant en particulier tous les cardinaux qui dépassent $\bar{\bar{I}} + \mathbf{N}_0$.

2 - Les modèles de T sont tous localement finis : le spectre est un *ensemble* (proposition II-5).

Appelons $\mu(T)$ le plus petit élément du spectre de T.

Nous dirons que T est *normale* si elle satisfait aux conditions suivantes :

N_1 - quels que soient les individus a,b de L_T , avec $a \neq b$, il existe une formule associée F(x,y) telle que $T \vdash \neg F(a,b)$.

N_2 - quels que soient les prédicats de même poids p , r et s, avec $r \neq s$,

$$T \vdash \neg \forall x_1 \ldots x_p [r x_1 \ldots x_p \longleftrightarrow s x_1 \ldots x_p]$$

Toute théorie complète peut être remplacée par une théorie normale obtenue en ôtant des individus ou des prédicats superflus.

Lemme II - 12 : *Soit* $\xi = \bar{\bar{I}} + \mathbf{N}_0$. *Si* T *est normale, on a les relations :*

$$\underline{\mu(T) \leqslant \xi \leqslant 2^{\mu(T)}}$$

La première inégalité résulte du théorème de Löwenheim-Skolem.

Pour la deuxième , supposons $\xi > 2^{\mu(T)}$.

L'ensemble des individus s'injecte dans le domaine de tout modèle (condition N_1). Donc son cardinal est majoré par $\mu(T)$, donc strictement majoré par ξ (qui est par ailleurs infini). Par suite l'ensemble des prédicats est de cardinal ξ . Donc il existe $n \geqslant 0$ tel que l'ensemble des prédicats de poids n soit de cardinal ξ. En fait, la condition N_2 implique qu'il y a au plus 2 prédicats de poids 0. Donc cet n est $\geqslant 1$.

Soit un modèle de cardinal $\mu(T) = \eta$. L'ensemble des relations n-aires sur le domaine a pour cardinal $2^{\eta} < \xi$; donc la condition N_2 n'est pas satisfaite. Contradiction.

Lemme II-13 : *Soient* ξ, η *deux cardinaux appartenant au spectre d'une théorie complète* T, *dont les modèles sont localement finis. Tout cardinal* ζ *tel que* $\xi \leqslant \zeta \leqslant \eta$ *appartient au spectre de* T.

Suposons $\xi \leqslant \eta$.

C'est une conséquence de la proposition II-6 : soit $\mathcal{G}_0$ un modèle compact de T. Il existe $Y \subset |\mathcal{G}_0|$, $\bar{\bar{Y}} = \xi$, tel que $\mathcal{G}_0(Y)$ soit restriction logique de $\mathcal{G}_0$ D'autre part $|\bar{\bar{\mathcal{G}}}_0| \geqslant \eta$. Y est partout dense pour $T_{\mathcal{G}_0}$, et contient les éléments distingués : il en est de même de toute partie plus grande que Y.

Si on admet l'hypothèse généralisée du continu (H.G.C) , le lemme II-13 devient trivialement vrai, en raison du lemme II-12. Le même résultat vaut alors pour une théorie complète dont les modèles sont non localement finis (et en particulier, dans le cas égalitaire). Nous ignorons si ce résultat peut être alors prouvé sans référence à HGC. Il suggère une étude plus fine des restrictions logiques d'un modèle, sur des *domaines dont le cardinal peut être inférieur à celui du langage de la théorie.*

Admettant HGC, les spectres possibles pour une théorie complète T, d'un langage de cardinal ξ , dont les modèles sont localement finis et infinis, sont les suivants :

$\xi = \mu(T) = \mathbf{N}_\alpha$	1 $\mathbf{N}_\alpha$	2 $\mathbf{N}_\alpha ; \mathbf{N}_{\alpha+1}$		
$\mu(T) = \mathbf{N}_\alpha$ $\xi = \mathbf{N}_{\alpha+1}$	3 $\mathbf{N}_\alpha$	4 $\mathbf{N}_\alpha , \mathbf{N}_{\alpha+1}$	5 $\mathbf{N}_\alpha, \mathbf{N}_{\alpha+1}, \mathbf{N}_{\alpha+2}$	6 $\mathbf{N}_\alpha ; \mathbf{N}_{\alpha+2}$

Le cas 6 est exclus à cause du théorème de Löwenheim-Skolem.

