PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CLAUDE LECLERC

Catégorie des A-modules non-singuliers

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 3
, p. 1-82
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_3_1_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1969 t.6-3

CATEGORIE DES A-MODULES NON-SINGULIERS

Claude LECLERC

INTRODUCTION

Cette thèse eut pour point de départ une question formulée en Séminaire par G. Maury sur la possibilité de "fonctoriser" l'enveloppe injective. Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est de prendre comme catégorie de départ la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de Mod_A dont les objets sont les A-modules non-singuliers, ce qui nous amène de façon naturelle à nous intéresser à sa structure.

La notion de "suite pseudo-exacte", introduite au Séminaire par G. MAURY, se révèle alors particulièrement bien adaptée à cette étude : par exemple un émimorphisme (resp. monomorphisme) $M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$ est caractérisé par le fait que la suite $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$) est pseudo-exacte. On montre ensuite que le quotient M/N d'un module non-singulier M par l'un de ses sous-modules est non-singulier si et seulement si N n'a pas d'extension essentielle propre dans M, ce qui permet de caractériser les objets-quotients de M et de montrer que $\mathcal{C}$ est une catégorie colocalement petite (elle est aussi localement petite). Le chapitre I est consacré à ces questions ainsi qu'à l'établissement d'un certain nombre de lemmes techniques nécessaires à leur résolution. Par ailleurs, on caractérise les sous-objets normaux, les objets-quotients conormaux, et on montre que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie complète de Mod_A.

Au chapitre II, on montre que C est un mono-sous-catégorie au sens défini par Mitchell [2] , dont la sous-catégorie L des objets purs est constituée par les modules injectifs non-singuliers, ce qui entraine que, contrairement au cas général, L est une sous-catégorie abélienne de Mod_A. On remarque alors que le foncteur enveloppe injective défini sur C au chapitre I n'est autre que le foncteur co-adjoint au foncteur inclusion de L dans C. De plus, on montre que le foncteur co-réflexion de Mod_A dans C fait correspondre à tout A-module M son quotient par la plus grande extension essentielle dans M du sous-module singulier M^{Δ} de M ; cette caractérisation permet alors d'établir que les objets de torsion de C au sens de Mitchell [2] ne sont autres que les sous-modules de torsion définis par Harada [6] . Enfin on montre que les objets injectifs de C sont les objets purs et qu'ils peuvent être caractérisés dans C par des propriétés semblables à celles bien connues pour les injectifs de Mod_A.

Au chapitre III on commence par établir que, pour étudier la catégorie C, on peut supposer que l'anneau A est lui-même non-singulier, ce que Ravel avait déjà remarqué pour certaines propriétés [5] . De façon précise on démontre que la catégorie C des A-modules non-singuliers est canoniquement isomorphe à la catégorie des B-modules non-singuliers où B est l'anneau non-singulier obtenu par co-réflexion de A dans C. Ceci nous permet alors d'établir que C est une catégorie abélienne si et seulement si B est un anneau semi-simple. De même, si B est un anneau noethérien, alors la sous-catégorie L des objets purs est une sous-catégorie co-complète de Mod_A (on sait déjà que c'est une sous-catégorie complète).

Enfin, A étant désormais supposé non-singulier en vertu de ce qui précède, on caractérise les objets projectifs de C comme étant les A-modules semi-simples et projectifs, ou, ce qui est équivalent, les sommes directes d'idéaux à gauche simples et facteurs directs de l'anneau A. Il en résulte immédiatement que la catégorie des A-modules sans-torsion sur un domaine d'intégrité qui n'est pas un corps ne possède pas d'objet projectif non nul. On montre ensuite que les objets de $\mathcal{C}$ qui sont quotients dans $\mathcal{C}$ d'un objet projectif de $\mathcal{C}$ sont ceux dont le socle est essentiel et projectif. Enfin une condition nécessaire et suffisante, portant sur l'anneau de base A, pour que la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'objets projectifs conduit à la caractérisation d'un certain type d'anneaux dont l'étude semble pouvoir donner lieu à des développements ultérieurs.

Le chapitre IV est consacré à une étude élémentaire de l'homologie dans $\mathcal{C}$. On obtient entre autres un pseudo-lemme des cinq, ainsi qu'un pseudo-lemme du serpent. Des contre-exemples illustrent le fait que, dans la plupart des cas, il est nécessaire d'imposer aux suites considérées d'être exactes à certains endroits (et non pas seulement pseudo-exactes). Enfin on montre que les résolutions injectives dans $\mathcal{C}$(resp. projectives lorsqu'elles existent) d'un objet M de $\mathcal{C}$ possèdent le même type d'homotopie que la résolution $0 \longrightarrow M \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$ (resp. $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0$) où $\hat{M}$ et S désignent respectivement une enveloppe injective et le socle de M.

Signalons pour terminer que, Σ désignant une famille de Sanderson (autrement dit une famille topologisante et idempotente [12]) d'idéaux de l'anneau A, les résultats des chapitres I et II peuvent s'appliquer intégralement, avec des modifications évidentes, à l'étude de la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_\Sigma$ de Mod_A dont les objets sont les A-modules Σ-non-singuliers, c'est-à-dire tels que $j_\Sigma(M) = 0$ [16] , et que notre étude a été généralisée par M. Hacque aux mono-sous-catégories d'une catégorie de modules [15] .

CHAPITRE I : FONCTORISATION DE L'ENVELOPPE INJECTIVE. PROPRIETES ELEMENTAIRES DE LA CATEGORIE DES MODULES NON-SINGULIERS.

Dans toute la suite nous étudierons une certaine sous-catégorie $\mathcal{C}$ de la catégorie Mod_A des modules à gauche unitaires sur un anneau unitaire A non nécessairement commutatif.

Toutes les notions : module, idéal, etc... seront entendues "à gauche" sauf mention explicite du contraire.

La notation $N \leqslant M$ exprimera le fait que N est un sous-module de M.

La notation $N \simeq N'$ signifiera que les modules N et N' sont isomorphes.

Si X est une partie d'un module M telle que $0 \in X$, alors on désignera par X^* l'ensemble privé de son zéro.

Enfin, l'ouvrage de référence pour toutes les notions sur les modules et l'homologie sera le livre "Homological Algebra" de H. Cartan et S. Eilenberg [1] et les définitions "catégoriques" seront celles du livre "Theory of categories" de B. Mitchell [2] .

I. DEFINITIONS ET RAPPELS

Définition 1.1 : Soit N *un sous-module de* M.

On dit que N *est essentiel dans* M, *ou que* M *est extension essentielle de* N, *ce que l'on note* $N \triangleleft M$, *si les deux propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

1°) $(\forall x \in M^*)\ (\exists a \in A)\ (ax \in N^*)$

2°) $(N' \leqslant M \text{ et } N' \cap N = 0) \Longrightarrow (N' = 0)$

On trouvera en [3] les démonstrations des principales propriétés de la relation d'essentialité qui sont :

(E_1) Transitivité : $(N \triangleleft M \text{ et } M \triangleleft P) \Longrightarrow (N \triangleleft P)$.

(E_2) Convexité : $(N \leqslant M \leqslant P \text{ et } N \triangleleft P) \Longrightarrow (N \triangleleft M \text{ et } M \triangleleft P)$.

(E_3) Pour tout sous-module N de M, il existe un sous-module N' de M maximal parmi les sous-modules de M dont l'intersection avec N est réduite à 0. On dit alors que N' est un complément relatif de N dans M, et on a : $N \oplus N' \triangleleft M$.

(E_4) Tout sous-module N de M possède au moins une extension essentielle maximale dans M.

Enfin, on vérifie immédiatement que la relation d'essentialité est une relation d'ordre dans le treillis $\mathcal{T}(M)$ des sous-modules de M.

Définition 1.2 : Un sous-module N *de* M *est dit fermé dans* M *si :*

$$(N \triangleleft N' \leqslant M) \Longrightarrow (N' = N).$$

Soit N un sous-module de M. Alors pour tout $x \in M$ l'ensemble $N : x = \{a \in A \ ; \ a\,x \in N\}$ est un idéal de A (c'est l'annulateur de la classe de x dans le module quotient M/N).

On vérifie alors facilement que l'ensemble

$$M^{\Delta} = \{x \in M \ ; \ o : x \triangleleft A\}$$

est un sous-module de M que l'on appelle le "sous-module singulier" de M.

Définition 1.3 : Un module M *est dit "non-singulier" si* $M^{\Delta} = 0$.

Enfin, nous tirons de [2] (1.3.6) les deux définitions suivantes :

Définition 1.4 : On dit qu'une catégorie C *est une "sous-catégorie" d'une catégorie* A *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) La classe des objets de C *est contenue dans la classe des objets de* A.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C') \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,C')$ *pour tout couple* (C,C') *d'objets de* $\mathcal{C}$.

(iii) La composition des morphismes dans $\mathcal{C}$ *est le même que dans* $\mathcal{A}$.

(iv) 1_C *est le même dans* $\mathcal{C}$ *et dans* $\mathcal{A}$ *pour tout objet* C *de* $\mathcal{C}$.

Définition 1.5 :

Si de plus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,C')$ *pour tout couple* (C,C') *d'objets de* $\mathcal{C}$, *alors on dit que* $\mathcal{C}$ *est une "sous-catégorie pleine" de* $\mathcal{A}$.

Dans toute la suite nous désignerons par $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de Mod_A dont les objets sont les A-modules non-singuliers et dont les morphismes sont les homomorphismes de A-modules ($\mathcal{C}$ est donc additive).

Exemple : $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_A$ si et seulement si A est un anneau semi-simple.

(Nous en verrons la démonstration plus tard).

II. FONCTORISATION DE L'ENVELOPPE INJECTIVE

Soient M et M' deux modules, $\hat{M}$ et $\hat{M}'$ deux enveloppes injectives de ces modules.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \hat{M} \arrow[d, "h"'] \\ & M' \arrow[r, "i'"] & \hat{M}' \end{tikzcd}$$

Comme $\hat{M}'$ est injectif, pour tout homomorphisme $f : M \longrightarrow M'$, il existe un homomorphisme $h : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}'$ prolongeant f.

Mais en général cet homomorphisme h n'est pas unique, ce qui nous interdit de définir un "foncteur enveloppe injective". Or une condition suffisante de fonctorisation de l'enveloppe injective est de nous restreindre à la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ des modules non-singuliers. Ceci résulte en effet de la proposition suivante :

Proposition 2.1.: Si M' *est un module non-singulier, alors l'homomorphisme* h *du diagramme précédent est unique.*

<u>Démonstration</u> : Supposons $f = 0$ et montrons que cela entraîne $h = 0$ (on garde les notations précédentes). Comme $0 = M'^{\Delta} = M' \cap \hat{M}'^{\Delta}$, M' essentiel dans $\hat{M}'$ entraîne $\hat{M}'^{\Delta} = 0$. Soit $x \in \hat{M}$. On va montrer que $h(x) \in \widehat{M'}^{\Delta}$, c'est-à-dire que $0 : h(x) \Delta A$, ce qui achèvera la démonstration. Soit donc $a \in A^{*}$. Si $ah(x) = 0$ c'est terminé. Sinon on a $ax \in \hat{M}^{*}$, et comme $M \Delta \hat{M}$ il existe $b \in A$ tel que $bax \in M^{*}$. Mais alors on a à la fois $ba \neq 0$ et $bah(x) = h(bax) = f(bax) = 0$, ce qui montre que $ba \in (0:h(x))^{*}$ et établit le résultat.

<u>*Corollaire 2.2.*</u> : *On peut définir un foncteur covariant, noté* $\hat{\ }$, *de* C *dans* C *de la façon suivante :*

– A tout objet M *de* C *on fait correspondre l'une de ses enveloppes injectives* $\hat{M}$ *(elles sont toutes isomorphes et on vient de voir qu'elles sont dans* C*).*

– A tout homomorphisme $f : M \to M'$ *entre deux objets de* C *on fait correspondre l'homomorphisme de* $\hat{M}$ *dans* $\hat{M}'$, *noté* $\hat{f}$, *dont on vient d'établir l'existence et l'unicité.*

<u>Démonstration</u> : les axiomes des foncteurs covariants résultent trivialement de l'unicité du morphisme précédent; Ainsi pour montrer par exemple que $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ il nous suffit de vérifier qu'ils coïncident sur M, ce qui est immédiat puisque

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i'"'] & M'' \arrow[d, "i''"'] \\ M \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{M}' \arrow[r, "\hat{g}"] & \hat{M}'' \end{tikzcd}$$

$\widehat{g \circ f} \circ i = i'' \circ (g \circ f)$ et que $(\hat{g} \circ \hat{f}) \circ i = \hat{g} \circ (\hat{f} \circ i) = \hat{g} \circ (i' \circ f) = (\hat{g} \circ i') \circ f = (i'' \circ g) \circ f$.

<u>*Corollaire 2.3.*</u> : *Le foncteur* $\hat{\ }$ *de* C *dans* C *ainsi défini est un plongement additif. Si de plus l'anneau* A *est commutatif, alors* $\widehat{af} = a\hat{f}$ *pour tout* $a \in A$ *et tout homomorphisme* $f : M \longrightarrow M'$ *entre objets de* C.

Démonstration : le fait que $\widehat{f+h} = \hat{f} + \hat{h}$ (et que $\widehat{af} = a\hat{f}$ lorsque A est commutatif) résulte de ce que $\widehat{f+h} . i = i'. (f + h) = i'.f + i'.h = \hat{f}.i + \hat{h}.i = (\hat{f} + \hat{h}).i$, et que $\widehat{af}.i = i'.(af) = a(i'.f) = a(\hat{f}.i) = (a\hat{f}).i$.

Enfin si $\hat{f} = 0$, on a $i'.f = \hat{f}.i = 0.i = 0$, d'où $f = 0$.

Tout cela nous amène de façon naturelle à nous intéresser à la structure de la catégorie $\mathcal{C}$ des modules non-singuliers : quels sont les monomorphismes, les épimorphismes ? A-t-elle des noyaux, des conoyaux, des sommes fibrées ? Quels sont les objets injectifs, projectifs ? Est-elle abélienne ? exacte ? etc...

C'est dont à la résolution de toutes ces questions que sera consacré le reste de ce travail.

III. PRELIMINAIRES

G. Maury a introduit, en séminaire, les notions de "suite pseudo-exacte" et de "foncteur pseudo-exact" qui se révèleront particulièrement appropriées à l'étude de la catégorie $\mathcal{C}$. Nous ne les énoncerons ici que dans le cas particulier des modules.

Définition 3.1 : Une suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *de modul est dite "pseudo-exacte en M" ou plus brièvement pseudo-exacte si* $\operatorname{Im} f \triangleleft \operatorname{Ker} g$ *(on a donc en particulier* $g \circ f = 0$*).*

Définition 3.2 : Un homomorphisme $f : M \to M''$ *de modules est dit un "pseudo-épimorphisme" si la suite* $M \xrightarrow{f} M'' \to 0$ *est pseudo-exacte, c'est-à-dire si* $\operatorname{Im} f \triangleleft M''$.

Remarque : La suite $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ de modules est pseudo-exacte si et seulement si f est un monomorphisme. (Cela résulte de ce que $0 \triangleleft N$ équivaut à $N = 0$).

Définition 3.3 : Un foncteur de modules est dit "pseudo-exact" s'il transforme toute suite pseudo-exacte en une suite pseudo-exacte.

Lemme 3.4 : Soit N un sous-module d'un module M. Alors :

(i) $\{N \Delta M\} \Longrightarrow (\forall x \in M)\ (N : x \Delta A)\} \Longleftrightarrow \{(M/N)^{\Delta} = M/N\}$

(ii) Si de plus $M^{\Delta} = 0$*, alors les trois assertions sont équivalentes.*

Démonstration :

(i) Soit $a \in A^*$. Si $ax \notin N$, comme $N \Delta M$ il existe $b \in A$ tel que $bax \in N^*$, et dont tel que $ba \in (N:x)^*$. Enfin l'équivalence entre les membres du milieu et de droite résulte de ce que, si l'on désigne par $\dot{x}$ la classe de x modulo N, la relation $0 : \dot{x} \Delta A$ équivaut à $N : x \Delta A$.

(ii) Supposons $M^{\Delta} = 0$. Si N n'était pas essentiel dans M, il existerait $x \in M^*$ tel que pour tout $a \in A$ on ait $ax \notin N$ ou $ax = 0$, ce qui montre que $N : x = 0 : x$. Comme $N : x \Delta A$ par hypothèse, on aurait ainsi $x \in M$, contredisant $M^{\Delta} = 0$.

Lemme 3.5 : Soient M, N, P trois modules tels que $N \Delta P$ *et* $M^{\Delta} = 0$*. Alors pour tout* $y \in M$ *et tout* $x \in P$ *il existe* $a \in A$ *tel que* $ax \in N$ *et* $ay \neq 0$.

Démonstration : D'après le lemme 3.4 (i) on a $N : x \Delta A$, et s'il n'existait pas un tel a alors on aurait $N : x \leq 0 : y < A$, ce qui entraînerait $0 : y \Delta A$ (Propriété E_2) c'est-à-dire $y \in M^{\Delta}$, contredisant ainsi $M^{\Delta} = 0$.

Théorème 3.6 : Si M est un module tel que $M^{\Delta} = 0$*, la relation d'essentialité est compatible avec l'union dans le treillis des sous-modules de M. Tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle dans M, à savoir le sous-module :*

$$\vec{N} = \{x \in M\ ;\ N : x \Delta A\}\ ,$$

et le treillis des sous-modules de M fermés dans M est un treillis complet , modulaire et complémenté.

Ce théorème a été démontré par Johnson, [4] , dans le cas particulier où l'anneau A est tel que $A^{\Delta} = 0$. Cette restriction fut ensuite levée par J. Ravel, [5] (p. 42).

<u>Remarque</u> : La relation d'essentialité est toujours compatible avec l'intersection finie dans le treillis des sous-modules de M. (immédiat).