L'exemple 4 du § I-5 ⁰ réalise le cas 1 lorsque $\bar{\bar{I}} = \mathbf{N}_\alpha$. Il suffit de montrer que la théorie est complète : ceci provient de ce que les modèles compacts, qui sont les modèles séparés de deuxième espèce sont isomorphes:

Pour le cas 2, prendre une théorie T_B où B est l'algèbre booléienne libre de cardinal $\mathbf{N}_\alpha$.

Le cas 5 est réalisé avec T_B , où B est l'algèbre des parties d'un ensemble de cardinal $\mathbf{N}_\alpha$.

Un exemple du cas 4 est décrit dans [3], tandis que le cas 3 restait non traité.

En fait il est facile de voir que 3 *est* irréalisable.

Lemme II-14 : *Soit $\mathfrak{S}$ une structure localement finie. Soit ξ le cardinal de l'ensemble des ensembles quasi-élémentaires, on suppose $\xi \geqslant \mathbf{N}_0$. L'ensemble des relations n-aires définissables par une formule est de cardinal $\leqslant \xi$.*

Soit $F(x_1,...,x_p)$ une formule, et soit $E(x,y)$ la conjonction des formules associées aux prédicats de poids $> o$ de F. $E(x,y)$ définit une équivalence ρ et F une relation p-aire R. Le lemme II-1 exprime que ρ est compatible par rapport à R. Or ρ détermine n-classes, et l'ensemble des relations p-aires compatibles avec ρ est de cardinal 2^{np}. Or l'ensemble des classes des équivalences telles que ρ engendre l'algèbre des ensembles quasi-élémentaires. Il y en a donc ξ.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$ il existe au plus ξ prédicats de poids n.

Cela étant, soit $\mathfrak{S}$ une structure *compacte* , modèle d'une théorie complète normale T.

Le domaine X s'identifie à l'espace de stone de l'algèbre des ensembles quasi-élémentaires de $\mathfrak{S}$, dont le cardinal est $\zeta \leqslant \max \{ \bar{\bar{X}},\xi \}$. Supposons $\mu(T) = \aleph_\alpha$ $\xi = \aleph_{\alpha+1}$ et plaçons nous dans le cas 3. Alors $\bar{\bar{X}} = \mu(T) < \xi$. Par le lemme II-14, on en déduit que $\zeta = \xi$, car il existe $n \geqslant 1$ tel qu'il y ait ξ prédicats de poids n. Il y aurait donc une algèbre booléienne de cardinal ξ ayant $\mu(T) < \xi$ ultrafiltres. Ceci est impossible : Toute famille séparante d'ofs engendrant l'algèbre duale d'un espace de boole X , on voit que si X est infini, son cardinal majore celui de l'algèbre duale.

III - OMISSION D'UN ENSEMBLE DE FORMULES :

Soit T une théorie de $\underline{L}_\tau$, pour un type $\tau = \{n_i\}_{i\in I}$ donné. *Dans tout ce qui suit on suppose que* $\bar{\bar{I}} \leqslant \aleph_0$. Les variables formant un ensemble dénombrable, rangé dans une suite $x_0, x_1,...,x_n$. Soit B(T) l'algèbre de Lindembaum-Tarski de T (obtenue à partir des formules par passage au quotient modulo l'équivalence $F \sim G \Leftrightarrow \ \vdash F \leftrightarrow G$).

Pour chaque famille X de variables, soit $B_X(T)$ la sous-algèbre formée par les images des formules dont les variables libres sont dans X.

Si F est une formule, soit $\bar{F}$ son image dans B(T). Si Γ est une partie de B(T), soit Γ^* l'ensemble des formules F telles que $\bar{F} \in \Gamma$.

Si a est un individu de L_τ , son interprétation est désignée par $\bar{a}_{\mathfrak{S}}$ ($\bar{a}$ si aucune confusion n'est à craindre).

Exemple : Soit $E(x_i,y_i)$ l'ensemble des formules associées construites avec x_i,y_i pour variables libres.