Enfin, à titre de première application, nous énoncerons la :

<u>*Proposition 3.7*</u> : *Le foncteur* $\hat{}$ *défini au paragraphe précédent est pseudo-exact, et l'on a* $\mathrm{Ker}\, f \lhd \mathrm{Ker}\, \hat{f}$ *et* $\mathrm{Im}\, f \lhd \mathrm{Im} \hat{f}$.

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i'"] & M'' \arrow[d, "i''"] \\ \hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{M'} \arrow[r, "\hat{g}"] & \widehat{M''} \end{tikzcd}$$

Comme $\hat{f}$ prolonge f on a déjà $\mathrm{Ker}\, f \leqslant \mathrm{Ker}\, \hat{f}$ et $\mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{Im}\, \hat{f}$. Soit $x \in (\mathrm{Ker}\, \hat{f})^{*}$. Comme $M \lhd \hat{M}$ il existe $a \in A$ tel que $ax \in M^{*}$. Mais alors $f(ax) = \hat{f}(ax) = a\hat{f}(x) = 0$, ce qui montre que $ax \in (\mathrm{Ker}\, f)^{*}$ et établit $\mathrm{Ker}\, f \lhd \mathrm{Ker}\, \hat{f}$.

Supposons enfin la suite $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ pseudo-exacte, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, f \lhd \mathrm{Ker}\, g$. D'après ce qui précède on a $\mathrm{Ker}\, g \lhd \mathrm{Ker}\, \hat{g}$, et par suite $i\,\mathrm{Im}\, f \lhd \mathrm{Ker}\, \hat{g}$ (propriété E_1). Comme $\hat{g} \circ \hat{f} = \widehat{g \circ f} = \hat{0} = 0$, on a de plus $\mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{Im}\, \hat{f} \leqslant \mathrm{Ker}\, \hat{g}$ et de $\mathrm{Im}\, f \lhd \mathrm{Ker}\, \hat{g}$, la propriété E_2 nous permet de déduire $\mathrm{Im}\, f \lhd \mathrm{Im}\, \hat{f}$ et $\mathrm{Im}\, \hat{f}$ Ker g, ce qui achève la démonstration.

IV. <u>APPLICATIONS</u>

A partir d'ici, et jusqu'à la fin du Chapitre I, nous ne considérerons plus que des objets de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire des modules M tels que $M^{\Delta} = 0$.

Il est alors immédiat que pour tout sous-module N de M on a aussi $N^{\Delta} = 0$, ce qui nous amène à nous demander s'il en va de même pour le quotient de M par N. La réponse, négative en général, est donnée par la :

Proposition 4.1 :

Pour que $(M/N)^{\Delta} = 0$ *il faut et il suffit que* N *soit fermé dans* M.

Démonstration :

Nécessité : en vertu du lemme 3-4, $N \Delta N'$ entraîne $N'/N = (N'/N)^{\Delta} \leq (M/N)^{\Delta} = 0$, d'où $N' = N$, ce qui montre que N est fermé dans M.

Suffisance : Contraposons : si $(M/N)^{\Delta} \neq 0$, il existe un sous-module N' de M contenant strictement N et tel que $N'/N = (M/N)^{\Delta}$. On a donc ainsi $(N'/N)^{\Delta} = N'/N$, ce qui équivaut à $N \Delta N'$ (lemme 3-4) et montre que N' est une extension essentielle propre de N dans M.

Etudions maintenant les propriétés élémentaires de la catégorie C. Ker f et Imf ayant leur signification habituelle dans Mod_A, nous avons la :

Proposition 4.2 : Soit $f : M \to M'$ *un morphisme de* C.

(i) f *est un monomorphisme dans* C *si et seulement si* Ker f = 0

(ii) f *est un épimorphisme dans* C *si et seulement si* $\mathrm{Im}\, f \Delta M'$.

Démonstration :

(i) Si Ker f = 0 et si u et v sont deux morphismes de N dans M tels que $f.u = f.v$, alors pour tout $x \in N$ on a $(u(x) - v(x)) \in \mathrm{Ker}\, f = 0$, ce qui montre que $u = v$. Réciproquement, soient i et o l'injection canonique et l'application nulle de Ker f dans M. Comme Ker f est un objet de C, i et o sont deux morphismes de C tels que $f.i = f.o = 0$. Donc si f est un monomorphisme dans C on a $i = o$, ce qui montre que Ker f = 0.

(ii) D'après le théorème 3-6, $\overline{\mathrm{Im}\, f}$ est un objet de C, et comme $\mathrm{Im}\, f \leq \overline{\mathrm{Im}\, f}$ l'application canonique $M' \xrightarrow{\phi} M'/\overline{\mathrm{Im}\, f}$ est un morphisme de C (proposition 4-1) tel que $\phi.f = 0 = 0.f$. Donc si f est un épimorphisme on a $\phi = 0$, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{Im}\, f} = M'$ ce qui montre que $\mathrm{Im}\, f \Delta M'$.

Réciproquement supposons $\text{Im } f \vartriangleleft M'$ et soit $v : M' \longrightarrow M''$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $v \circ f = 0$. Pour tout $y \in M'$ on a $\text{Im } f : y \vartriangle A$ (lemme 3-4). Or comme $v \circ f = 0$, on a aussi $\text{Im } f : y \leqslant 0 : v(y) \leqslant A$, ce qui entraîne $0 : v(y) \vartriangle A$, c'est-à-dire $v(y) \in (M'')^{\vartriangle} = 0$, et montre que $v = 0$.

<u>*Corollaire 4-3*</u> *: Soit $f : M \longrightarrow M'$ un morphisme de $\mathcal{C}$.*

(i) f est un monomorphisme dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la suite $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ est pseudo-exacte.

(ii) f est un épimorphisme dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la suite $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ est pseudo-exacte.

<u>Remarque</u> :

1) A partir de maintenant nous réservons le terme "épimorphisme" aux morphismes qui sont des <u>épimorphismes dans Mod_A</u>' et nous appellerons, conformément à la définition 3-2, "pseudo-épimorphisme" les <u>épimorphismes dans $\mathcal{C}$</u>.

2) Un morphisme $f : M \longrightarrow M'$ de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme si et seulement si $\text{Ker } f = 0$ et $\text{Im } f = M'$. (En effet, l'existence d'un morphisme $g : M' \longrightarrow M$ tel que $f \circ g = 1_{M'}$, entraîne $\text{Im } f = M'$).

Une question se pose alors immédiatement : la catégorie $\mathcal{C}$ est-elle balancée ? C'est-à-dire : tout morphisme de $\mathcal{C}$ qui est à la fois un monomorphisme et un pseudo-épimorphisme est-il un isomorphisme ? La réponse est non en général comme le montre l'exemple suivant :

<u>Exemple</u> : Prenons pour A l'anneau Z des entiers rationnels. Comme Z est intègre, on a $Z^{\vartriangle} = 0$, c'est-à-dire $Z \in \mathcal{C}$. De même l'ensemble Q des nombres rationnels est un objet de $\mathcal{C}$, et il est immédiat de vérifier que $Z \vartriangleleft Q$. Ainsi l'injection canonique : $i : Z \longrightarrow Q$ est à la fois un monomorphisme et un pseudo-épimorphisme, et n'est cependant pas un isomorphisme.

Nous verrons au Chapitre III que C est balancée si et seulement si C est isomorphe à Mod_B où B est un anneau quotient de A bien déterminé et semi-simple.

-Il est immédiat que les sous-objets d'un objet M de C sont les A-modules isomorphes à un sous-module quelconque de M.

-Par contre, pour déterminer les objets-quotients de M, nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>*Lemme 4-4*</u> :

Soit $f : M \to M'$ *un homomorphisme de modules, et supposons de plus que* $M'^{\Delta} = 0$.

(i) $N \vartriangleleft P \leqslant M$ *entraîne* $f(N) \vartriangleleft f(P)$.

(ii) Si N' *est un sous-module de* M' *fermé dans* M', *alors* $f^{-1}(N')$ *est fermé dans* M.

<u>**Démonstration**</u> :

(i) D'après le lemme 3-4 (i), $N \vartriangleleft P$ entraîne $N : x \vartriangle A$ pour tout $x \in P$. Comme $N : x \leqslant f(N) : f(x) \leqslant A$, nous avons donc $f(N) : f(x) \vartriangle A$ (Propriété E_2), soit finalement $f(N) : y \vartriangleleft A$ pour tout $y \in f(P)$.

Comme $M'^{\Delta} = 0$ entraîne $f(P)^{\Delta} = 0$, nous avons donc bien $f(N) \vartriangleleft f(P)$, en vertu du (ii) du lemme 3-4.

(ii) Soit P une extension essentielle de $f^{-1}(N')$ dans M. D'après ce qui précède on a déjà $f(f^{-1}(N')) \vartriangleleft f(P)$, c'est-à-dire $N' \cap \mathrm{Im}\, f \vartriangleleft f(P)$. Mais ceci entraîne $N' \vartriangleleft N' + f(P)$. En effet, soit $y = n' + f(x) \in (N' + f(P))^*$ avec $x \in P$. Si $f(x) = 0$ c'est terminé ; sinon, comme $f^{-1}(N') \vartriangleleft P$, il existe en vertu du lemme 3-5 un élément $a \in A$ tel que $ax \in f^{-1}(N')$ et $ay \neq 0$, ce qui montre que $ay \in N'^*$ et établit le résultat. Comme N' est fermé dans M', on a donc $N' = N' + f(P)$ ce qui montre que $f(P) \leqslant N'$, et par suite que $P \leqslant f^{-1}(f(P)) \leqslant f^{-1}(N')$, achevant ainsi la démonstration.

Nous pouvons maintenant démontrer la :

Proposition 4-5 : *Les objets-quotients d'un objet* M *de* $\mathcal{C}$ *sont les extensions essentielles des* A*-modules* M/N *où* N *parcourt l'ensemble des sous-modules de* M *fermés dans* M.

Démonstration : Soit M' un objet-quotient de M de représentant $p : M \longrightarrow M'$. p étant un pseudo-épimorphisme, on a $\mathrm{Im}\, p \triangleleft M'$. Comme o est fermé dans M', il résulte du lemme 4-4 que $\mathrm{Ker}\, p = p^{-1}(o)$ est un sous-module de M fermé dans M. Nous allons montrer que M' est extension essentielle de $M/\mathrm{Ker}\, p$. En effet, soit $\phi : M/\mathrm{Ker}\, p \longrightarrow \mathrm{Im}\, p$ l'isomorphisme canonique, et $i : \mathrm{Im}\, p \longrightarrow M'$ l'injection canonique ; $i.\phi$ est bien un monomorphisme essentiel de $M/\mathrm{Ker}\, p$ dans M' puisque $\mathrm{Im}(I{\circ}\phi) = i(\phi(M/\mathrm{Ker}\, p)) = i(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{Im}\, p \triangleleft M'$. Réciproquement, si M' est extension essentielle de M/N où N est fermé dans M, soit $p : M \longrightarrow M/N$ l'épimorphisme canonique et $i : M/N \longrightarrow M'$ l'injection canonique. Comme N est fermé dans M, M/N est un objet de $\mathcal{C}$ (Proposition 4-1), et p est un morphisme de $\mathcal{C}$. Mais alors $i{\circ}p$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Im}(i.p) = i(p(M)) = i(M/N) = M/N \triangleleft M'$, c'est-à-dire un pseudo-épimorphisme, ce qui montre que M' est un objet-quotient de M.

Corollaire 4-6 : *La catégorie* $\mathcal{C}$ *des modules non-singulier est localement petite et colocalement petite.*

Démonstration : Seul le "colocalement petite" n'est pas évident. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-modules de M fermés dans M; D'après la démonstration précédente, nous pouvons prendre comme classe représentative des objets-quotients de M : $\bigcup_{N \in \mathcal{F}} \{M' \,;\, M/N \leqslant M' \leqslant \widehat{M/N}\}$ (où $\widehat{M/N}$ est une enveloppe injective de M/N), qui, étant réunion d'une famille d'ensembles indexée par un ensemble, est aussi un ensemble.

Proposition 4-7 : Tout morphisme $f : M \longrightarrow M'$ *de* $\mathcal{C}$ *admet pour noyau dans* $\mathcal{C}$ *:*

$$\mathrm{Ker}\ f = \{x \in M \ ;\ f(x) = o\}\ ,\ \textit{et pour conoyau dans } \mathcal{C} : M'/\overline{\mathrm{Im}\ f}.$$

Démonstration : Que Ker f soit noyau de f dans $\mathcal{C}$ au sens catégorique est immédiat. Montrons que l'épimorphisme canonique $p : M' \longrightarrow M'/\overline{\mathrm{Im}\ f}$ est conoyau de f dans $\mathcal{C}$. $\overline{\mathrm{Im}\ f}$ étant fermé dans M', $M'/\overline{\mathrm{Im}\ f}$ est un objet de $\mathcal{C}$ (Proposition 4-1), de sorte que p est un morphisme de $\mathcal{C}$. De plus on a $p \circ f = 0$ Puisque $\mathrm{Im}\ f \leqslant \overline{\mathrm{Im}\ f}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & M'/\overline{\mathrm{Im}\ f} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M'' & \end{tikzcd}$$

Soit maintenant $g : M' \longrightarrow M''$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = 0$. Il nous reste à montrer qu'il existe un morphisme unique $h : M'/\overline{\mathrm{Im}\ f} \longrightarrow M''$ tel que $h.p = g$.

Or, si $y \in \overline{\mathrm{Im}\ f}$ on a $\mathrm{Im}\ f : y \vartriangle A$ puisque $\mathrm{Im}\ f \vartriangle \overline{\mathrm{Im}\ f}$ (Lemme 3-4). D'autre part $g \circ f = 0$ entraîne $\mathrm{Im}\ f : y \leqslant 0 : g(y) \leqslant A$. (En effet, $ay = f(x)$ implique $ag(y) = g(ay) = g(f(x)) = o$). D'après la propriété E_2 ceci entraîne $0 : g(y) \vartriangle A$, c'est-à-dire $g(y) \in M''^{\Delta} = 0$. Ceci nous permet de définir une application $h : M'/\overline{\mathrm{Im}\ f} \longrightarrow M''$ par $h(p(y)) = g(y)$, et il est alors immédiat de vérifier que h est un homomorphisme et que $h \circ p = g$. Enfin l'unicité de h résulte de ce que p est un épimorphisme.

Définition 4-8 : Un sous-objet N *d'un objet* M *de* $\mathcal{C}$ *est dit "normal" s'il existe un morphisme* $f : M \longrightarrow M'$ *de* $\mathcal{C}$ *tel que* $N = \mathrm{Ker}\ f$. *Une catégorie est dite "normale" si tout monomorphisme de cette catégorie est normal.*

Dualement, nous avons la définition :

Définition 4-8 bis : Un objet-quotient P *d'un objet* M *de* $\mathcal{C}$ *est dit "conormal" s'il existe un morphisme* $f : M' \longrightarrow M$ *de* $\mathcal{C}$ *tel que* P *soit conoyau de* f *dans* $\mathcal{C}$.

Une catégorie est dite "conormale" si tout épimorphisme de cette catégorie est conormal.

Nous avons la :

<u>*Proposition 4-9*</u> *: Soit* M *un objet de* $\mathcal{C}$.

(i) Les sous-objets normaux de M *sont les sous-modules de* M *fermés dans* M.

(ii) Les objets-quotients conormaux de M *sont les quotients (dans* Mod_A*) de* M *par ses sous-objets normaux.*

(iii) Il existe une bijection entre l'ensemble des sous-objets normaux de M *et l'ensemble de ses objets-quotients conormaux, et cette bijection renverse l'ordre.*

<u>Démonstration</u> :

(i) Si N est fermé dans M, alors M/N est un objet de $\mathcal{C}$ (proposition 4-1) et N est noyau de l'épimorphisme canonique $M \longrightarrow M/N$ qui est dans $\mathcal{C}$. Réciproquement si un sous-objet N de M est noyau d'un morphisme $f : M \longrightarrow M'$ de $\mathcal{C}$, alors, o étant fermé dans M', $N = \operatorname{Ker} f = f^{-1}(o)$ est fermé dans M(lemme 4-4).

(ii) Si N est fermé dans M, on a $\overline{N} = N$, et $M/N = M/\overline{N}$ est conoyau dans $\mathcal{C}$ de l'injection canonique $i : N \longrightarrow M$ en vertu de la proposition 4-7.

Réciproquement, si P est conoyau dans $\mathcal{C}$ du morphisme $f : M' \longrightarrow M$, alors P est isomorphe à $M/\overline{\operatorname{Im} f}$ (Proposition 4-7) et $\overline{\operatorname{Im} f}$ est fermé dans M.

(iii) La bijection est définie par $N \longrightarrow M/N$ pour tout sous-module N de M fermé dans M, et on sait que cette bijection renverse l'ordre.

Nous voyons ainsi que $\mathcal{C}$ n'est, en général, ni normale, ni conormale, puisqu'il peut exister des sous-modules non fermés dans M (par exemple ceux dont M est extension essentielle).

Nous verrons au Chapitre III que $\mathcal{C}$ est normale (resp. conormale) si et seulement si $\mathcal{C}$ est balancée.

V. LIMITES DE DIAGRAMMES

Nous allons nous attacher maintenant à établir la proposition suivante qui sera d'une très grande importance pour la suite :

Proposition 5-1 : C *est une sous-catégorie "complète" de* Mod_A

Pour ce faire, nous avons besoin d'un certain nombre de définitions et de lemmes.

Définition 5-2 : On appelle "type de diagramme" un triplet $\Sigma = (I,M,d)$ *où* I *est un ensemble dont les éléments sont appelés "sommets",* M *est un ensemble dont les éléments sont appelés "flèches", et* d *est une application de* M *dans* $I \times I$.

Si $m \in M$ et si $d(m) = (i,j)$, alors on dit que i est "l'origine" et j "l'extrémité" de la flèche m. ([2], II-1).

Définition 5-3 : Un "diagramme" dans la catégorie C *sur le type de diagramme* Σ *est une fonction* D *qui associe à chaque sommet* $i \in I$ *un objet* D_i *de* C*, et à chaque flèche* m *d'origine* i *et d'extrémité* j *un morphisme* $D(m) : D_i \to D_j$. *Si* I *et* M *sont des ensembles finis, alors on dit que* Σ *est un type de diagramme fini et que* D ,t *un diagramme fini.*

Définition 5-4 :

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dd, "D(m)"] \\ X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\ & D_j \end{tikzcd}$$

Si C *est un diagramme dans* C *sur* $\Sigma =$ (I,M,d) *nous disons qu'une famille* $(X \xrightarrow{f_i} D_i)_{i \in I}$ *de morphismes de* C *est "compatible" avec* D *si pour toute flèche* $m \in M$ *le diagramme ci-contre est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ X \arrow[r, "f_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$

Enfin, la famille $(X \xrightarrow{f_i} D_i)_{i\ I}$ *est dite une "limite" pour* D *si elle est compatible et si, pour toute autre famille compatible* $(Y \xrightarrow{g_i} D_i)_{i \in I}$, *il existe un morphisme unique* $Y \xrightarrow{g} X$ *tel que, pour tout* $i \in I$, *le diagramme ci-contre soit commutatif.*

Définition 5-5 : *La catégorie* C *est dite "*Σ*-complète" si tout diagramme dans* C *sur* Σ *possède une limite dans* C.

Enfin C *est dite "complète" si elle est* Σ*-complète pour tout type de diagramme* Σ.

Remarques :

- Nous avons évidemment les notions duales de famille cocompatible, colimite, catégorie Σ-cocomplète et cocomplète.

- A titre d'exemple : la catégorie Mod_A des A-modules à gauche unitaires sur un anneau unitaire A est une catégorie complète et cocomplète.

Nous avons encore besoin d'une définition :

Définition 5-6 . C *sera dite une "sous-catégorie complète" de* Mod_A *si elle est complète et si le foncteur inclusion* $C \hookrightarrow Mod_A$ *préserve les limites* ([2] , *II - 6).*

Remarque :

Cela revient à dire que la limite dans Mod_A de tout diagramme de C est dans C. Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition 5-1. Pour ce faire, commençons par démontrer le lemme suivant :

<u>*Lemme 5-7*</u> :

(i) Pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ *de modules, on a*

$$(\prod_{i\in I} M_i)^{\Delta} \leq \prod_{i\in I} M_i^{\Delta} \ , \ (\bigoplus_{i\in I} M_i)^{\Delta} = \bigoplus_{i\in I} M_i^{\Delta} \ .$$

(ii) Pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ *d'objets de* C *le produit direct* $\prod_{i\in I} M_i$ *et le somme directe* $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *dans* Mod_A *sont encore des objets de* C.

<u>Démonstration</u> :

(i) Soit $(x_i)_{i\in I}$ un élément de $\prod_{i\in I} M_i$. Comme $0 : (x_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} (0 : x_i)$, il résulte de la propriété E_2 que si $(x_i)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} M_i)^{\Delta}$ alors $x_i \in M_i^{\Delta}$ pour tout $i\in I$. On a de même : $(\bigoplus_{i\in I} M_i)^{\Delta} \leq \bigoplus_{i\in I} M_i^{\Delta}$. Montrons enfin que $\bigoplus_{i\in I} M_i^{\Delta} \leq (\bigoplus_{i\in I} M_i)^{\Delta}$. Soit $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i^{\Delta}$, et posons $H = \{ i\in I \ ; \ x_i \neq 0 \}$. H est une partie <u>finie</u> de I et on a $0 : (x_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} (0 : x_i) = \bigcap_{i\in H} (0 : x_i)$ Par hypothèse on a $0 : x_i \Delta A$ pour tout $i\in I$. La relation d'essentialité étant compatible avec l'intersection finie, on a donc $\bigcap_{i\in H} (0 : x_i) \Delta A$ ce qui montre que $(x_i)_{i\in I} \in (\bigoplus_{i\in I} M_i)^{\Delta}$.

(ii) Ceci résulte trivialement du (i) précédent et de ce que, si la famille $(M_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de C, on a $M_i^{\Delta} = 0$ pour tout $i\in I$.

Utilisant la proposition 2-9 de [2]-Chapitre II - § 2, nous savons que si D est un diagramme dans C de type $\Sigma=(I,M,d)$, alors une limite pour D <u>dans Mod_A</u> est donnée par la famille de morphismes :

$$\bigcap_{m\in M} \mathrm{Ker}\ (p_k - D(m)\ p_j) \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{inclusion}} \prod_{h\in I} D_h \xrightarrow{\ \rho_i\ } D_i$$

où $d(m) = (j,k)$ et où p_i désigne le ième projection du produit. Or, d'après le lemme 5-7 (ii), $\prod_{h\in I} D_h$ est un objet de C ; par suite son sous-module $\bigcap_{m\in M} \mathrm{Ker}\ (p_k - D(m)p_j)$ aussi. Nous voyons ainsi que la limite dans Mod_A d'un diagramme quelconque de C est dans C, ce qui montre que C est une sous-catégorie complète de Mod_A.

<u>Remarque</u> : Il résulte de tout cela que, lorsque nous parlerons de limites de diagrammes de $\mathcal{C}$, il n'y aura pas lieu de préciser si l'on considère ces limites dans $\mathcal{C}$ ou dans Mod_A.

Enfin, pour clore ce chapitre sur les propriétés élémentaires de la catégorie $\mathcal{C}$ des modules non-singuliers, nous indiquerons la décomposition canonique <u>dans $\mathcal{C}$</u> d'un morphisme quelconque $f : M \longrightarrow M'$ de $\mathcal{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
0 & & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Coim}\ f = \mathrm{Coker}(\ker f) = M/\mathrm{Ker}\ f \arrow[u] \arrow[r, "\text{isomorphisme}"] & \mathrm{Im}\ f \arrow[r, "\substack{\text{monomorphisme}\\ \text{essentiel}}"] & \overline{\mathrm{Im}\ f} = \ker(\mathrm{coker}\ f) \arrow[d] \\
M \arrow[u] \arrow[rr, "f"] & & M' \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}\ f \arrow[u] & & M'/\overline{\mathrm{Im}\ f} = \mathrm{Coker}\ f \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & & 0
\end{tikzcd}
$$

les deux colonnes verticales étant exactes.

CHAPITRE II : CARACTERISATION DES OBJETS INJECTIFS DE LA CATEGORIE C. MONO-SOUS-CATEGORIES . SOUS-MODULES DE TORSION - OBJETS PURS.

I. OBJETS INJECTIFS DE C

Définition 1-1 :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Un objet Q *de* C *est dit "injectif dans* C *" si, quels que soient les objets* N *et* M *de* C, *le morphisme* $f : N \to Q$ *et le monomorphisme* $i : N \to M$, *il existe un morphisme* $g : M \to Q$ *prolongeant* f, *c'est-à-dire tel que* $g \circ i = f$.

Les objets injectifs de C sont caractérisés par la proposition suivante :

Proposition 1-2 : *Un objet* Q *de* C *est injectif dans* C *si et seulement si il est injectif dans* Mod_A.

Démonstration : Si Q est injectif dans Mod_A il est évidemment injectif dans C. Réciproquement, soit Q un objet de C injectif dans C, et $\hat{Q}$ l'une de ses enveloppes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_Q"'] & \hat{Q} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

injectives dans Mod_A. Nous avons vu en démontrant la proposition I-2-1 que $\hat{Q}$ est aussi un objet de C. Par suite il existe $h : \hat{Q} \to Q$ tel que $h \circ i = 1_Q$. (diagramme ci-dessus). On vérifie alors facilement que $\hat{Q} = Q \oplus \operatorname{Ker} h$. Mais Q étant essentiel dans $\hat{Q}$, $Q \cap \operatorname{Ker} h = 0$ entraîne $\operatorname{Ker} h = 0$, d'où $\hat{Q} = Q$, ce qui montre que Q est injectif dans Mod_A.

Il en résulte que, pour tout objet M de C, les enveloppes injectives de M dans C ne sont autres que ses enveloppes injectives dans Mod_A.

On peut alors se demander si les objets injectifs de $\mathcal{C}$ possèdent dans $\mathcal{C}$ les mêmes caractérisations que dans Mod_A. La réponse est donnée par la :

<u>*Proposition 1-3* </u>: *Soit* Q *un objet de* $\mathcal{C}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Q *est un objet injectif de* $\mathcal{C}$.

(ii) Q *est fermé dans tout objet de* $\mathcal{C}$ *dont il est sous-objet*

(iii) Toute suite dans $\mathcal{C}$ *de la forme* $0 \to Q \to M \to N \to 0$, *exacte en* Q *et en* N *et pseudo-exacte en* M, *se décompose (c'est-à-dire* $M = Q' \oplus N'$ *avec* $Q' \simeq Q$ *et* $N' \simeq N$) .

<u>Démonstration</u> :

(i)$\Longrightarrow$(ii) : Si Q est injectif dans $\mathcal{C}$, il est injectif dans Mod_A, et par suite fermé dans tout A-module dont il est sous-module, donc en particulier dans tout objet de $\mathcal{C}$ dont il est sous-objet.

(ii)$\Longrightarrow$(i) : Q est alors fermé dans son enveloppe injective dans Mod_A $\hat{Q}$. Mais ceci entraîne que Q est injectif dans Mod_A, et par suite aussi dans $\mathcal{C}$.

(i)$\Longrightarrow$(iii) : $Q' = \mathrm{Im}(Q \to M)$ est un sous-module de M isomorphe à Q, donc injectif, et par suite est un objet injectif de $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, "1_Q"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Or nous venons de voir que Q' est fermé dans M, ce qui entraîne $Q' = \mathrm{Ker}\,(M \to N)$ puisque, la suite étant pseudo-exacte en M, on avait $\mathrm{Im}(Q \to M) \vartriangle \mathrm{Ker}\,(M \to N)$.

De plus, il existe $h : M \to Q$ prolongeant 1_Q à M (diagramme ci-avant), et on vérifie facilement que $M = Q' \oplus \mathrm{Ker}\, h$, ce qui entraîne $\mathrm{Ker}\, h \simeq M/Q' = M/\mathrm{Ker}(M \to N)$ $\simeq \mathrm{Im}(M \to N) = N$, puisque la suite est exacte en N, et établit le résultat.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Soit $\hat{Q}$ une enveloppe injective de Q. La suite dans $\mathcal{C}$

$0 \rightarrow Q \xrightarrow{i} \hat{Q} \rightarrow 0 \rightarrow 0$, où i est l'injection canonique de Q dans $\hat{Q}$, satisfaisant aux conditions de l'hypothèse se décompose, ce qui montre que $\hat{Q} = Q$ et achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse de l'exactitude en N (au lieu de la pseudo-exactitude) est indispensable, ainsi que le montre le contre-exemple suivant :

Prenons pour A l'anneau Z des entiers rationnels. La suite $0 \rightarrow 0 \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow 0$, où Q est l'ensemble des nombres rationnels, est une suite pseudo-exacte de $\mathcal{C}$. 0 est injectif dans $\mathcal{C}$, et pourtant cette suite ne se décompose pas car sinon Z serait divisible (en tant que groupe abélien).

II. <u>CO-REFLEXIONS - MONO-SOUS-CATEGORIES</u> ([2] , V-5 et V-6).

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie, $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}$, et M un objet de $\mathcal{A}$. Une "<u>co-réflexion</u>" de M dans $\mathcal{C}$ est un couple $(R(M)), \rho_M)$ où R(M) est un objet de $\mathcal{C}$ et $\rho_M : M \rightarrow R(M)$ un morphisme de M dans R(M) tel que pour tout objet M' de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $M \xrightarrow{f} M'$ il existe un unique morphisme $R(M) \xrightarrow{\tilde{f}} M'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\rho_M"] \arrow[dr, "f"'] & & R(M) \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

Si tout objet de $\mathcal{A}$ possède une co-réflexion dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ est dite une "<u>sous-catégorie co-réflexive</u>" de $\mathcal{A}$. Dans ce cas R devient un foncteur covariant de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, appelé le "<u>co-réflecteur</u>" de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, en associant à tout morphisme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "f"'] & R(M) \arrow[d, "R(f)"] \\ M' \arrow[r, "\rho_{M'}"] & R(M') \end{tikzcd}$$

$f : M \rightarrow M'$ dans $\mathcal{A}$ l'unique morphisme de $\mathcal{C}$, noté R(f), qui rend le diagramme ci-contre commutatif.

On vérifie alors facilement que R est l'adjoint à gauche du foncteur inclusion $I : C \rightsquigarrow A$. Réciproquement, si le foncteur inclusion $I : C \rightsquigarrow A$ possède un adjoint à gauche R, alors R est leco-réflecteur de A dans C. Par abus de langage on appellera souvent R(M) la "co-réflexion de M dans C".

Les principales propriétés des catégories co-réflexives sont regroupées dans la proposition suivante :

<u>*Proposition 2-1*</u> *: Soit C une sous-catégorie pleine et co-réflexive d'une catégorie A.*

(i) Si un diagramme D de C possède une limite dans A, alors il possède une limite dans C.

(ii) Si $\{D_i \longrightarrow L\}$ *est une co-limite pour D dans A, alors la famille* $\{D_i \longrightarrow L \xrightarrow{\rho_L} R(L)\}$ *est une co-limite pour D dans C.*

(iii) Si A est abélienne, et si le co-réflecteur $R : A \rightsquigarrow C$ *préserve les noyaux, alors C est abélienne ; si de plus A est une catégorie de Grothendieck, alors C aussi.*

Pour la démonstration, on pourra se reporter à [2] , V. Proposition 5-1, 5-2, 5-3.

<u>Remarque</u> : Il y a lieu de noter que, si C est une catégorie abélienne, ce n'est pas en général une "sous-catégorie abélienne" de A . En effet, le foncteur inclusion $I : C \rightsquigarrow A$ n'est pas exact en général.

Suivant toujours Mitchell, nous donnerons la :

<u>*Définition 2-2*</u> *: Soit A une catégorie abélienne, complète, et localement petite, et C une sous-catégorie pleine de A.*

On dit que C est une <u>"mono-sous-catégorie"</u> de A si elle vérifie les trois axiomes suivants :

M_1 : *$\mathcal{C}$ est une sous-catégorie complète de $\mathcal{A}$.*

M_2 : *Si N $\longrightarrow$ M est un monomorphisme dans $\mathcal{A}$ et si M est un objet de $\mathcal{C}$, alors N est aussi un objet de $\mathcal{C}$.*

M_3 : *Pour tout objet M de $\mathcal{C}$ il existe un monomorphisme M $\longrightarrow$ Q dans $\mathcal{C}$ tel que Q soit injectif en tant qu'objet de $\mathcal{A}$.*

Nous avons alors l'importante proposition suivante :

<u>*Proposition 2-3*</u> : *La catégorie $\mathcal{C}$ des modules non-singuliers est une mono-sous-catégorie de Mod_A.*

<u>**Démonstration**</u> : On sait déjà que Mod_A est une catégorie abélienne, complète, et localement petite, et que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de Mod_A. De plus l'axiome M_1 est vérifié en vertu de la Proposition I-5-1 ; l'axiome M_2 résulte de ce que tout sous-module d'un module non-singulier est non-singulier ; enfin on vérifie l'axiome M_3 en prenant pour Q une enveloppe injective de M dans Mod_A puisqu'on a vu que l'enveloppe injective d'un module non-singulier est aussi un module non-singulier. Ceci va nous permettre d'appliquer à $\mathcal{C}$ les résultats généraux de la théorie des mono-sous-catégories, et de mettre en évidence certains résultats supplémentaires qui sont vrais dans $\mathcal{C}$ sans l'être en général dans une mono-sous-catégorie quelconque. Tout d'abord nous avons la :

<u>*Proposition 2-4*</u> : *$\mathcal{C}$ est une sous-catégorie co-réflexive de Mod_A, et pour tout module M la co-réflexion ρ_M : M $\to$ R(M) de M dans $\mathcal{C}$ est un épimorphisme.*

Pour la démonstration on se reportera à II-6, Proposition 6-1.

Mentionnons simplement la construction de cette co-réflexion. On considère la famille $F = \{ N \leqslant M \ ; \ (M/N)^{\Delta} = 0 \}$. Cette famille est non vide puisque $M \in F$

On forme alors le produit $\prod_{N\in\mathcal{F}}(M/N)$, dont on désigne par π_N la projection sur M/N,

$$\begin{tikzcd}
\prod_{N\in\mathcal{F}} M/N \arrow[drr, "\pi_N"] & & \\
M \arrow[u, "\rho"] \arrow[rr, "\rho_N"'] & & M/N
\end{tikzcd}$$

et on considère l'homomorphisme $\rho : M \longrightarrow \prod_{N\in\mathcal{F}} M/N$ dont les composantes sont les épimorphismes canoniques $\rho_N : M \longrightarrow M/N$. On pose alors $R(M) = \mathrm{Im}\rho$ et l'on définit $\rho_M = M \longrightarrow R(M)$ par $\rho_M(x) = \rho(x)$ pour tout $x \in M$.

On remarque alors immédiatement que cette construction est relativement peu maniable, aussi, utilisant le fait que deux co-réflexions d'un même objet sont évidemment isomorphes, nous allons nous attacher à en construire une autre beaucoup plus simple, et qui sera étroitement liée aux notions établies au chapitre I.