Leurs images engendrent dans $B_{\{x_i,x_j\}}$ un filtre désigné par $\mathcal{E}(x_i,x_j)$.

Le filtre engendré par les $\overline{F(x_i,a)}$, où $F(x_i,x_j) \in \mathcal{E}(x_i,x_j)$ sera désigné par $\mathcal{E}(x_i,a)$.

1° - Lemmes fondamentaux.

Soit Γ une partie de $B_X(T)$. On dit que Γ est *réalisée* dans un modèle $\mathcal{G}$ de T, s'il existe une application $\varphi : X \to |\mathcal{G}|$ et un assignement $\hat{\varphi}$ prolongeant φ qui coréalise l'ensemble des F telles que $\overline{F} \in \Gamma$. En fait seule la restriction φ à X de $\hat{\varphi}$ intervient, et on dira pour aller vite que φ *réalise* Γ.

Lemme III-1 : *s'il existe un modèle qui réalise* Γ , Γ *est compatible dans* $B_X(T)$, *et tout modèle qui réalise* Γ *le filtre engendré par* Γ. *Inversement tout filtre est réalisé dans un modèle au moins de cardinal* $\leqslant \overline{\overline{I}} + \mathbb{N}$.

La preuve est immédiate, et permet de ne considérer que le problème de la réalisation *des filtres.* La partie réciproque est une application du théorème de compacité.

Lemme III-2 : *Soient* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{G}'$ *deux modèles de* T, h *un homomorphisme logique de* $\mathcal{G}$ *vers* $\mathcal{G}'$.
Tout filtre de $B_X(T)$ *réalisé dans* $\mathcal{G}$ *est réalisé dans* $\mathcal{G}'$.

Même évidence.

Proposition III-1 : *Soit* Γ *un filtre de* $B_X(T)$ *et* $\mathcal{G}$ *un modèle de* T. *Il y a équivalence entre :*

1 - Γ *est réalisé dans* $\mathcal{G}$
2 - Γ *est réalisé dans le séparé de* $\mathcal{G}$

$1 \Rightarrow 2$: d'après le lemme III-2.

$2 \Rightarrow 1$: soient $\Sigma(\mathcal{G})$ le séparé de $\mathcal{G}$ et p la projection canonique de $\mathcal{G}$ sur $\Sigma(\mathcal{G})$;

Soit s une section quelconque associée à p. Soit φ un assignement qui réalise Γ dans $\Sigma(\mathcal{G})$. Montrons que $s_0\varphi$ réalise Γ dans $\mathcal{G}$:

Soit $F(x_1, ..., x_p)$ une formule quelconque, et supposons que $\Sigma(\mathcal{G}) \models F(\varphi(x_1),..., \varphi(x_p))$.

Posons $a_i = s_0\varphi(x_i)$, de sorte que $p(a_i) = \varphi(x_i)$.

Alors $\Sigma(\mathcal{G}) \models F((\varphi(x_1), ..., \varphi(x_p)) \Rightarrow \mathcal{G} \models F(a_1, ..., a_p)$

Ainsi on peut ne prendre en considération que les modèles séparés.

Lemme III-3 : *Soient* $\cup$ *un ultrafiltre de* $B_X(T)$ *et* a *un individu de* L_T. *Soit* $x_i \in X$. *Il y a équivalence entre :*

1 - Il existe un modèle $\mathcal{G}$ *de* T *et* $\varphi : X \to |\mathcal{G}|$ *qui réalise* $\cup$ *avec* $\varphi(x_i) = \bar{a}$.

2 - $\&(x_i,a) \subset \cup$

3 - Dans tout modèle séparé $\mathcal{G}$ *de* T, *si* $\cup$ *est réalisé par* φ, $\varphi(x_i) = \bar{a}$.

$1 \Rightarrow 2$: Soit $E(x_i,x_j) \in \&(x_i,x_j)$

$\overline{E(x_i,a)} \notin \cup$ implique $\overline{\neg E(x_i,a)} \in \cup$, donc $\mathcal{G} \models \neg E(\bar{a},\bar{a})$, ce qui est impossible.

$2 \Rightarrow 3$: car si $\cup$ est réalisé par φ, et si $E(x_i,a) \in \& (x_i,a)$, $\mathcal{G} \models E(a_i,a)$ avec $a_i = \varphi(x_i)$

$\mathcal{G}$ étant séparé, $a_i = \bar{a}$.

$3 \Rightarrow 1$: car il existe un modèle séparé de T qui réalise Γ.

Lemme III-4 : *Soit* $\cup$ *un ultrafiltre de* $B_X(T)$. *Soient* $x_i,x_j \in X$. *Il y a équivalence entre :*

1 - Il existe un modèle $\mathcal{G}$ *de* T *et* φ : $X \to |\mathcal{G}|$ *qui réalise* $\cup$, avec $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$.

2 - $\&(x_i,x_j) \subset \cup$
3 - Dans tout modèle séparé $\mathcal{G}$ *de* T, *si* $\cup$ *est réalisable par un assignement* φ , $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$.

La démonstration est analogue à celle du lemme III-3.

On en déduit les propositions suivantes :

Proposition III-2 : *Soient* Γ *un filtre de* $B_X(T)$, *a un individu et* $x \in X$.

Il y a équivalence entre :

1 - $\&(x,a) \subset \Gamma$
2 - Dans tout modèle séparé $\mathcal{G}$ *de* T, *si* Γ *est réalisé par* φ $\varphi(x) = \bar{a}$.

$1 \Rightarrow 2$: comme ci-dessous
$2 \Rightarrow 1$: car d'après le lemme III-3, tout ultrafiltre de $B_X(T)$ qui contient Γ contient $\&(x,a)$.

De même :

Proposition III-3 : *Soient* Γ *un filtre de* $B_X(T)$, *et* x_i, $x_j \in X$. *Il y a équivalence entre :*

1 - $\&(x_i,x_j) \subset \Gamma$
2 - Dans tout modèle séparé de T, $\mathcal{G}$, *si* Γ *est réalisé par* φ ,
$\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$.

Remarque : si T est égalitaire (soit $\equiv$ le signe d'égalité), $\&(x_i,a)$ engendre un filtre principal de génération $x_i \equiv a$, qui est maximal. On retrouve un résultat usuel: Ici, la condition « contenir la formule $x_i \equiv a$ » est remplacée par « être plus fin que le filtre engendré par $\&(x_i,a)$ », on a une remarque analogue concernant $\&(x_i,x_j)$.

2) - Réduction d'un filtre.

Soit Γ un filtre de $B_{\mathcal{X}}(T)$.

Une variable $x_i \in \mathcal{X}$ est dite *secondaire* (pour Γ) si on est dans l'un des cas suivants :

1 - Il existe un individu a tel que $\&(x_i,a) \subset \Gamma$
2 - Il existe $j < i$, tel que $x_j \in \mathcal{X}$ et $\&(x_i,x_j) \subset \Gamma$

Sinon x_i est dite *principale.*

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des variables principales pour Γ. La *réduction de* Γ, notée $\tilde{\Gamma}$, est le filtre induit par Γ sur $B_{\mathcal{Y}}(T)$.

Γ est dit *irréductible* s'il est identique à sa réduction.

Lemme III-5 : *Soit* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ *et* $x_i \in \mathcal{Z}$. *Soit* Γ' *le filtre induit par* Γ *sur* $B_{\mathcal{Z}}(T)$.
x_i *est principale pour* Γ' *si elle est principale pour* Γ.

Ceci est évident en remontant aux définitions. En particulier, si Γ est irréductible. Γ' est irréductible.

Soit $F \in \Gamma^*$. On considère toutes les formules F' obtenues à partir de F par l'une des opérations suivantes :

1 - Il existe $x_i \in \mathcal{X}$ et un individu a tel que $\&(x_i,a) \subset \Gamma$ et $F' = (a \mid x_i)F$

2 - Il existe x_i, $n_j \in \mathcal{X}$, avec $j < i$ et $F' = (x_j \mid x_i)F$à

Soit D(F) l'ensemble des formules ainsi associées à F.

Lemme III-6 : $D(F) \subset \Gamma^*$

Plaçons nous dans l'hypothèse 1.