Comme $R(M) = \mathrm{Im}\rho \simeq M/\mathrm{Ker}\rho$, nous allons essayer de caractériser $\mathrm{Ker}\,\rho$. Par définition de ρ, $\rho(x) = 0$ si et seulement si $\rho_N(x) = 0$ pour tout $N\in\mathcal{F}$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}\,\rho = \bigcap_{N\in\mathcal{F}} N$. Or la famille $\mathcal{F}$ est une famille de Moore dans le treillis $\mathcal{T}(M)$ des sous-modules de M. En effet on a déjà vu que $M\in\mathcal{F}$; et si $(N_i)_{i\in I}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, notons pour tout $i\in I$ $\phi_i : M \longrightarrow M/N_i$ l'épimorphisme canonique, et $\phi : M \longrightarrow M/\bigcap_{i\in I} N_i$ l'épimorphisme canonique de M sur le quotient $M/\bigcap_{i\in I} N_i$. Comme $0 : \phi(x) = (\bigcap_{i\in I} N_i) \quad x \leqslant N_i : x = 0 : \phi_i(x) \leqslant A$, on voit ainsi que $\phi(x) \in (M/\bigcap_{i\in I} N_i)^{\Delta}$ entraîne $\phi_i(x) \in (M/N_i)^{\Delta} = 0$ pour tout $i\in I$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{i\in I} N_i$, soit finalement $\phi(x) = 0$, ce qui montre qu $\bigcap_{i\in I} N_i \in \mathcal{F}$ et établit le résultat.

Désignons alors par $\alpha : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ la fermeture de Moore associée à la famille $\mathcal{F}$. Nous voyons ainsi que la co-réflexion de M dans $\mathcal{C}$ est donnée par l'épimorphisme canonique $M \longrightarrow M/\alpha(0)$, de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à caractériser $\alpha(N)$ en termes d'éléments de M pour tout sous-module N de M.

Or, M. HARADA ([6]), reprenant une idée de A. W. GOLDIE ([7]) et de R. E. JOHNSON et E. T. WONG ([8]) associe à tout sous-module N de M le sous-module de M : $\mathrm{cl}\, N = \{x\in M \; ; \; N : x \vartriangleleft A\}$. (On remarque immédiatement que cl 0 n'est autre que le sous-module singulier M^{Δ} de M).

On constate alors que l'application $N \longmapsto cl\ N$ de $T(M)$ dans $T(M)$ n'est pas une fermeture dans $T(M)$, mais que par contre l'application $N \longmapsto cl\ cl\ N$ en est une. (Ce fait fut remarqué à Lyon pour la première fois par J. Ravel).

En effet,

Proposition 2-5 :

(i) L'application $N \longmapsto cl\ N$ *de* $T(M)$ *dans* $T(M)$ *est extensive et croissante, mais non idempotente en général.*

(ii) On a $clclcl\ N = clcl N$ *pour tout sous-module* N *de* M.

(iii) L'application $N \longmapsto clcl\ N$ *est une fermeture dans le treillis* $T(M)$ *des sous-modules de* M.

Démonstration :

(i) Comme $x \in N$ entraîne $N : x \vartriangleleft A$, on a évidemment $N \leqslant cl\ N$. Si maintenant on a $N \leqslant P \leqslant M$, on a évidemment $N : x \leqslant P : x$ pour tout $x \in M$, et par suite $N : x \vartriangleleft A$ entraîne $P : x \vartriangleleft A$ en vertu de la propriété E_2 du Chapitre I, ce qui montre que $cl\ N \leqslant cl\ P$. Montrons enfin que l'on n'a pas en général $cl\ cl\ o = cl\ o$, ce qui achèvera la démonstration. Considérons l'anneau $A = Z/4$ des entiers modulo 4 en tant que A-module. Ses seuls idéaux sont : 0, $\mathfrak{M} = \{\dot{0}, \dot{2}\}$ et A. Par suite $\mathfrak{M}$ étant un idéal maximum de A est essentiel dans A. On a alors $cl\ 0 = A^{\Delta} = \mathfrak{M}$ et $cl\ cl\ 0 = cl\ \mathfrak{M} = A$ puisque $\mathfrak{M} : \dot{1} = \mathfrak{M} \vartriangleleft A$.

(ii) En raison de l'extensivité il nous suffit de vérifier que $clclcl\ N \leqslant clcl\ N$, c'est-à-dire que $(clcl\ N) : x \vartriangleleft A$ entraîne $(cl\ N) : x \vartriangleleft A$. Soit donc $a \in A$; comme $(clcl\ N) : x \vartriangleleft A$ il existe $b \in A$ tel que $ba \neq 0$ et $bax \in clcl\ N$. Si $bax \in cl\ N$, c'est terminé. Sinon $N : (bax)$ n'est pas essentiel dans A, ce qui signifie qu'il existe $c \in A^{*}$ tel que pour tout $d \in A$ on ait $dcbax \notin N$ ou $dc = 0$. Or comme $bax \in clcl\ N$, $(cl\ N) : (bax)$ est essentiel dans A, et par suite il existe $d \in A$ tel que $dc \neq 0$ et $dcbax \in cl\ N$, ce qui implique que $dcbax \in (cl\ N - N)$.

On a donc ainsi trouvé $dcb \in A$ tel que $dcba \neq 0$ et $dcbax \in$ cl N, ce qui montre que (cl N) : x est essentiel dans A et achève la démonstration.

(iii) Ceci résulte immédiatement des assertions (i) et (ii) précédente.

Ceci nous permet de caractériser la fermeture α de la façon suivante :

Proposition 2-6 :

Pour tout sous-module N *de* M *on a* : $\alpha(N) = \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N$.

Démonstration : Nous avons tout d'abord $\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $(M/\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N)^{\Delta} = 0$. En effet, si $\phi : M \longrightarrow M/\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N$ est l'épimorphisme canonique, alors $\phi(x) \in (M/\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N)^{\Delta}$ équivaut à $0 : \phi(x) \Delta A$, c'est-à-dire à $\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N : x \Delta A$, soit finalement à $x \in \mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\ N = \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N$, c'est-à-dire à $\phi(x) = 0$. Donc, par construction de α, ceci entraîne $\alpha(N) \leqslant \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N$. Mais d'autre part, on a $\mathrm{cl}(\alpha(N)) = \alpha(N)$ car, si $\psi : M \to M/\alpha(N)$ est l'épimorphisme canonique, alors $(\alpha(N)) : x \Delta A$ équivaut à $0 : \psi(x) \Delta A$, c'est-à-dire à $\psi(x) \in (M/\alpha(N))^{\Delta} = 0$, soit finalement à $x \in \alpha(N)$. Comme on a $N \leqslant \alpha(N)$, il vient alors : $\mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ N \leqslant \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ (\alpha(N)) = \mathrm{cl}\ (\alpha(N)) = \alpha(N)$, ce qui achève la démonstration.

Remarques :

1°) Ainsi pour tout module M la co-réflexion de M dans $\mathcal{C}$ n'est autre que le couple $(M/\alpha(o), \rho_M)$ où $\alpha(o)$ est le sous-module de M défini par : $\alpha(o) = \{x \in M \ ; \ M^{\Delta} : x \Delta A$ et où ρ_M est l'épimorphisme canonique $M \longrightarrow M/\alpha(o)$.

2°) Harada appelle "fermés" les sous-modules N de M tels que N = cl N, bien que nous ayons vu que l'application $N \longrightarrow \mathrm{cl}\ N$ n'est pas une fermeture. Nous allons voir que les sous-modules fermés de Harada coïncident avec les notres, tels que nous les avons définis en I-1-2, c'est-à-dire : sous-modules n'ayant pas d'extension essantielle propre dans M.

En effet, N = cl N équivaut à $(M/N)^{\Delta} = 0$ puisque la relation $\{C : \dot{x} \Delta A \Longrightarrow \dot{x} = 0\}$ n'est autre que la relation $\{N : x \Delta A \Rightarrow x \in N\}$, et nous savons que $(M/N)^{\Delta} = 0$ si et seulement si N n'a pas d'extension essentielle propre dans M (Proposition I-4 1).

3°) Harada appelle $\alpha(o)$ le "<u>sous-module de torsion</u>" de M, et dit que M est "<u>sans-torsion</u>" si $\alpha(o) = 0$; il indique de plus que, si A est un domaine d'intégrité, alors ces notions coïncident avec les définitions habituelles de sous-module de torsion et de module sans torsion.

Notons au passage que $\alpha(o) = 0$ si et seulement si $M^{\Delta} = 0$, de sorte que les modules non-singuliers ne sont autre que les modules sans torsion au sens précédemment défini.

De son côté Mitchell dit qu'un objet M d'une catégorie A est un "objet de torsion" relativement à une mono-sous-catégorie C si la co-réflexion de M dans C est nulle.

Nous voyons ainsi à l'aide de la remarque 1°) qu'un module M est un objet de torsion relativement à C si et seulement si $\alpha(o) = M$, de sorte que les notions de torsion au sens de Harada et au sens de Mitchell coïncident.

Il est à noter que cette généralisation de la torsion à des modules sur un anneau unitaire quelconque a donné lieu à des travaux très fructueux, parmi lesquels nous citerons : [7], [9] , [10] .

<u>Application</u> : Soit M un objet de C. Il est trivial que le couple $(M, 1_M)$ est une co-réflexion de M dans C. Nous allons nous attacher maintenant à caractériser d'une manière encore plus simple que ci-dessus la co-réflexion dans C du quotient M/N de M par l'un de ses sous-modules quelconques N.

En effet l'expression $M/N/\alpha(o)$ où $(o) = \{\dot{x} \in M/N ; (M/N)^{\Delta} : \dot{x} \Delta A\}$ est relativement peu maniable.

Considérons l'application composée $M \xrightarrow{\Pi} M/N \xrightarrow{\rho} M/N/\alpha(o)$ où Π et ρ sont les épimorphismes canoniques. Comme Π est conoyau dans Mod_A de l'injection canonique $N \xrightarrow{i} M$ qui est un morphisme de $\mathcal{C}$, il résulte de la Proposition 2-1 - (ii) que $\rho\circ\Pi$ est conoyau de i dans $\mathcal{C}$. Or nous savons d'après la Proposition I-4-7 que l'épimorphisme canonique $M \to M/\bar{N}$ est aussi conoyau de i dans $\mathcal{C}$. Il en résulte que $M/\bar{N}$ est isomorphe à $M/N/\alpha(o)$, et par suite que nous pouvons prendre comme co-réflexion de M/N dans $\mathcal{C}$ le couple $(M/\bar{N}\ ,\ \rho)$ où ρ est l'épimorphisme $M/N \to M/\bar{N}$ induit par l'inclusion $N \longrightarrow \bar{N}$ (voir diagramme ci-dessous).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[dd] & M \arrow[r, "\Pi"] \arrow[dd, "1_M"] & M/N \arrow[r] \arrow[drr, "\rho"] \arrow[dd, "\rho"'] & 0 & & \\
 & & & & & M/N/\alpha(o) \arrow[r] \arrow[dll, "iso."] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{N} \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r] & M/\bar{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Notons enfin que le sous-module de torsion $\alpha(o)$ est la plus grande extension essentielle du sous-module singulier M^{Δ} dans M.

En effet, comme $\alpha(o) = \left\{x \in M\ ;\ M^{\Delta} : x \Delta A\right\}$, il est immédiat que M^{Δ} est contenu dans $\alpha(o)$. Montrons qu'il est essentiel dans $\alpha(o)$, et pour cela soit $x \in \alpha(o) - M^{\Delta}$. Comme $0 : x$ n'est pas essentiel dans A, il existe $a \in A^{*}$ tel que pour tout $b \in A$, on ait $bax \neq 0$ ou $ba = 0$. Mais comme $M^{\Delta} : x \Delta A$, il existe $b \in A$ tel que $ba \in (M^{\Delta} : x)^{*}$ c'est-à-dire tel que $ba \neq 0$ et $bax \in M^{\Delta}$. Or $ba \neq 0$ entraîne $bax \neq 0$ d'après ce qui précède, ce qui établit le résultat. Enfin si N est une extension essentielle de M^{Δ} dans M, on a $M^{\Delta} : x \Delta A$ pour tout $x \in N$ (lemme 1-3-4) ce qui montre que N est contenu dans $\alpha(o)$ et achève la démonstration.

III. OBJETS PURS - APPLICATIONS

<u>*Définition 3-1*</u> : *Un monomorphisme* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M$ *dans* $\mathcal{C}$ *est dit "<u>pur</u>" si le quotient* M/L *de* M *par* L *est un objet de* $\mathcal{C}$.

<u>*Définition 3-2*</u> : *Un objet* L *de* $\mathcal{C}$ *est dit "<u>pur</u>" si tout monomorphisme de* L *dans un objet quelconque* M *de* $\mathcal{C}$ *est pur.*

On désignera par $\mathcal{L}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont la classe des objets est constituée par tous les objets purs de $\mathcal{C}$. On a immédiatement la :

<u>*Proposition 3-3*</u> : *Les objets purs de* $\mathcal{C}$ *sont les objets injectifs de* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire les modules injectifs non-singuliers.*

<u>Démonstration</u> : En vertu de la proposition 1-4-1, dire que le monomorphisme $0 \to L \to M$ est pur revient à dire que L est fermé dans M. Par suite dire que l'objet L de $\mathcal{C}$ est pur signifie qu'il est fermé dans tout objet M de $\mathcal{C}$ dont il est sous-objet, ce qui, d'après la proposition 1-3, caractérise les objets injectifs de $\mathcal{C}$.

Il y a lieu de remarquer que ceci n'est pas vrai, en général, lorsque $\mathcal{C}$ est une mono-sous-catégorie quelconque d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Tout ce que l'on peut dire alors est que tout objet de $\mathcal{C}$ injectif dans $\mathcal{A}$ est pur, et qu'un objet pur est injectif dans $\mathcal{L}$ si et seulement si il est injectif dans $\mathcal{A}$ ([II], V exercice 3) La théorie générale des mono-sous-catégories nous fournit alors les résultats suivants :

- Si la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte dans Mod_A et si M' et M'' sont des objets de $\mathcal{C}$, alors M aussi ([2], V, lemme 6-2).

- Si la suite $0 \to L \to M \to M'' \to 0$ est exacte dans Mod_A et si M'' est un objet de $\mathcal{C}$ et M est un objet de $\mathcal{L}$, alors L est un objet de $\mathcal{L}$. ([2], V, lemme 6-4).

<u>Théorème 3-4</u> : *L est une sous-catégorie co-réflective de* Mod_A *et le coréflecteur* $R^{\prime} : Mod_A \rightsquigarrow L$ *est exact et préserve les co-limites. Donc L est une catégorie abélienne complète, de Grothendieck, possédant un générateur et un co-générateur injectif. ([2] , V , théorème 6-8).*

L'étude de la catégorie L a donné lieu à de nombreux travaux. On sait en particulier que L est une catégorie "<u>spectrale</u>" [11] . Nous ne donnerons donc que quelques résultats se rattachant à ce que nous avons fait jusqu'ici.

Tout d'abord le foncteur inclusion $L \rightsquigarrow Mod_A$, admettant pour coadjoint le foncteur co-réflexion $Mod_A \rightsquigarrow L$, préserve les monomorphismes et les limites ([2] , II 12-1). Par suite L est une sous-catégorie complète de Mod_A, les noyaux des morphismes sont les mêmes dans L et dans Mod_A, et les monomorphismes f de L sont caractérisés par Ker f = 0.
Il en résulte que les sous-objets dans L d'un objet Q de L sont les modules isomorphes aux facteurs directs dans Mod_A de Q (puisqu'ils sont injectifs), de sorte que L est une catégorie localement petite.

Soit maintenant $Q \xrightarrow{f} Q'$ un morphisme de L. En vertu du lemme 1-4-4 $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(o)$ est fermé dans Q et par suite injectif, de sorte qu'il existe un sous-module Q_1 de Q tel que $Q = \mathrm{Ker}\, f \oplus Q_1$. Mais alors $\mathrm{Im}\, f \simeq Q/\mathrm{Ker}\, f \simeq Q_1$ est un sous-module injectif de Q' et par suite il existe un sous-module injectif Q_1' de Q' tel que $Q' = \mathrm{Im}\, f \oplus Q_1'$, de sorte que le conoyau de f dans Mod_A $\mathrm{Coker}\, f = Q_1'/\mathrm{Im}\, f \simeq Q_1'$ est un objet de L, Or en vertu de la Proposition 2-1 (ii), le conoyau de f dans L est la co-réflexion dans L de Coker f, c'est-à-dire Coker f lui-même, ce qui montre que les conoyaux des morphismes sont les mêmes dans L et dans Mod_A, d'où la :

<u>*Proposition 3-5*</u> *: $\mathcal{L}$ est une sous-catégorie abélienne de* Mod_A *(en ce sens que le foncteur inclusion $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathrm{Mod}_A$ est exact).*

Remarquons enfin que les épimorphismes $Q \xrightarrow{f} Q'$ de $\mathcal{L}$ sont caractérisés par $\mathrm{Im}\, f = Q'$ (et non plus par $\mathrm{Im}\, f \trianglelefteq Q'$ comme dans $\mathcal{C}$) et que les objets-quotients dans $\mathcal{L}$ d'un objet Q de $\mathcal{L}$ sont les quotients dans Mod_A de Q par ses facteurs directs, de sorte qu'il existe une bijection (renversant l'ordre) entre les sous-objets de Q et ses objets-quotients, et que $\mathcal{L}$ est une catégorie colocalement petite.