Soit $E(x_i,a) \in \&(x_i,a)$, formée avec les formules associées aux prédicats de F.

$$T \vdash E(x_i,a) \wedge F \rightarrow F'$$

Soit, dans B(T) :

$$\overline{E(x_i,a)} \, . \, \overline{F} \leqslant \overline{F'}$$

or $\overline{E(x_i,a)} \, . \, \overline{F} \in \Gamma$, donc $\overline{F'} \in \Gamma$.

Même démonstration dans la deuxième hypothèse.

Soit Γ un filtre de $B_X(T)$. Pour chaque variable non principale x_i on définit comme suit $\overline{x}_i$:

1 - S'il existe un individu a tel que $\&(x_i,a) \subset \Gamma$, on en choisit un, qu'on appelle $\overline{x}_i$.

2 - Sinon, il existe $j < i$ tel que $\&(x_i,x_j) \subset \Gamma$. Soit j le plus petit indice ayant cette propriété.

On pose $\overline{x}_i = x_j$. Notons que x_j est alors nécessairement une variable principale.

Lemme III-7 : *Soit Γ un filtre de $B_X(T)$. Soit $Y \subset X$ tel que toute variable appartenant à X-Y soit non principale. Soit Γ' le filtre induit par Γ sur $B_Y(T)$. Alors Γ est engendré par la réunion de Γ' et des $\&(x_i,\overline{x}_i)$ pour $x_i \in X$-Y.*

Soit la famille des $\mathcal{Z}$, $Y \subset \mathcal{Z} \subset X$, tels que la restriction $\Gamma_{\mathcal{Z}}$ de Γ à $B_{\mathcal{Z}}(T)$ soit engendré par Γ' et les $\&(x_i,\overline{x}_i)$ pour $x_i \in \mathcal{Z} - Y$.

Cette famille contient Y, et ordonnée par inclusion elle est inductive (ce qui provient de ce que chaque formule contient un nombre fini de variables). Soit $\mathcal{Z}^*$ un élément maximal. Supposons qu'il existe x_i, $x_i \in X - \mathcal{Z}^*$. Posons $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}^* \cup \{x_i\}$.

Soit $F \in \Gamma^*_{\mathcal{Z}_1}$ et posons $F' = (\tilde{x}_i \mid x_i)F$.

$F' \in \Gamma^*$ (cf. lemme III-6), donc $F' \in \Gamma_{\mathcal{Z}^*}$.

Ainsi, il existe $F_1, \ldots, F_p$, dans la réunion de Γ' et des $\&(x_j,\bar{x}_j)$ pour $x_j \in \mathcal{Z}^*\text{-}Y$ tels que $\bar{F}_1 . \bar{F}_2 \ldots \bar{F}_p \leqslant \bar{F}'$.

Soit $E(x_i,t)$ la conjonction des formules associées aux prédicats de F, en sorte que $\overline{E(x_i,x_i)} . \bar{F}' \leqslant \bar{F}$.

Or $\overline{E(x_i,x_i)} \in \&(x_i,\bar{x}_i)$. Donc $\bar{F}$ appartient au filtre engendré par Γ' et la réunion des $\&(x_j,\bar{x}_j)$ pour $x_j \in \mathcal{Z}_1\text{-}Y$. Ainsi $\mathcal{Z}^*$ n'était pas maximal, contradiction. Donc $\mathcal{Z}^* = X$.

Corollaire : *Soient* Γ *un filtre de* $B_X(T)$. *Il y a équivalence entre :*

1 - Γ *est réalisé dans*

2 - $\tilde{\Gamma}$ *est réalisé dans*

$1 \Rightarrow 2$: car $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$

$2 \Rightarrow 1$: Supposons $\tilde{\Gamma}$ réalisé par φ - Soit :

Pour chaque $x \in X$, x non principale, on pose $\bar{\varphi}(x) = \bar{a}_{\mathcal{G}}$ si $\bar{x}_i = a$, $\bar{\varphi}(x) = \varphi(\bar{x}_i)$ si $\bar{x}_i$ est une variable.

On réalise ainsi tous les $\&(x_i,\bar{x}_i)$ avec $x_i \in X$ et non principale.

On applique alors le lemme III-7 :

Lemme III-8 : *Soit* Γ *un filtre de* $B_X(T)$. *On suppose* T *égalitaire. et* X *fini il y a équivalence entre :*

1 - Γ *est principal.*

2 - $\tilde{\Gamma}$ *est principal.*

$1 \Rightarrow 2$: Soit $Y \subset X$ telle que tout $x \in X - Y$ soit non principal.

Pour chaque $F \in \Gamma^*$, appelons F_Y la formule obtenue en remplaçant dans F toute variable appartenant à X-Y par $\bar{x}$. Montrons que si $\bar{F}$ engendre Γ, $\bar{F}_Y$ engendre sa trace Γ_Y sur $B_Y(T)$.

Soit n le nombre de variables de F qui ne sont pas dans Y. Si $n = o$, c'est évident.

Supposons le vrai pour n, et montrons le pour $n + 1$.

Soit X une variable de F qui n'est pas dans Y, et posons $Y' = Y \cup \{x\}$.

On sait que $\bar{F}_{Y'}$ engendre $\Gamma_{Y'}$. Posons $F' = (\bar{x}|x)F_{Y'} = F_Y$

Soit G un élément de Γ^*_Y. Soit E(x,t) la conjonction des formules associées aux prédicats de G.

$$\overline{E(x,\bar{x})}.\bar{F}' \leqslant \bar{F}_{Y'}$$

or $\bar{F}_{Y'} \leqslant \bar{G}$, puisque $G \in \Gamma^*_{Y'}$

Donc $\overline{E(x,x)}.\bar{F}' \leqslant \bar{G}$

Mais x n'a pas d'occurence dans F', ni dans G.

Donc $\overline{\exists x\ E(x,x)}.\bar{F}' \leqslant \bar{G}$

or $\overline{\exists\, x\ E(x,x)} = 1$, d'où $\bar{F}' \leqslant \bar{G}$

En particulier, le résultat s'applique avec pour Y l'ensemble des variables principales. Cette partie n'implique pas T égalitaire.

$2 \Rightarrow 1$: Supposons $\tilde{\Gamma}$ principal.

Si T est égalitaire, chacun des filtres engendrés par $\&(x_i,x_j)$ est principal (et engendré par $x_i \equiv x_j$). On applique alors le lemme III-7.

3) - Condition pour qu'un filtre soit omis [7] :

Soit $\mathcal{G}$ un modèle de T. On dit que $\mathcal{G}$ *omet* un filtre Γ de $B_X(T)$ si Γ n'est pas réalisé dans $\mathcal{G}$.

Proposition III-4 : *Soit* T *une théorie. Soit X un ensemble fini de variables. On donne un filtre Γ de* $B_X(T)$ *tel que tout ultrafiltre contenant* Γ *soit irréductible. Il y a équivalence entre :*

1 - Il existe un modèle dénombrable de T *qui omet* Γ
2 - Il existe un modèle de T *qui omet* Γ
3 - $\bigwedge \Gamma = o$ *dans* $B_X(T)$.
4 - $\bigwedge \Gamma = o$ *dans* $B(T)$.

$1 \Rightarrow 2$: évident.

$2 \Rightarrow 3$: Sinon, il existerait F, ayant ses variables dans X, avec $\bar{F} > o$ et $\bar{F}$ minore Γ. Puisque T est complète, T mène à la clôture existentielle de F. Donc tout modèle de T réalise F, et par suite Γ.

$3 \Rightarrow 4$: par le principe de particularisation, on se ramène au cas précédent.

$4 \Rightarrow 1$: posons $I = \neg\Gamma = \{ \neg\bar{F} \mid \bar{F} \in \Gamma \}$ On a $\bigvee I = 1$.

Si σ est un automorphisme de B(T), on a aussi $\bigvee \sigma(I) = 1$.