<u>*Proposition 3-6*</u> *: Le co-réflecteur $R' : \mathrm{Mod}_A \rightsquigarrow \mathcal{L}$ est le composé du co-réflecteur $R : \mathrm{Mod}_A \rightsquigarrow \mathcal{C}$ et du foncteur enveloppe injective $\widehat{\ }: \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{L}$.*

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & M/\alpha(o) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & \widehat{M/\alpha(o)} \arrow[dl, "\hat{g}"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Soit M un A-module, $M/\alpha(o)$ sa co-réflexion dans $\mathcal{C}$ et $\widehat{M/\alpha(o)}$ une enveloppe injective de cette co-réflexion. $\widehat{M/\alpha(o)}$ est un objet de $\mathcal{L}$. Soient enfin ρ l'épimorphisme canonique $M \longrightarrow M/\alpha(o)$, i l'injection canonique de $M/\alpha(o)$ dans son enveloppe injective, L un objet de $\mathcal{L}$, et $f : M \longrightarrow L$ un homomorphisme de M dans L. L étant en particulier un objet de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme unique $g : M/\alpha(o) \longrightarrow L$ tel que $g.\rho = f$, et $\hat{g} : \widehat{M/\alpha(o)} \longrightarrow \hat{L} = L$ est l'unique morphisme prolongeant g, donc l'unique morphisme $\widehat{M/\alpha(o)} \longrightarrow L$ tel que $g.(i.\rho) = f$.

<u>*Corollaire 3-7*</u> *: Le foncteur enveloppe injective $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ est exact. (En ce sens qu'il transforme en une suite exacte dans $\mathcal{L}$ toute suite exacte dans* Mod_A *dont les objets sont dans $\mathcal{C}$).*

Démonstration :

La restriction à C du co-réflecteur $R : Mod_A \rightsquigarrow C$ étant le foncteur identité, la restriction à C du co-réflecteur $R' : Mod_A \rightsquigarrow L$ est donc le foncteur enveloppe injective $\hat{}$, et il est exact en vertu du théorème 3-4.

Enfin, nous verrons au chapitre suivant qu'une condition suffisante pour que L soit une sous-catégorie co-complète de Mod_A est que la co-réflexion $A/\alpha(o)$ de A dans C soit un anneau noethérien à gauche.

Notons enfin pour terminer ce chapitre une méthode d'étude de la catégorie L, due à Gabriel, tout à fait différente de la méthode des mono-sous-catégories, et cependant équivalente du point de vue des résultats obtenus. Cette méthode consiste à montrer que L s'obtient comme catégorie-quotient de Mod_A pour la sous-catégorie localisante de Mod_A dont la classe des objets est constituée par les modules M tels que $M = \alpha(o)$, c'est-à-dire tels que $M^{\Delta} \Delta M$ (on la considère bien entendu en tant que sous-catégorie pleine de Mod_A).

Pour de plus amples détails sur cette méthode, voir [12] .

CHAPITRE III : CARACTERISATION DES OBJETS PROJECTIFS DE LA CATEGORIE $\mathcal{C}$. ETUDE D'UNE MONO-SOUS- CATEGORIE PARTICULIERE ISOMORPHE A $\mathcal{C}$. APPLICATIONS.

I. PRELIMINAIRES

Définition 1-1 : *Un objet* P *de* $\mathcal{C}$ *est dit "projectif dans* $\mathcal{C}$ *" si, quels que soient les objets* M *et* M'' *de* $\mathcal{C}$*, le morphisme* $f : P \to M$ *et le pseudo-épimorphisme* $v : M'' \to M$ *, il existe un morphisme* $g : P \to M''$ *tel que* $v.g = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M'' \arrow[r, "v"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Malheureusement cette définition, bien que naturelle puisque les pseudo-épimorphismes sont les épimorphismes de la catégorie $\mathcal{C}$, est pratiquement inexploitable dans le cas général.

Si par contre nous introduisons l'hypothèse supplémentaire "A est un anneau non-singulier", les choses semblent se clarifier un peu en vertu de la

Proposition 1-2 : *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est un anneau non-singulier*

(ii) Tout A*-module projectif* P *est tel que* $P^{\Delta} = 0$.

(iii) Tout A*-module libre* L *est tel que* $L^{\Delta} = 0$.

(iv) Il existe un A*-module libre non nul* L *tel que* $L^{\Delta} = 0$.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Tout A-module projectif P est facteur direct d'un A-module libre, c'est-à-dire d'une somme directe $\bigoplus_{i \in I} A_i$ de copies de A. Il vient par conséquent, en vertu du lemme 1-5-7,

$$\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right)^{\Delta} = \bigoplus_{i\in I} (A_i^{\Delta}) = \bigoplus_{i\in I} 0 = 0 \text{ , d'où } P^{\Delta} = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Trivial.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) : Il suffit de prendre pour L l'anneau A lui-même.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : Raisonnant par contraposition, nous allons montrer que non (i) implique non(iv), c'est-à-dire que $A^{\Delta} \neq 0$ entraîne $L^{\Delta} \neq 0$ pour tout A-module libre non nul. Comme L est non nul, il possède une base non vide ; soit x un élément de cette base. Comme $A^{\Delta} \neq 0$, soit $a \in A^{*}$ tel que $0 : a \triangle A$. On a donc ainsi simultanément $ax \neq 0$ et $0 : ax = (0:x) : a = 0 : a \triangleleft A$, ce qui montre que $ax \in (L^{\Delta})^{*}$.

Nous voyons ainsi que lorsque $A^{\Delta} = 0$ tous les A-modules libres sont des objets de $\mathcal{C}$, ce qui ne veut pas dire qu'ils soient projectifs en tant qu'objets de $\mathcal{C}$. Mais par contre cela nous permettra d'appliquer à la recherche des objets projectifs de $\mathcal{C}$ les procédés de "scission" des suites exactes usuels dans Mod_A.
Poursuivant notre idée de particularisation de l'anneau A, nous remarquons que bon nombre de résultats sur les modules singuliers ont été démontrés par Johnson, Wong, Gentile, etc... (voir [4] , [8] , [13]) avec l'hypothèse $A^{\Delta} = 0$, et que cette hypothèse fut ensuite levée dans des cas particuliers par J. Ravel ([5]). La question se pose donc de savoir s'il existe des propriétés des modules non-singuliers qui ne sont vraies qu'avec l'hypothèse supplémentaire $A^{\Delta} = 0$.
Nous obtiendrons la réponse satisfaisante suivante :
"Les propriétés catégoriques des modules non-singuliers sont indépendantes de la non-singularité de l'anneau A".
Par propriétés catégoriques nous entendons toutes les propriétés obtenues par application de la théorie des catégories à la catégorie $\mathcal{C}$ des modules non-singuliers.
Nous verrons par contre qu'il existe d'autres propriétés qui ne sont vraies qu'avec l'hypothèse supplémentaire $A^{\Delta} = 0$.

II. MONO-SOUS-CATEGORIE ISOMORPHE A $\mathcal{C}$.

Lemme 2-1 : La co-réflexion $A/\alpha(o)$ *de* A *dans* $\mathcal{C}$ *est un anneau unitaire non-singulier.*

Démonstration :

A^{Δ} est un idéal bilatère de A. En effet on a $0 : a \leqslant (0 : b) : a = 0 : (ab) \leqslant A$ pour tout a, $b \in A$, et par suite $0 : a \Delta A$ entraîne $0 : (ab) \Delta A$.

Mais avec les mêmes notations on a de même $A^{\Delta} : a \leqslant (A^{\Delta} : b) : a = A^{\Delta} : (ab) \leqslant A$ (car il est immédiat que $A^{\Delta} \leqslant A^{\Delta} : b$, puisque A^{Δ} est bilatère), ce qui montre que $A^{\Delta} : a \Delta A$ entraîne $A^{\Delta} : (ab) \Delta A$, établissant ainsi le fait que $\alpha(o)$ est un idéal bilatère de A. On sait d'autre part que $A/\alpha(o)$ est non-singulier en tant que A-module. Montrons qu'il est non-singulier en tant que $A/\alpha(o)$-module : soit $\dot{a} \in A/\alpha(o)$ tel que $0 \underset{A/\alpha(o)}{:} \dot{a} = \{\dot{b} \in A/\alpha(o) ; \dot{b}\dot{a} = 0\}$ soit essentiel dans $A/\alpha(o)$; il en résulte que $0 \underset{A}{:} \dot{a} = \{b \in A ; b\dot{a} = 0\}$ est essentiel dans A (en effet soit $b \in A^{*}$ si $b\dot{a} = 0$ c'est terminé ; sinon on a $\dot{b}\,\dot{a} = \widehat{b\,\dot{a}} = b\,\dot{a} \neq 0$, d'où $\dot{b} \neq 0$ et par hypothèse il existe $\dot{c} \in A/\alpha(o)$ tel que $\dot{c}\,\dot{b} \neq 0$ et $\dot{c}\,\dot{b}\,\dot{a} = 0$, d'où $c \in A$ tel que $cb \neq 0$ et $c\,b\,\dot{a} = 0$). Comme $A/\alpha(o)$ est non-singulier en tant que A-module, il en résulte que $\dot{a} = 0$ ce qui achève la démonstration.

Notations : Pour des raisons de simplification d'écriture, nous noterons désormais B l'anneau non-singulier $A/\alpha(o)$, et nous désignerons les éléments de B sous la forme $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, etc ... où a, b, c, etc. , appartiennent à A.

Lemme 2-2 : Pour tout A*-module* M *la co-réflexion* $M/\alpha(o)$ *de* M *dans* $\mathcal{C}$ *peut être munie canoniquement d'une structure de* B*-module définie par :* $\dot{a}\,\dot{x} = \widehat{\dot{ax}}$, *où* $\dot{x}$ *et* $\widehat{\dot{ax}}$ *désignent les classes de* x *et de* ax *modulo* $\alpha(o)$.

Démonstration : La loi de composition ainsi définie est indépendante des représentants choisis dans les différentes classes d'équivalence. En effet, supposons que $\dot{a} = \dot{b}$ et $\dot{x} = \dot{y}$. Comme $ax - by = a(x-y) + (a-b)y$ et que $a(x-y) \in \alpha(o)$ puisque $\alpha(o)$ est un sous-module de M, il suffit, pour prouver que $\widehat{\dot{ax}} = \widehat{\dot{by}}$ de montrer que $(a-b)y \in \alpha(o)$, c'est-à-dire que $M^{\Delta} : ((a-b)y) \Delta A$.

Or la relation $0 : b \leqslant (o:y) : b = 0 : (by) \leqslant A$, jointe à la convexité de la relation d'essentialité, nous montre que $A^{\Delta} \leqslant M^{\Delta} : y$, ce qui entraîne $A^{\Delta} : (a-b) \leqslant (M^{\Delta} : y) : (a-b) = M^{\Delta} : ((a-b)y) \leqslant A$.

Mais alors $A^{\Delta} : (a-b) \Delta A$ entraîne $M^{\Delta} : ((a-b)y) \Delta A$, ce qui montre que $\dot{a} = \dot{b}$ entraîne $(a-b)y \in \alpha(o)$ et établit le résultat. La vérification des axiomes des B-modules ne présente aucune difficulté.

Convention : A partir d'ici, et jusqu'à la fin du II, nous désignerons les A-modules par M_A , N_A , P_A , etc..., et les B-modules par M_B , N_B , P_B , etc ... réservant les lettres M, N, P, etc ... à la désignation des groupes abéliens sous-jacents.

Enfin, nous désignerons par $\mathcal{D}$ la mono-sous-catégorie de Mod_B constituée par les B-modules non-singuliers et leurs B-homomorphismes.

Cela étant, nous nous proposons maintenant d'établir le :

Théorème 2-3 : Les mono-sous-catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont canoniquement isomorphes.

Démonstration : En vertu du lemme 2-2, et compte-tenu du fait que la restriction à $\mathcal{C}$ du co-réflecteur $Mod_A \rightsquigarrow \mathcal{C}$ est le foncteur identité, nous pouvons associer à tout objet M_A de $\mathcal{C}$ le B-module M_B ayant même groupe abélien sous-jacent M et dont la loi de composition externe $B \times M \longrightarrow M$ est définie par $\dot{a}x = ax$.

D'autre part, il est alors immédiat que, M_A et N_A étant deux objets de $\mathcal{C}$, un homomorphisme $f : M \longrightarrow N$ entre les groupes abéliens sous-jacents est un A-homomorphisme $M_A \longrightarrow N_A$ si et seulement si c'est un B-homomorphisme $M_B \longrightarrow N_B$.

Par suite, il nous suffit d'établir que la correspondance $M_A \rightsquigarrow M_B$ ainsi définie est une bijection entre la classe des objets de $\mathcal{C}$ et la classe des objets de $\mathcal{D}$, ce que nous ferons en trois points.

- <u>1er point</u> :

Pour tout objet M_A de $\mathcal{C}$ le B-module associé M_B est un objet de $\mathcal{D}$.

En effet, soit $x \in M$ tel que $0 \underset{B}{:} x \triangle B$ (Nous posons ici : $0 \underset{B}{:} x = \{\dot{a} \in B \ ; \ \dot{a}x = 0\}$ et $0 \underset{A}{:} x = \{a \in A \ ; \ ax = 0\}$.)

Ceci entraîne $0 \underset{A}{:} x \triangle A$ car si $a \in A^*$ et si $ax \neq 0$ on a alors $\dot{a}x = ax \neq 0$; d'où $\dot{a} \in B^*$, et l'existence de $\dot{b} \in B$ tel que $\dot{b}\dot{a} \neq 0$ et $\dot{b}\dot{a}x = 0$, c'est-à-dire l'existence de $b \in A$ tel que $ba \neq 0$ et $bax = \dot{b}\dot{a}x = 0$. Mais alors on a $x \in M_A^{\triangle} = 0$, ce qui montre que $M_B^{\triangle} = 0$.

- <u>2ème point</u> :

L'application $M_A \leadsto M_B$ définie dans la classe des objets de $\mathcal{C}$ et à valeurs dans la classe des objets de $\mathcal{D}$ est injective.

En effet, si un objet M_B de $\mathcal{D}$ correspond aux objets N_A et P_A de $\mathcal{C}$, alors les groupes abéliens sous-jacents sont égaux, d'où $N = M = P$. D'autre part, les lois de composition externes sur N et P sont définies toutes les deux par $ax = \dot{a}x$, ce qui montre que $N_A = P_A$ et établit le résultat.

- <u>3ème point</u> :

L'application $M_A \leadsto M_B$ précédente est surjective.

En effet, soit M_B un objet de $\mathcal{D}$. A cause de l'épimorphisme canonique $A \longrightarrow B$ nous pouvons associer à M_B le A-module ayant même groupe abélien sous-jacent M et dont la loi externe est définie par $ax = \dot{a}x$ (voir [1], Ch. II-VI). Comme il est trivial que, si M_A est un objet de $\mathcal{C}$, M_B sera associé à M_A dans notre correspondance, il ne reste donc plus, pour achever notre démonstration qu'à montrer que $M_A^{\triangle} = 0$.

Soit donc $x \in M$ tel que $0 \underset{A}{:} x \triangle A$. Ceci entraîne $0 \underset{B}{:} x \triangle B$.

En effet, soit $a \in B^*$; comme $0 \underset{A}{:} x \triangle A$, il existe donc $b \in A$ tel que $ba \neq 0$ et $bax = 0$, et par suite $b \in B$ tel que $\dot{b}\dot{a}x = 0$. Montrons qu'il existe en fait $\dot{b} \in B$ tel que $\dot{b}\dot{a}x = 0$

et $\dot{b}\dot{a} \neq 0$, ce qui établira $0 \underset{B}{:} x \trianglelefteq B$. S'il n'en était pas ainsi on aurait alors $0 \underset{B}{:} (\dot{a}x) \leqslant 0 : \dot{a}$, c'est-à-dire $0 \underset{A}{:} ax \leqslant \alpha(o) : a \leqslant A$.

Mais en vertu du lemme I-3-4, $0 \underset{A}{:} x \trianglelefteq A$ entraîne $0 \underset{A}{:} (ax) = (o:x) \underset{A}{:} a \trianglelefteq A$, et la convexité de la relation d'essentialité nous donnerait alors $\alpha(0) : a \trianglelefteq A$, c'est-à-dire, en reprenant les notations de la proposition II-2-5, $a \in \mathrm{cl}\ (\alpha(o))$. Or nous avons, en vertu de cette même proposition : $\mathrm{cl}\ (\alpha(o)) = \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ (0) = \mathrm{cl}\ \mathrm{cl}\ 0 = \alpha(0)$, d'où $\dot{a} = 0$, contredisant ainsi $\dot{a} \in B^{*}$.

Ainsi, nous pouvons, pour étudier les propriétés catégoriques d'un module non-singulier sur un anneau A, le considérer uniquement comme module sur l'anneau non-singulier $A/\alpha(o)$, c'est-à-dire supposer finalement l'anneau A non-singulier. Mais il n'en est pas de même pour les propriétés externes à la catégorie C, comme le montre le contre-exemple suivant :

<u>Contre-exemple</u> : Soit A un anneau tel que $0 < \alpha(o) < A$. (Par exemple $A = Z/12$, car alors $A^{\vartriangle} = \{\bar{0}\ , \bar{6}\}$ et $\alpha(o) = \{\bar{0}\ , \bar{3}, \bar{6}\ , \bar{9}\ \}$).Alors $A/\ \alpha(o)$ est libre en tant que $A/\alpha(o)$-module, mais n'est pas libre en tant que A-module. En effet, dans le cas contraire, comme $A/\alpha(o) \neq 0$, soit $\dot{a} \in A/\alpha(o)$ un élément d'une base de $A/\alpha(o)$. On aurait alors un isomorphisme de A-modules canonique $A \longrightarrow A\dot{a}$ défini par $1 \rightarrow \dot{a}$. Mais alors le sous-module singulier de $A\dot{a}$ serait non nul, puisqu'isomorphe à $\alpha(o)$, ce qui contredirait le fait que $A/\ \alpha(o)$ est un A-module non-singulier.

III. <u>APPLICATIONS</u>

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les assertions formulées aux chapitres I et II sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que C soit une catégorie balancée, normale, etc ..., ainsi que le fait selon lequel C est une sous-catégorie co-complète de Mod_A si $A/\alpha(o)$ est un anneau noethérien à gauche.

Proposition 3-1 :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La Co-réflexion* $A/\alpha(o)$ *de* A *dans* $\mathcal{C}$ *est un* A*-module à gauche semi-simple.*
2. $\mathcal{C}$ *est isomorphe à* Mod_B *où* B *est un anneau semi-simple.*
3. $\mathcal{C}$ *est abélienne.*
4. $\mathcal{C}$ *est exacte.*
5. $\mathcal{C}$ *est normale.*
6. *Tout épimorphisme dans* $\mathcal{C}$ *est aussi épimorphisme dans* Mod_A.
7. $\mathcal{C}$ *est normale.*
8. $\mathcal{C}$ *est balancée.*

Démonstration :

$1 \Longrightarrow 2$: Posons $B = A/\alpha(o)$. On sait que B est un anneau et que $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{D}$ Par suite, il nous suffit de montrer que $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}_B$. Or il est immédiat qu'une partie C de B est un idéal de B si et seulement si c'est un sous-A-module du A-module B (car $\dot{a}\dot{b} \in C \subset B$ entraîne $a\dot{b} = \dot{\widehat{ab}} = \dot{a}\dot{b} \in C$ et réciproquement). Par conséquent B est un anneau semi-simple, ce qui entraîne que tout idéal de B en est facteur direct. Soit maintenant M un B-module quelconque et $x \in M^{\triangleleft}$. On a ainsi $0 : x \triangleleft B$ et $0 : x$ facteur direct de B, ce qui entraîne $0 : x = B$, d'où $x = \dot{1}x = 0$ et montre que $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}_B$.

$2 \Longrightarrow 3$: Car Mod_B est une catégorie abélienne.

$3 \Longrightarrow 4$: Car toute catégorie abélienne est exacte.

$4 \Longrightarrow 5$: Car toute catégorie exacte est normale.

$5 \Longrightarrow 6$: Soit $v : M \longrightarrow N$ un épimorphisme de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{Im}\, v \vartriangleleft N$ avec M et N objets de $\mathcal{C}$. Les épimorphismes de Mod_A étant les homomorphismes surjectifs, il nous suffit de montrer que $\mathrm{Im}\, v = N$. Soit donc $i : \mathrm{Im}\, v \longrightarrow N$ l'injection canonique de Im v dans N. Ce morphisme est un monomorphisme de $\mathcal{C}$, et comme $\mathcal{C}$

est normale, i est noyau d'un morphisme $f : N \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}$. Mais alors $\operatorname{Im} v = f^{-1}(0)$ est fermé dans N (Lemme I-4-4), ce qui entraîne $\operatorname{Im} v = N$ puisque N est extension essentielle de Im v.

$6 \Longrightarrow 7$:Nous voulons montrer que tout épimorphisme de $\mathcal{C}$ $v : M \longrightarrow N$ est conoyau dans $\mathcal{C}$ d'un morphisme $f : M' \longrightarrow M$ de $\mathcal{C}$. Or par hypothèse v est aussi un épimorphisme dans Mod_A, ce qui entraîne que v est dans Mod_A conoyau de l'injection canonique $i : \operatorname{Ker} v \longrightarrow M$. Mais ce dernier morphisme est dans $\mathcal{C}$ (puisque M est un objet de $\mathcal{C}$ et Ker v un sous-objet de M) et a pour conoyau dans $\mathcal{C}$ l'épimorphisme canonique $M \longrightarrow M/\overline{\operatorname{Ker} v} = M/\operatorname{Ker} v$ (car $\operatorname{Ker} v = v^{-1}(o)$ fermé dans M entraîne $\overline{\operatorname{Ker} v} = \operatorname{Ker} v$).
Comme v est un épimorphisme dans Mod_A, on a $N = \operatorname{Im} v$, et il résulte alors de l'isomorphisme canonique $M/\operatorname{Ker} v \longrightarrow \operatorname{Im} v$ que v est aussi conoyau de i dans $\mathcal{C}$ (diagramme ci-contre).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} v \arrow[r, "i"] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & M/\operatorname{Ker} v \arrow[r] \arrow[dl, "\text{iso canonique}"] & 0 \\
& & N & &
\end{tikzcd}$$

$7 \Longrightarrow 8$: Car toute catégorie conormale est balancée (Proposition duale de la proposition 14-3 page 17 de [2]).

$8 \Longrightarrow 1$: $\mathcal{C}$ étant balancée, pour tout objet M de $\mathcal{C}$ l'injection canonique $i : M \longrightarrow \hat{M}$ de M dans l'une de ses enveloppes injectives est un isomorphisme (puisque c'est à la fois un monomorphisme et un pseudo-épimorphisme de $\mathcal{C}$). Ainsi tout objet de $\mathcal{C}$ est injectif : $\mathcal{C}$ est égale à la sous-catégorie $\mathcal{L}$ de ses objets purs. Mais alors tout sous-A-module N du A-module $A/\alpha(o)$ est facteur direct de $A/\alpha(o)$ puisque, N étant injectif car objet de $\mathcal{C}$, la suite exacte dans Mod_A :
$0 \longrightarrow N \longrightarrow A/\alpha(o) \longrightarrow A/\alpha(o)/N \longrightarrow 0$ se décompose.
Ceci montre que $A/\alpha(o)$ est un A-module semi-simple.

<u>*Proposition 3-2*</u> *: Si la co-réflexion* $A/\alpha(o)$ *de* A *dans* C *est un anneau noethérien à gauche, alors la catégorie* L *des objets purs est une sous-catégorie co-complète de* Mod_A.

<u>**Démonstration**</u> :

Dire que L est une sous-catégorie co-complète de Mod_A signifie que le foncteur inclusion $L \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_A$ préserve les co-limites. En vertu de l'énoncé dual du Corollaire II-6-3 de [2] , il suffit pour cela qu'il préserve les conoyaux et les sommes directes. Or nous avons vu, juste avant la proposition II-3-5, que le conoyau d'un morphisme f de L est le même dans L et dans Mod_A. Soit maintenant $(Q_i)_{i\in I}$ une famille d'objets purs. Il résulte des propositions II-2-1 et II-3-5 que la somme directe dans L de cette famille est $\widehat{\bigoplus_{i\in I} Q_i}$, enveloppe injective de la somme directe dans Mod_A.
Mais d'après le Théorème 2-3, nous pouvons considérer les Q_i et $\widehat{\bigoplus_{i\in I} Q_i}$ comme des objets purs de $\mathrm{Mod}_{A/\alpha(o)}$, donc en particulier comme des $A/\alpha(o)$-modules injectifs. Comme l'anneau $A/\alpha(o)$ est noéthérien à gauche, il en résulte que $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ est un $A/\alpha(o)$-module injectif essentiel dans $\widehat{\bigoplus_{i\in I} Q_i}$ (car l'essentialité se conserve en passant de C dans D et réciproquement), ce qui entraîne $\bigoplus_{i\in I} Q_i = \widehat{\bigoplus_{i\in I} Q_i}$, et achève la démonstration.

Enfin, il est bien connu que, l'anneau $A/\alpha(o)$ étant non-singulier, sa multiplication peut être prolongée à $\widehat{A/\alpha(o)}$ en posant pour tout $x, y \in \widehat{A/\alpha(o)}$: $x\, y = \hat{\phi}_y(x)$,

$$\begin{tikzcd} A/\alpha(o) \arrow[r, "\phi_y"] \arrow[d] & \widehat{A/\alpha(o)} \arrow[d] \\ \widehat{A/\alpha(o)} \arrow[r, "\hat{\phi}_y"] & \widehat{A/\alpha(o)} \end{tikzcd}$$

où $\phi_y : A/\alpha(o) \longrightarrow \widehat{A/\alpha(o)}$ est la translation $\phi_y(\dot{a}) = \dot{a}y$ pour tout $\dot{a} \in A/\alpha(o)$.

Muni de cette multiplication $\widehat{A/\alpha(o)}$ est alors un anneau unitaire, régulier (au sens de Von Neumann), auto-injectif, et $A/\alpha(o)$ est un sous-anneau de $\widehat{A/\alpha(o)}$. Il est alors immédiat que tout $\widehat{A/\alpha(o)}$-module est un $A/\alpha(o)$-module par restriction de la loi externe à $A/\alpha(o)$.

Réciproquement soit Q un objet pur. En vertu du Théorème 2-3, on peut le considérer comme un $A/\alpha(o)$-module injectif non singulier. On peut alors le munir d'une structure

$$\begin{tikzcd} A/\alpha(o) \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ \widehat{A/\alpha(o)} \arrow[r, "\widehat{\psi}_x"] & Q \end{tikzcd}$$

de $\widehat{A/\alpha(o)}$-module en posant pour tout $\xi \in \widehat{A/\alpha(o)}$ et tout $x \in Q$ $\xi x = \widehat{\psi}_x(\xi)$ où $\psi_x : A/\alpha(o) \longrightarrow Q$ est le $A/\alpha(o)$-homomorphisme $\psi_x(\dot{a}) = \dot{a}x$ pour tout $\dot{a} \in A/\alpha(o)$. On vérifie alors facilement que l'on établit ainsi un isomorphisme entre la catégorie des objets purs de $Mod_{\widehat{A/\alpha(o)}}$ et la catégorie des objets purs de $Mod_{A/\alpha(o)}$, d'où il résulte que la catégorie L des objets purs de Mod_A est isomorphe à la catégorie des objets purs de $Mod_{\widehat{A/\alpha(o)}}$.

Enfin, pour clore ce paragraphe, signalons qu'il est maintenant immédiat de vérifier que $A/\alpha(o)$ (resp. $\widehat{A/\alpha(o)}$) est un générateur de la catégorie C (resp. L), d'où il résulte que le produit $\prod_I \widehat{A/\alpha(o)}/I$ étendu à tous les idéaux facteurs directs de $\widehat{A/\alpha(o)}$ est un cogénérateur de L. En effet les sous-objets de $\widehat{A/\alpha(o)}$ dans L sont ses idéaux fermés donc injectifs et par suite facteurs directs, ce qui entraîne que les $\widehat{A/\alpha(o)}/I$ sont injectifs, ainsi que leur produit, et il suffit alors d'appliquer la proposition III-3-3 de [2].

IV. CARACTERISATION DES OBJETS PROJECTIFS DE C.

Appliquant le théorème 2-3, nous supposerons désormais, sauf mention expresse du contraire, que l'anneau A est non-singulier, ce qui nous permettra d'utiliser la proposition 1-2 qui va se révéler fort utile. Rappelons tout d'abord quelques définitions et propriétés relatives aux modules semi-simples :

- Un A-module à gauche S est dit simple s'il est non nul et si ses seuls sous-modules sont 0 et S.
- Un A-module à gauche M est dit semi-simple s'il est somme directe de modules simples, exemple : 0. Pour cette raison, nous noterons toujours un module semi-simple sous la forme $\underset{i\in I}{\oplus} S_i$, sous-entendant la simplicité des modules S_i.
- Pour qu'un module soit semi-simple, il faut et il suffit que tout sous-module en soit facteur direct (on trouvera la démonstration en [1] , Ch. I).

Cette caractérisation permet de démontrer très facilement le lemme suivant qui est bien connu et qui nous servira par la suite.

Lemme 4-1 :

(i) Un module est semi-simple si et seulement si il n'est extension essentielle d'aucun sous-module propre.

(ii) Tout sous-module d'un module semi-simple est semi-simple.

(iii) Tout module quotient d'un module semi-simple est semi-simple.

Démonstration :

(i) Si M est semi-simple, ses sous-modules propres étant facteurs directs ne peuvent être essentiels dans M. Réciproquement, soit N un sous-module de M, et N' un complément de N dans M (c'est-à-dire maximal parmi les sous-modules P de M tels que $N \cap P = 0$). Alors $N \oplus N'$ est essentiel dans M, ce qui, d'après l'hypothèse, entraîne que $N \oplus N' = M$ et montre que tout sous-module de M en est facteur direct.

(ii) Soit N un sous-module d'un module semi-simple M, et N' un sous-module de N. M étant semi-simple, il existe un sous-module N" de M tel que $N' \oplus N'' = M$. Mais alors $N' \leqslant N$ entraîne $N' + (N'' \cap N) = (N' + N'') \cap N = M \cap N = N$, ce qui montre que N' est facteur direct de N.

(iii) Soit M/N un quotient d'un module semi-simple M. Il existe donc un sous-module N' de M tel que $N \oplus N' = M$. Mais alors M/N est isomorphe à N' qui est semi-simple en vertu du (ii).

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la

<u>*Proposition 4-2*</u> : *A étant un anneau non-singulier, les objets projectifs de la mono-sous-catégorie* $\mathcal{C}$ *sont les A-modules semi-simples et projectifs.*

<u>Démonstration</u> :

Elle se fera en trois points,

- <u>1er point</u> : Tout objet projectif de $\mathcal{C}$ est un A-module semi-simple. En effet, soit

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "1_p"] \\ N \arrow[r, "i"] & P \end{tikzcd}$$

P un objet projectif de $\mathcal{C}$, et N un sous-module de P essentiel dans P. Alors l'injection canonique $i : N \longrightarrow P$ est un pseudo-épimorphisme. Comme P est un objet projectif de $\mathcal{C}$, il existe un homomorphisme $f : P \longrightarrow N$ tel que $1p = i.f$ (diagramme ci-contre). On a ainsi pour tout élément $x \in P$: $x = 1p(x) = i(f(x)) \in \operatorname{Im} i = N$, ce qui montre que $P = N$, c'est-à-dire que P n'est extension essentielle d'aucun sous-module propre, d'où le résultat en vertu du (i) du lemme 4-1.

- <u>2ème point</u> : Tout objet projectif de $\mathcal{C}$ est un A-module projectif. En effet, P

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "1_p"] & \\ L \arrow[r, "\phi"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est quotient dans Mod_A d'un module libre L. Soit $\phi : L \longrightarrow P$ l'épimorphisme canonique ; c'est en particulier un pseudo-épimorphisme. Or, en vertu de la proposition 1-2, L est un objet de $\mathcal{C}$, de sorte que le diagramme ci-contre est dans $\mathcal{C}$. Mais alors, comme P est un objet projectif de $\mathcal{C}$, il existe un homomorphisme $g : P \longrightarrow L$ tel que $\phi.g = 1p$. On vérifie alors facilement que g est un monomorphisme et que $L = \operatorname{Ker}\phi \oplus \operatorname{Im} g$, ce qui montre que P, isomorphe à un facteur direct d'un A-module libre, est un A-module projectif.

- <u>3ème point</u> : Tout A-module semi-simple et projectif est un objet projectif de $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
M'' \arrow[r, "v"] & M
\end{tikzcd}$$

En effet, soit P un module semi-simple et projectif. D'après le proposition 1-2, nous savons déjà que P est un objet de $\mathcal{C}$. Considérons alors le diagramme ci-contre dans $\mathcal{C}$ où v est un pseudo-épimorphisme. Nous voulons montrer qu'il existe un homomorphisme $h : P \longrightarrow M''$ tel que $v.h = f$.

Montrons tout d'abord que nous avons $\mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{Im}\, v$. En effet, la relation d'essentialité étant compatible avec l'intersection dans le treillis des sous-modules de M, $\mathrm{Im}\, v \trianglelefteq M$ et $\mathrm{Im}\, f \trianglelefteq \mathrm{Im}\, f$ entraînent $\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Im}\, f \trianglelefteq M \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

Mais alors, P étant semi-simple, Im f est aussi semi-simple en vertu du (iii) du lemme 4-1, ce qui, d'après le (i) du même lemme, entraîne $\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{Im}\, v$.

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[ddll, dashed, "h"'] \arrow[d, "f'"] \\
& & \mathrm{Im}\, f \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "i"] \\
M'' \arrow[r, "v'"] & \mathrm{Im}\, v \arrow[r, "j"] & M
\end{tikzcd}$$

Factorisant alors f et v au moyen de leurs images respectives, et tenant compte de l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{Im}\, v$, nous obtenons le diagramme ci-contre avec : $f = i.f'$, $v = j.v'$, $i = j.u$; i, j, u, inclusions canoniques. Mais v' étant un épimorphisme et P un A-module projectif, il existe un homomorphisme $h : P \longrightarrow M''$ tel que $v'.h = u.f'$, et l'on a alors : $v.h = (j.v').h = j.(v'.h) = j.(u.f') = (j.u).f' = i.f' = f$, ce qui achève la démonstration.

Il en résulte immédiatement que tout sous-module et tout module quotient (dans Mod_A) d'un objet projectif de $\mathcal{C}$ est encore un objet projectif de $\mathcal{C}$.

Supposons pour un instant que l'anneau A est quelconque. Alors les objets projectifs de $\mathcal{C}$ sont les $A/\alpha(o)$-modules semi-simples et projectifs. Mais il est immédiat qu'un objet de $\mathcal{C}$ est semi-simple en tant que A-module si et seulement si il l'est en tant que $A/\alpha(o)$-module. En effet, si M est un objet de $\mathcal{C}$ la loi qui fait de M un $A/\alpha(o)$-module étant définie par $\dot{a}x = ax$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$, on voit ainsi qu'une partie X de M est un sous-A-module de M si et seulement si c'est un sous-A/α(o)-module de M. Par suite les objets projectifs de C sont les A-modules semi-simples non singuliers qui sont projectifs en tant que A/α(o)-modules.

Nous obtenons ainsi la :

<u>*Proposition 4-3*</u> *: Soit A un anneau unitaire quelconque. Alors*

(i) Les objets projectifs de C sont les co-réflexions dans C des A-modules semi-simples qui sont projectives en tant que A/α(o)-modules.

(ii) Si P est un A-module semi-simple et projectif, alors sa co-réflexion dans C est un objet projectif de C.

<u>Démonstration</u> :

(i) Si P est un objet projectif de C il est co-réflexion d'un A-module semi-simple : lui-même, et il est projectif en tant que A/α(o)-module. Réciproquement, si P est co-réflexion d'un A-module semi-simple, il est aussi semi-simple en tant que A-module puisque la co-réflexion est un épimorphisme, et par suite il est semi-simple en tant que A/α(o)-module. Si de plus il est A/α(o)-projectif, alors c'est un objet projectif de C.