A chaque famille X' de variables de même cardinal que X, associons une permutation $\sigma_{XX'}$ des variables qui applique X sur X'. Elle détermine un automorphisme $\tilde{\sigma}_{XX'}$ de B(T). La famille des $\tilde{\sigma}_{XX'}$ est dénombrable. On sait qu'il existe un ultrafiltre de B(T) respectant tous les sups de la forme $\bigvee \sigma_{XX'}(I)$, ainsi que tous les sups associés au quantificateur $\exists$. On obtient ainsi un "modèle canonique" $\mathcal{G}$ de T, sur le domaine formé par les individus et les variables [4]. $\mathcal{G}$ ne réalise pas Γ :

Soit φ une application de X dans $|\mathcal{G}|$:

- Si φ est injective, et applique X dans l'ensemble des variables, il existe un $\sigma_{XX'}$ qui prolonge φ. Par construction, Γ n'est pas réalisé par φ.

- S'il existe un individu atteint par φ en $x_i \in X$, et si φ réalise Γ, l'ensemble des F ayant leurs variables dans X réalisées par Γ est un ultrafiltre de $B_X(T)$, contenant Γ et $\&(x_i,a)$. Il n'est pas irréductible, ce qui est impossible.

- Si φ n'atteint que des variables, mais n'est pas injectif, on voit de même qu'il existe un ultrafiltre non irruductible contenant Γ.

Corollaire : *Soit* T *une théorie égalitaire. Soient* x *une variable et* Γ *un filtre de* $B_{\{x\}}(T)$. *Il y a équivalence entre :*

1 - Il existe un modèle qui omet Γ
2 - $\Lambda\Gamma = o$ *dans* B(T)

$1 \Rightarrow 2$: comme précédemment.

$2 \Rightarrow 1$: Il suffit d'établir que tout ultrafiltre de $B_{\{x\}}(T)$ qui contient Γ est irréductible. Soit Γ' un tel ultrafiltre. Supposons le réductible. La seule possibilité est l'existence d'un individu a tel que $x \equiv a \in \Gamma'^*$. Or dans ce cas $x \equiv a$ engendre un ultrafiltre et Γ' est engendré par $x \equiv a$. C'est-à-dire $\overline{x \equiv a}$ minore Γ. On n'a donc pas $\Lambda\Gamma = o$.

On retrouve un résultat classique (cf. [7])

Application (théorème de Ryll-Nardzewski [5]) :

Pour tout n, posons $B_n(T) = B_{\{x_0, ..., x_{n-1}\}}(T)$

Proposition III-5 : *Soit* T *une théorie complète, dénombrable sans modèle fini. Il y a équivalence entre :*
1 - Pour tout $n \geqslant 1$, *pour tout ultrafiltre* Γ *de* $B_n(T)$, $\tilde{\Gamma}$ *est principal*
2 - Pour tout $n \geqslant 1$, *tout ultrafiltre irréductible de* $B_n(T)$ *est principal.*
3 - T *est* $\aleph_0$*-catégorique.*

$1 \Rightarrow 2$: trivialement.

$2 \Rightarrow 3$: On reprend la démonstration standard fondée sur une méthode cantorienne. Il suffit de remarquer que les ultrafiltres concidérés dans la preuve sont nécessairement irréductibles.

$3 \Rightarrow 1$: Supposons qu'il existe $n \geqslant 1$, et Γ ultrafiltre de $B_n(T)$ tel que $\tilde{\Gamma}$ soit non principal. D'après la proposition III-4, il existe un modèle dénombrable qui omet $\tilde{\Gamma}$, et T n'ayant pas de modèle fini, il existe un modèle dénombrable séparé qui omet $\tilde{\Gamma}$. Comme il existe aussi un modèle dénombrable séparé qui réalise Γ, T n'est pas $\aleph_0$-catégorique.

Si T est égalitaire, pour tout ultrafiltre Γ de $B_n(T)$, Γ est principal si et seulement si $\tilde{\Gamma}$ est principal. On retrouve alors la forme usuelle du théorème de Ryll-Nardzewski [5].

Exemples :

- Reprenons l'exemple 6 du I-5). (Σ^*) est une théorie complète $\aleph_0$-catégorique, $B_1(T)$ n'est pas fini, et contient un ultrafiltre non principal engendré par les formules $\neg r_i x$. Cet ultrafiltre est réductible, car dans tout modèle il est réalisé par a.

Ainsi s'explique l'anomalie que nous signalons.