(ii) Soit P un A-module semi-simple et projectif, R(P) sa co-réflexion dans C, et ρ : P $\longrightarrow$ R(P) l'épimorphisme canonique. R(P) est un objet de C, et nous pouvons reprendre mot-à-mot le reste de la démonstration du 3e point de la Proposition 4-2 en remplaçant partout P par R(P) jusqu'à l'obtention du diagramme ci-contre dans lequel nous avons rajouté le morphisme ρ : P $\longrightarrow$ R(P). Comme P est un A-module projectif, il existe donc un homomorphisme g : P $\longrightarrow$ M'' tel que v'.g = u.f'.ρ. Mais par définition de la co-réflexion il existe alors un homomorphisme h : R(P) $\longrightarrow$ M'' tel que h.ρ = g.

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "\rho"] \arrow[dddll, dashed, "g"'] \\
 & & R(P) \arrow[d, "f'"] \arrow[ddll, dashed, "h"'] \\
 & & \mathrm{Im}\, f \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "u"'] \\
M'' \arrow[r, "v'"] & \mathrm{Im}\, v \arrow[r, "j"] & M
\end{tikzcd}$$

Il vient alors : $(v.h).\rho = v.(h.\rho) = v.g = j.v'.g = j.u.f'.\rho = i.f'.\rho = f.\rho$,

d'où $v.h = f$ puisque ρ est un épimorphisme, ce qui établit le résultat.

Revenons maintenant au cas où A est un anneau non-singulier. La conjonction "semi-simple et projectif" est extrêmement forte, aussi allons-nous voir que l'existence d'objets projectifs de C non nuls impose une certaine structure à l'anneau A. Nous avons la

Proposition 4-4 :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P *est un objet projectif de* C.

(ii) P *est isomorphe à une somme directe d'idéaux à gauche simples et facteurs directs de l'anneau* A.

Démonstration :

(i)$\Longrightarrow$(ii) : D'après la proposition 4-2, P est semi-simple et projectif en tant que A-module. Ecrivons-le donc sous la forme $P = \bigoplus_{i \in I} S_i$ où les S_i sont des A-modules simples. De plus, les S_i sont projectifs puisque facteurs directs du projectif P. Comme ils sont non nuls, soit x_i un élément de $S_i - \{0\}$: S_i étant simple, l'application $A \longrightarrow S_i$ définie par $a \longrightarrow ax_i$ pour tout $a \in A$ est un épimorphisme dont le noyau est un idéal K_i de A. Nous avons ainsi pour tout $i \in I$ une suite exacte dans Mod_A : $0 \longrightarrow K_i \longrightarrow A \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$. Comme S_i est projectif cette suite se décompose, ce qui signifie qu'il existe un idéal J_i de A isomorphe à S_i et tel que $A = K_i \oplus J_i$. Ainsi J_i est un idéal simple et facteur direct de A, et l'on a $P \simeq \bigoplus_{i \in I} J_i$ en vertu des propriétés de la somme directe.

(ii)$\Longrightarrow$(i) : Si P est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i \in I} J_i$ où les J_i sont des idéaux simples et facteurs directs de A, alors P est un A-module semi-simple. D'autre part les J_i étant facteurs directs du module projectif A sont projectifs, et leur somme directe aussi, ce qui fait que P est un A-module semi-simple et projectif, c'est-à-dire un objet projectif de C.

Notons l'application suivante au cas commutatif :

Corollaire 4-5 :

La catégorie des A-modules sans torsion sur un domaine d'intégrité qui n'est pas un corps ne possède pas d'objet projectif non nul.

Démonstration : Le sous-module de torsion d'un module M est défini par $T(M) = \{ x \in M \ ; \ 0 : x \neq 0 \}$.

Montrons que $T(M) = M^{\Delta}$, de sorte que la catégorie des modules sans torsion ne sera autre que la mono-sous-catégorie C. On a évidemment $M^{\Delta} \leqslant T(M)$ puisque $0 : x \vartriangleleft A$ entraîne $0 : x \neq 0$. Réciproquement si $0 : x \neq 0$ soit $a \in A^{*}$ tel que $ax = 0$; alors pour tout $b \in A^{*}$ on a à la fois $ab \neq 0$ à cause de l'intégrité et $abx = bax = 0$ à cause de la commutativité, ce qui montre que $0 : x \vartriangleleft A$, c'est-à-dire $T(M) \leqslant M^{\Delta}$. Il ne nous reste donc plus, en vertu de la Proposition 4-4, qu'à montrer que A ne possède pas de facteurs directs simples. Or 0 n'est pas simple puisqu'il est nul, et A n'est pas simple car sinon ce serait un corps, ce que nous excluons ici. Enfin si I est un idéal distinct de 0 et de A, à cause de l'intégrité et de la commutativité, il intersecte tout idéal non nul et par suite n'est pas facteur direct de A.

Application : La catégorie des groupes abéliens sans torsion ne possède pas d'objet projectif non nul.

- Indiquons au passage ce qui se passelorsque A est un corps (non nécessairement commutatif). Alors Mod_A est la catégorie des espaces vectoriels à gauche sur C. Or un espace vectoriel à gauche sur un corps A est à la fois non-singulier semi-simple, projectif et injectif, de telle sorte que l'on a alors $Mod_A = C = L$.
- La question se pose alors immédiatement de savoir si la catégorie C possède suffisamment de projectifs, c'est-à-dire de savoir si tout objet de C est quotient dans C d'un objet projectif de C. Pour y répondre, nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 4-6 :

A étant un anneau non-singulier, pour un objet M de C les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est quotient dans C d'un objet projectif de C.

(ii) M est extension essentielle d'un objet projectif de C.

(iii) Le socle de M (c'est-à-dire la somme des sous-modules simples de M) est projectif en tant que A-module et essentiel dans M.

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Si M est quotient dans C d'un objet projectif de C $P = \bigoplus_{i \in I} S_i$, il existe un pseudo-épimorphisme $f : P \longrightarrow M$, et Im f est essentiel dans M. Or, si l'on se reporte à la démonstration du lemme 4-1 - (iii), on s'aperçoit que Im f est isomorphe à un facteur direct du module semi-simple et projectif $P = \bigoplus_{i \in I} S_i$, et par suite est lui-même semi-simple et projectif, donc objet projectif de C.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Soit $P = \bigoplus_{i \in I} S_i$ l'objet projectif de C essentiel dans M. P, étant une somme directe des sous-modules simples S_i de M, est évidemment contenu dans le socle de M ; mais d'autre part, si S est un sous-module simple de M, on a $S \cap P \neq 0$ puisque S est non nul et que P est essentiel dans M, d'où $S \cap P = S$ puisque S est simple, soit finalement $S \subset P$, ce qui montre que P est le socle de M.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Le socle de M étant semi-simple, s'il est projectif en tant que A-module, c'est un objet projectif de C ; si de plus il est essentiel dans M, alors l'injection canonique de ce socle dans M est un pseudo-épimorphisme, ce qui établit le résultat.

Démontrons maintenant le :

Cet ouvrage est la propriété du Service de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon

Théorème 4-7 : L'anneau A étant non-singulier, la catégorie C possède suffisamment d'objets projectifs si et seulement si A est extension essentielle d'un idéal semi-simple et projectif.

<u>Démonstration</u> : La nécessité résulte immédiatement de la proposition 4-6 et de la caractérisation des objets projectifs de $\mathcal{C}$.

Montrons maintenant la suffisance, et pour cela, soit I un idéal de A semi-simple projectif et essentiel dans A. Nous allons tout d'abord établir que tout A-module libre L, qui est un objet de $\mathcal{C}$ en vertu de la Proposition 1-2, est extension essentielle d'un objet projectif de $\mathcal{C}$. En effet, soit $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une base de L. Alors pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ le sous-module Ax_α de L est isomorphe à A. Notons I_α l'image de I par cet isomorphisme. I_α est donc un sous-module de L semi-simple, projectif et essentiel dans Ax_α. De plus, comme $L = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} Ax_\alpha$, la somme des I_α est directe, ce qui entraîne que $P = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha$ est un module semi-simple et projectif, c'est-à-dire un objet projectif de $\mathcal{C}$. Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que P est essentiel dans L, c'est-à-dire que pour tout $x \in L^*$ il existe $a \in A$ tel que $ax \in P^*$. Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre n des composantes non nulles de x relativement à la base $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

<u>Si n = 1</u> : on a $x = ax_\alpha$ pour un $\alpha\in\mathcal{A}$, et un $a \in A$ convenables, d'où, puisque I_α est essentiel dans Ax_α, l'existence d'un élément $b \in A$ tel que $bx \in I_\alpha^* \leqslant P^*$.

Soit donc <u>$n \geqslant 2$</u> et supposons le résultat établi jusqu'à l'ordre n-1.

Soit $x = a_1x_{\alpha_1} + \dots + a_{n-1}x_{\alpha_{n-1}} + a_n x_{\alpha_n}$ avec $a_k \neq 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, ou encore $x = y + a_nx_{\alpha_n}$ en posant :

$y = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_{\alpha_k}$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence il existe $b \in A$ tel que $by \in P^*$. Si $ba_n x_{\alpha_n} \in I_{\alpha_n}$ c'est terminé puisque $by \neq 0$ entraîne $bx \neq 0$. Sinon, comme I_{α_n} est essentiel dans Ax_{α_n}, il existe $c \in A$ tel que $cba_n x_{\alpha_n} \in I_{\alpha_n}$, ce qui montre que $cbx = cby + cba_n x_{\alpha_n} \in P^*$ (car la composante de cbx relativement à x_{α_n} est non nulle). établissant ainsi l'essentialité de P dans L.

Montrons enfin que tout objet M de $\mathcal{C}$ est extension essentielle d'un objet projectif de $\mathcal{C}$, ce qui établira le résultat en vertu de la Proposition 4-6.

M étant quotient d'un libre dans Mod_A , il existe un A-module libre L et un épimorphisme $f : L \longrightarrow M$. Mais d'après la Proposition 1-2 L est un objet de $\mathcal{C}$, de sorte que f est un morphisme de $\mathcal{C}$. Soit donc $P = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{B}} I_\alpha$ l'objet projectif de $\mathcal{C}$ essentiel dans L dont nous venons d'établir l'existence. Reprenant la démonstration du lemme 4-1 (iii), nous voyons que f(P) est isomorphe à un facteur direct de P, donc que f(P) est semi-simple et projectif, c'est-à-dire un objet projectif de $\mathcal{C}$. Or f(P) est essentiel dans M. En effet, soit $x \in M^*$, f étant surjective, il existe $y \in L^*$ tel que $x = f(y)$; comme P est essentiel dans L, il existe en vertu du lemme 1-3-5 un élément $a \in A$ tel que $ax \neq 0$ et $ay \in P$; mais alors on a $ax = af(y) =$ $= f(ay) \in f(P)$, soit finalement $ax \in f(P)^*$ puisque $ax \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

- Une question se pose alors immédiatement : existe-t-il des anneaux non-singuliers A qui sont extension essentielle d'un idéal semi-simple et projectif ? La réponse est instantanée : oui, par exemple les anneaux semi-simples. Nous avons vu en effet en démontrant la proposition 3-1 que tout anneau semi-simple est non-singulier ; d'autre part, il est évidemment projectif et essentiel dans lui-même.

- Une seconde question se pose alors : en existe-t-il d'autres que les semi-simples ? La réponse, là encore affirmative, est cependant beaucoup moins évidente que la précédente. Nous allons l'établir maintenant :

<u>Exemple d'un anneau non-semi-simple A tel que la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'objets projectifs</u> :

Soit K un corps (non nécessairement commutatif) et K^N l'ensemble des familles $(x_n)_{n \in N}$ d'éléments de K indexées par l'ensemble N des entiers naturels. K^N, muni des lois de composition $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ et $(x_n)_n (y_n)_n = (x_n y_n)_n$ est un anneau unitaire que nous désignerons par A.

- <u>1er point</u> : A est un anneau régulier au sens de Von Neumann. En effet, 0 peut s'écrire $0 = 000$, et si $x = (x_n)_n \in A - \{0\}$, alors l'ensemble $H = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ x_n \neq 0\}$ est non vide, et l'élément $y = (y_n)_n \in A$ défini par $y_n = x_n^{-1}$ si $n \in H$ et $y_n = 0$ si $n \notin H$ est tel que $x = xyx$.

Or il est bien connu que tout anneau régulier au sens de Von Neumann est non-singulier. (En effet si $x = xyx$, $xy = e$ est un idempotent tel que $0 : x = 0 : e$, et comme $A = Ae \oplus A(1-e)$ on a $0 : x = A(1-e)$; par conséquent $0 : x \vartriangleleft A$ entraîne $Ae = 0$, d'où $e = 0$ et par suite $x = ex = 0$).

- <u>2ème point</u> : Pour tout $m \in \mathbb{N}$ considérons l'élément $e_m = (\delta_{mn})_n \in A$ où $\delta_{mm} = 1$ et $\delta_{mn} = 0$ si $n \neq m$. Alors Ae_m est un idéal simple de A.

En effet, soit I un idéal de A tel que $0 < I \leqslant Ae_m$ et $x = ae_m = (a_n \delta_{mn})_n$ un élément non nul de I, ce qui entraîne $a_m \neq 0$. Soit alors $b = (a_m^{-1} \delta_{mn})_n \in A$. On a ainsi $e_m = (\delta_{mn})_n = (a_m^{-1} \delta_{mn} a_n \delta_{mn})_n = (a_m^{-1} \delta_{mn})_n (a_n \delta_{mn})_n = bx \in I$, ce qui montre que $Ae_m = I$.

- <u>3ème point</u> : L'idéal $I = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} Ae_m$ est un idéal semi-simple de A essentiel dans A.

En effet, I est semi-simple puisque somme directe d'idéaux simples. Soit alors $x = (x_n)_n \in A^*$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \neq 0$. Alors l'élément $y = (x_m^{-1} \delta_{mn})_n$ de A est tel que $yx = e_m \in I^*$, ce qui montre que I est essentiel dans A.

- <u>4ème point</u> : I est un idéal projectif de A

Toute somme directe de projectifs étant projective, il suffit de montrer que chaque idéal Ae_m est projectif, et ceci résulte immédiatement de ce que Ae_m est facteur direct de A. (En effet, on a $A = Ae_m \oplus A(1-e_m)$).

- 5ème point : A n'est pas semi-simple.

Supposons le contraire. Un anneau semi-simple n'ayant pas d'idéal propre essentiel (lemme 4-1), on doit donc avoir $I = A$, ce qui est absurde puisque $1 \notin I$. (En effet les éléments de $I = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} Ae_m$ sont les éléments $(x_n)_n$ de A tels que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, alors que l'élément unité 1 de A est l'élément $(x_n)_n$ de A tel que $x_n = 1 \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Remarque . Revenons au cas général d'un anneau unitaire quelconque A. Nous voyons ainsi que la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment de projectifs si et seulement si le socle de l'anneau quotient $A/\alpha(o)$ est projectif en tant que $A/\alpha(o)$-module et essentiel dans $A/\alpha(o)$.

Compléments :

J. Ravel ayant montré que l'essentialité du socle d'un anneau non-singulier entraîne sa projectivité, il convient d'énoncer le théorème 4-7 de la façon suivante :

"L'anneau A étant non-singulier, la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'objets projectifs si et seulement si A est extension essentielle de son socle".

CHAPITRE IV : RESULTATS COMPLEMENTAIRES - ELEMENTS D'HOMOLOGIE DANS $\mathcal{C}$.

I. RESULTATS COMPLEMENTAIRES

Proposition 1-1 : (Pseudo-lemme-des-cinq) :

Soit dans C *le diagramme commutatif ci-dessous dans lequel les lignes horizontales sont pseudo-exactes :*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"] & N \arrow[r, "k"] \arrow[d, "s"] & P \arrow[d, "t"] \\
K' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & M' \arrow[r, "h'"] & N' \arrow[r, "k'"] & P'
\end{tikzcd}$$

a) si q *et* s *sont des monomorphismes et si* p *est un pseudo-épimorphisme, alors* r *est un monomorphisme.*

b) Si q *et* s *sont des pseudo-épimorphismes et si* t *est un monomorphisme, alors* r *est un pseudo-épimorphisme.*

Démonstration :

Elle s'effectue à l'aide d'applications répétées du lemme 3-5 du Chapitre I que nous utiliserons donc sans y référer explicitement.

a) Soit $x \in M^*$ tel que $r(x) = 0$. On a $s.h(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}\, h$ puisque s est un monomorphisme. Comme $\mathrm{Im}\, g \vartriangle \mathrm{Ker}\, h$ et $x \neq 0$, il existe $a \in A$ tel que $ax \in \mathrm{Im}\, g$ et $ax \neq 0$, d'où $ax = g(y)$ pour un $y \in L$ convenable. Il vient alors $g'.q(y) = r.g(y) = r(ax) = ar(x) = 0$; d'où $q(y) \in \mathrm{Ker}\, g'$, et puisque $\mathrm{Im}\, f' \vartriangle \mathrm{Ker}\, g'$ l'existence d'un $b \in A$ tel que $bax \neq 0$ et $bq(y) = f'(z')$ pour un $z' \in K'$ convenable. Mais comme $\mathrm{Im}\, p \vartriangle K'$ il existe $c \in A$ tel que $cgax \neq 0$ et $cz' \in \mathrm{Im}\, p$, soit $cz' = p(z)$ pour un $z \in K$ convenable ; ceci entraîne $q.f(z) = f'.p(z) = f'(cz') = cf'(z') = cbq(y) = q(cby)$, d'où $f(z) = cby$ puisque q est un monomorphisme, et $cbax = cbg(y) = g(cby) = g.f(z) = 0$, contredisant $cbax \neq 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, r = 0$, ce qui montre que r est un monomorphisme.

b) Soit $x' \in M' - \{0\}$. Comme $\mathrm{Im}\, s \vartriangleleft N'$, il existe $a \in A$ et $y \in N$ tels que $ax' \neq 0$ et $ah'(x') = s(y)$. Il vient alors $t.k(y) = k'.s(y) = k'.h'(ax') = 0$ d'où $k(y) = 0$ puisque t est un monomorphisme. Comme $\mathrm{Im}\, h \vartriangleleft \mathrm{Ker}\, k$ il existe $b \in A$ tel que $bax' \neq 0$ et $by = h(x)$ pour un $x \in M$ convenable. Ceci entraîne $h'(bax' - r(x)) = bah'(x') - h'.r(x) = bs(y) - s.h(x) = bs(y) - s(by) = 0$, d'où l'existence, puisque $\mathrm{Im}\, g' \vartriangleleft \mathrm{Ker}\, h'$, de $c \in A$ tel que $cbax' \neq 0$ et $c(bax' - r(x)) = g'(z')$ pour un $z' \in L'$ convenable ; mais comme $\mathrm{Im}\, q \vartriangleleft L'$ il existe $d \in A$ tel que $dcbax' \neq 0$ et $dz' = q(z)$ pour un $z \in L$ convenable. Il vient alors $dcbax' = dcr(x) + dg'(z') = r(dcx) + g'(dz') = r(dcx) + g'.q(z) = r(dcx) + r.g(z) = r(dcx + g(z))$, ce qui montre que $dcbax' \in (\mathrm{Im}\, r)^*$, établissant ainsi le fait que $\mathrm{Im}\, r$ est essentiel dans M', c'est-à-dire que r est un pseudo-épimorphisme.

Etudions maintenant la possibilité de construire une homologie dans $\mathcal{C}$. Nous aurons besoin pour cela du résultat suivant concernant la fermeture commutative de diagrammes dans $\mathcal{C}$:

<u>Lemme 1-2</u> : *Soit dans* $\mathcal{C}$ *le diagramme ci-dessous dans lequel les lignes horizontales sont pseudo-exactes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[r, "p'"] & P' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1°) S'il existe un homomorphisme $\alpha : N \longrightarrow N'$ *tel que* $i'.\alpha = f.i$, *et si de plus* p *est surjectif, alors il existe un homomorphisme* $\phi : P \longrightarrow P'$ *tel que* $\phi \circ p = p'.f$. *Si* p *n'est pas surjectif on ne peut pas conclure.*

2°) S'il existe un homomorphisme $\phi : P \longrightarrow P'$ *tel que* $\phi \circ p = p'.f$, *et si* $i'(N')$ *est fermé dans* M', *alors il existe un homomorphisme* $\alpha : N \longrightarrow N'$ *tel que* $i' \circ \alpha = f.i$. *Si* $i'(N')$ *n'est pas fermé dans* M' *on ne peut pas conclure.*

<u>Démonstration</u> :

Identifions N à i(N) et N' à i'(N'). Comme Ker p = $p^{-1}(0)$ est fermé dans M en vertu du lemme 1-4-4, et que N est essentiel dans Ker p (pseudo-exactitude en M), on a par conséquent Ker p = $\bar{N} = \{x \in M \ ; \ N : x \vartriangleleft A\}$: plus grande extension essentielle de N dans M, et de même Ker p' = $\bar{N}'$. Le diagramme se décompose ainsi de la façon suivante dans Mod_A :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & \bar{N} = \mathrm{Ker}\, p & \xrightarrow{k} & M & \xrightarrow{v} & \mathrm{Im}\, p & \xrightarrow{u} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j'} & \bar{N}' = \mathrm{Ker}\, p' & \xrightarrow{k'} & M' & \xrightarrow{v'} & \mathrm{Im}\, p' & \xrightarrow{u'} & P' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec p = u.v, p' = u'∘v', i = k.j, i' = k'.j' où u, u', k, k', j, j' sont des injections canoniques et v, v' des surjections canoniques.

1°) S'il existe $\alpha : N \longrightarrow N'$ tel que f.i = i'.α , alors f applique $\bar{N}$ dans $\bar{N}'$.

En effet, comme $N : x \leqslant N' : f(x)$ pour tout $x \in M$ (car $ax \in N$ entraîne af(x) = f(ax) = f.i(ax) = i'.α(ax) = $\alpha(ax) \in N'$) il résulte de la convexité de la relation d'essentialité que $N : x \vartriangleleft A$ entraîne $N' : f(x) \vartriangleleft A$, c'est-à-dire $f(\bar{N}) \leqslant \bar{N}'$. On peut donc définir un homomorphisme $\beta : \bar{N} \longrightarrow \bar{N}'$ par β(x) = f(x) pour tout $x \in \bar{N}$, d'où f∘k = k'.β et β.j = j'.α . Mais alors, (résultat classique dans Mod_A), il existe $\psi : \mathrm{Im}\, p \longrightarrow \mathrm{Im}\, p'$ tel que ψ.v = v'∘f.

Si maintenant p est surjective, nous avons u = 1_P , et il nous suffit de prendre ϕ = u'.ψ pour obtenir le résultat cherché.

Si p n'est pas surjective, on ne peut conclure, ainsi que le montre le contre-exemple suivant dans Mod_Z : comme le groupe abélien Q des nombres rationnels est extension essentielle de Z, les deux lignes sont pseudo-exacte (i étant l'injection canonique de Z dans Q et 1 l'application identique de Z sur lui-même). Or il n'existe pas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{i} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{1} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'homomorphisme $\phi : Q \longrightarrow Z$ fermant commutativement le diagramme, car sinon ϕ serait un épimorphisme et Z un groupe abélien divisible.

2°) Réciproquement, s'il existe $\phi : P \longrightarrow P'$ tel que $\phi.p = p'.f$, alors ϕ applique $\mathrm{Im}\, p$ dans $\mathrm{Im}\, p'$ (car $\phi.p(M) = p'.f(M) \subseteq P'(M')$), d'où l'existence d'un morphisme $\psi : \mathrm{Im}\, p \longrightarrow \mathrm{Im}\, p'$ tel que $\phi.u = u'.\psi$ et $\psi.v = v'.f$. Mais alors (résultat classique dans Mod_A), il existe un homomorphisme $\beta : \mathrm{Ker}\, p \longrightarrow \mathrm{Ker}\, p'$ tel que $f.k = k'.\beta$. Si maintenant N' est fermé dans M' on a $N' = \overline{N'} = \mathrm{Ker}\, p'$, d'où $j' = 1_{N'}$, et il nous suffit de poser $\alpha = \beta.j$ pour obtenir le morphisme cherché. Par contre, si N' n'est pas fermé dans M', on ne peut pas conclure, ainsi que le montre le contre-exemple suivant dans Mod_Z où 1 désigne cette fois l'application identique de Q sur lui-même : il n'existe pas d'homomorphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "1"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "i"] & Q \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\alpha : Q \longrightarrow Z$ fermant commutativement le diagramme, car sinon on aurait $Q = i.\alpha(Q) = \alpha(Q) \subseteq Z$.

A titre d'application, nous avons la :

Proposition 1-3 :

Soit dans C la suite pseudo-exacte :

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

M' et M" peuvent être plongés dans des suites de C:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{j'} Q' \xrightarrow{\phi'} P' \longrightarrow 0 \ , \ 0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{j''} Q'' \xrightarrow{\phi''} P'' \longrightarrow 0$$ *pseudo-exactes en Q' et en Q", exactes partout ailleurs, et où Q' et Q" sont des objets injectifs de C. Cela étant, il est possible de trouver un objet injectif Q de C, un objet P de C, et des homomorphismes tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif et que ses lignes et ses colonnes soient pseudo-exactes :*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"] \arrow[dl, dashed, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "j''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\phi'"] & Q \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\phi"] & Q'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> : La première partie de l'énoncé résulte de ce que tout objet M de $\mathcal{C}$ peut se plonger dans la suite $0 \longrightarrow M \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ qui est pseudo-exacte en $\hat{M}$, exacte partout ailleurs, et telle que $\hat{M}$ soit un objet injectif de $\mathcal{C}$($\hat{M}$ désignant une enveloppe injective de M). Considérons alors le diagramme ci-dessus dans lequel sont données la ligne du haut et les colonnes extrêmes. Comme Q' est injectif, il existe un homomorphisme $f : M \longrightarrow Q'$ tel que $f.i = j'$. Prenons $Q = Q' \oplus Q''$ avec les morphismes canoniques $Q' \underset{\pi'}{\overset{e'}{\rightleftarrows}} Q'$, $Q'' \underset{\pi''}{\overset{e''}{\rightleftarrows}} Q$ (la ligne du milieu est donc exacte) et posons $j = e'.f + e''.j''.p : M \longrightarrow Q$; il vient alors $j.i = e'.f.i = e'.j'$ et $\Pi''.j = 1_{Q''} \circ j''.p = j''.p$, d'où la commutativité des deux carrés du haut.

Le pseudo-lemme des cinq appliqué aux deux lignes du haut nous montre alors que j est un monomorphisme. Nous prenons ensuite $= \dfrac{\ }{\mathrm{Im} f}$, et pour $\phi : Q \longrightarrow P$ l'épimorphisme canonique, d'où la pseudo-exactitude de la colonne du milieu. D'autre part, comme ϕ' et ϕ sont surjectifs (le premier par hypothèse, le second par construction), le lemme 1-2 nous assure l'existence d'homomorphismes $\tau : P' \longrightarrow P$ et $\sigma : P \longrightarrow P''$ tels que $\tau.\phi' = \phi.e'$ et $\sigma.\phi = \phi''.\Pi''$, d'où la commutativité des deux carrés du bas et le fait que σ soit un épimorphisme. Montrons que τ est un monomorphisme ; soit $y' \in P'$ tel que $\tau(y') = 0$ et $y' \neq 0$. Comme ϕ' est surjective il existe $x' \in Q'$ tel que $y' = \phi'(x')$, d'où $\phi.e(x') = \tau.\phi'(x') = 0$.

Comme Im $j \trianglelefteq$ Ker ϕ, on peut en vertu du lemme 1-3-5 trouver un $a \in A$ tel que $ay' \neq 0$ et $ae'(x') = j(u)$ pour un $u \in M$ convenable. Il vient alors : $j''.p(u) = \Pi''.j(u) = \Pi''(ae'(x')) = ''.e'(ax') = 0$, d'où $p(u) = 0$ puisque j'' est un monomorphisme, et, puisque Im $i \trianglelefteq$ Ker p, l'existence d'un $b \in A$ tel que $aby' \neq 0$ et $bu = i(u')$ pour un $u' \in M'$ convenable. Mais ceci entraîne $e'.j'(u') = j.i(u') = j(bu) = bj(u) = bae'(x') = e'(bax')$, d'où $bax' = j'(u')$ puisque e' est un monomorphisme, soit finalement $bay' = ba\,\phi'(x') = \phi'(bax') = \phi'.j'(u') = 0$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, on a bien Ker $\tau = 0$. Montrons enfin que Im τ est essentiel dans Ker σ. On a déjà $\sigma.\tau.\ \phi' = \sigma.\phi.e' = \phi''.\pi''.e' = 0$, d'où $\sigma.\tau = 0$ (puisque ϕ' est un épimorphisme) c'est-à-dire Im $\tau \leq$ Kerσ . Soit maintenant $y \in (\mathrm{Ker}\ \sigma)^{*}$. Comme ϕ est surjective il existe $x \in Q$ tel que $y = \phi(x)$; mais alors on a $\phi''.\ \Pi''(x) = \sigma.\ \phi(x) = 0$, d'où, puisque Im $j'' \trianglelefteq$ Ker ϕ'', l'existence d'un $a \in A$ tel que $ay \neq 0$ et $a\ \pi''(x) = j''(u'')$ pour un $u'' \in M''$ convenable, et, comme Im $p \trianglelefteq M''$, l'existence d'un $b \in A$ tel que $bay \neq 0$ et $bu'' = p(u)$ pour un $u \in M$ convenable. Il vient alors : $\pi''(bax - j(u)) = ba\ \pi''(x) - \pi''.j(u) = bj''(u'') - j''.p(u) = bj''(u'') - j''(bu'') = 0$, d'où, puisque Ker π'' = Im e', l'existence d'un $x' \in Q'$ tel que $bax - j(u) = e'(x')$, soit finalement $bay = ba\ \phi(x) = \phi(bax) = \phi(e'(x') + j(u)) = \phi.e'(x') + \phi.j(u) = \tau.\phi'(x') \in (\mathrm{Im}\ \tau)^{*}$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : La construction précédente nous montre qu'en fait les colonnes verticales et la ligne du bas sont pseudo-exactes en leur milieu et exactes partout ailleurs alors que la ligne du milieu est exacte.

<u>Corollaire 1-4</u> : Soit dans C la suite pseudo-exacte :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Si $\widehat{M'}$ et $\widehat{M''}$ sont deux enveloppes injectives de M' et de M'', alors $\widehat{M'} \oplus \widehat{M''}$ est une enveloppe injective de M.

<u>Démonstration</u> : On effectue dans le diagramme de la proposition précédente les modifications suivantes : $Q' = \hat{M}'$, $Q'' = \hat{M}''$, $P' = P'' = 0$, j' et j'' étant les injections canoniques. Ceci entraîne $P = 0$ en vertu de la pseudo-exactitude de la ligne du bas, et montre que $\mathrm{Im}\, j$ est essentiel dans $\hat{M}' \oplus \hat{M}''$, ce qui établit le résultat.

Enfin, lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'objets projectifs, nous avons une propriété en quelque sorte duale de la précédente, à savoir :

<u>*Proposition 1-5*</u> *: Soit dans* C *la suite pseudo-exacte :*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Si C *possède suffisamment d'objets projectifs, alors* M' *et* M'' *peuvent être plongés dans des suites pseudo-exactes de* C *:*

$0 \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow N'' \longrightarrow P'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$,

où P' *et* P''*sont des objets projectifs de* C.

Cela étant, il est possible de trouver un objet projectif P *de* C, *un objet* N *de* C*, et des homomorphismes tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif et que ses lignes et ses colonnes soient pseudo-exactes :*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La démonstration, semblable à celle de la Proposition 1-3, est laissée au lecteur. On remarquera utilement que toute suite pseudo-exacte de C de la forme $0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ où P est un objet projectif de C est en fait exacte en N et en P (car les objets projectifs de C sont des modules semi-simples), ce qui permet d'appliquer le lemme 1-2.

II. ELEMENTS D'HOMOLOGIE DANS C.

On rappelle qu'une suite nulle à trois termes est une suite (M) : $M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o$ de A-modules et de A-homomorphismes telle que $\mathrm{Im}(M_2 \longrightarrow M_1) \leqslant \mathrm{Ker}(M_1 \longrightarrow M_o)$, et que la classe de ces suites peut être érigée en une catégorie additive en définissant une translation $f : (M) \longrightarrow (N)$ comme un triplet $f = (f_2, f_1, f_o)$ de A-homomorphismes $f_i : M_i \longrightarrow N_i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, tels que le diagramme ci-contre soit commutatif. On définit alors sur cette catégorie un foncteur additif covariant à valeurs dans Mod_A, et appelé foncteur d'homologie en faisant correspondre à la suite (M) le module quotient $\mathrm{Ker}(M_1 \longrightarrow M_o)/\mathrm{Im}(M_2 \longrightarrow M_1)$

$$\begin{array}{ccc} (M) & & \\ f \downarrow & & \\ (N) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} M_2 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_o \\ f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_o \downarrow \\ N_2 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_o \end{array}$$

et à la translation $f : (M) \longrightarrow (N)$ l'homomorphisme $\mathrm{Ker}(M_1 \longrightarrow M_o)/\mathrm{Im}(M_2 \longrightarrow M_1) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Ker}(N_1 \longrightarrow N_o)/\mathrm{Im}(N_2 \longrightarrow N_1)$ défini par $\tilde{f}(\dot{x}) = \overline{f_1(x)}$ où $\hat{x}$ représente la classe de x modulo $\mathrm{Im}(M_2 \longrightarrow M_1)$ et $\overline{f_1(x)}$ représente la classe de $f_1(x)$ modulo $\mathrm{Im}(N_2 \longrightarrow N_1)$. (Voir [14] Ch.4).

D'autre part, on vérifie facilement que le coréflecteur R de Mod_A dans C est un foncteur additif, et que de plus, si A est un anneau commutatif, alors R est A-linéaire en ce sens que $R(af) = aR(f)$ pour tout $a \in A$ et tout homomorphisme $f : M \longrightarrow N$ de A-modules.

Ceci nous permet de donner la :

<u>Définition 2-1</u> : On appelle "<u>foncteur de pseudo-homologie</u>", ou encore foncteur d'homologie dans C, le composé du coréflecteur de Mod_A *dans C avec la restriction du foncteur d'homologie dans* Mod_A *à la sous-catégorie pleine dont la classe des objets est constituée par les suites nulles à trois termes de C.*

Ainsi, ce foncteur fait correspondre à toute suite nulle à trois termes de $\mathcal{C}$ $(M) : M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o$ l'objet de $\mathcal{C}$ $H(M) = \mathrm{Ker}(M_1 \to M_o) / \overline{\mathrm{Im}(M_2 \to M_1)}$ que l'on appellera : module de pseudo-homologie de M, et à la translation $f : (M) \longrightarrow (N)$ le A-homomorphisme $H(f) : H(M) \longrightarrow H(N)$ défini par $H(f)(\dot{x}) = \overline{f_1(x)}$ (où $\dot{x}$ désigne cette fois la classe de $x \in \mathrm{Ker}(M_1 \to M_o)$ modulo $\overline{\mathrm{Im}(M_2 \to M_1)}$, et $\overline{f_1(x)}$ désigne la classe de $f_1(x)$ modulo $\overline{\mathrm{Im}(N_2 \to N_1)}$).

Il est immédiat que