- Dans l'énoncé de la proposition III-5, nous avons éliminé les théories ayant des modèles finis. En fait, une théorie complète ayant un modèle fini a tous ses modèles séparés finis, et ceux-ci sont compacts, donc isomorphes. La théorie est catégorique. En fait, ce cas n'est pas distinct du cas égalitaire, car une structure finie est toujours une structure égalitaire déguisée.

Un ultrafiltre Γ de $B_n(T)$ est dit *univalent* si dans tout modèle séparé de T, il existe un seul point $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ qui réalise Γ.

Lemme III-9 : *Tout ultrafiltre réductible de* $B_1(T)$ *est univalent.*

Soit Γ un ultrafiltre réductible de $B_1(T)$.

Il existe un individu a tel que $\mathcal{E}(x_0, a) \subset \Gamma$. Soit $\mathfrak{S}$ un modèle de T et b un élément qui réalise Γ. Pour tout $E(x_0, a) \in \mathcal{E}(x_0, a)$, $\mathfrak{S} \models E(b, a)$. Si $\mathfrak{S}$ est séparé, on a donc $\bar{a} = b$.

Lemme II-10 : *Si T est complete, et si tout ultrafiltre de $B_1(T)$ est univalent, tout ultrafiltre irréductible de $B_n(T)$ est principal.*

Soit Γ un ultrafiltre irréductible de $B_n(T)$, $n > 1$.

Posons $\Gamma_0 = \Gamma \cap B_1(T)$: Γ_0 est un ultrafiltre irréductible de $B_1(T)$. Comme il est univalent, il ne peut être omis, donc il est principal. Soit $F_0(x_0)$ une formule telle que $\overline{F_0}$ engendre Γ_0. Utilisant les automorphismes de B(T) associés aux permutations de variable on montre de même que pour chaque $i < n$, il existe $F_i(x_i)$ qui engendre $\Gamma_i = \Gamma \cap B_{\{x_i\}}(T)$, Γ_i étant également univalent

Posons $F(x_0, \ldots, x_{n-1}) = F_0(x_0) \wedge F_1(x_1) \wedge \ldots \wedge F_{n-1}(x_{n-1})$

Soit $G(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \Gamma^*$

Pour tout modèle $\mathfrak{G}$ de T qui réalise Γ, on a :

$$\mathfrak{G} \models F(x_0, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow G(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

T étant complète, $T \vdash F(x_0, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow G(x_0, \ldots, x_{n-1})$

Ainsi Γ est engendré par $\overline{F(x_0, \ldots, x_{n-1})}$

En fait, une théorie dans laquelle tout ultrafiltre de $B_1(T)$ est univalent ses modèles localement finis, puisque le cardinal d'un modèle séparé est exactement celui de l'ensemble des ultrafiltres de $B_1(T)$ On montre aisément que tous les modèles de T sont isomorphes, donc compacts: D'où la catégoricité de T, quel que soit le cardinal du langage: Le critère de la proposition III-5 est alors sans intérêt, bien qu'il puisse être invoqué dans le cas dénombrable Il serait intéressant de trouver des hypothèses moins restrictives sous lesquelles la limitation de cardinalité puisse être levée.

Références : nous n'avons fait figurer que les ouvrages ou articles cités.

[1] E.W. BETH — On Padoa's method in the theory of definitions indig. math. vol. 15 (1953).

[2] HAILPERIN T — Remarks on identity and description in first-order systems J.S.L. vol. 19 (1954).

[3] PABION J.F. Extensions de méthodes sémantiques pour l'étude de la saturation des théories du 1-er ordre. thèse spécialité - Lyon (1968).

[4] H. RASIOWA & R. SIKORSKI The mathematics of metamathematics. Panst. Wyd. naut. Varszawa (1963).

[5] C. RYLL-NARDZEWSKI On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$ Bull. Acad. Polon. Sci. Math. astron. phys. vol. 7 (1959).

[6] VAUGHT R. Applications of the Löweinheim-Skolem-Tarski theoremto problems of completeness and decidabilty. Ind. math. vol. 16 (1954).

[7] VAUGHT R. Models of complete theories. Bull. Amer. math. sc. vol. 69 (1963).

Manuscrit remis en avril 1970.

J.F. PABION
Maître-assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, bd du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE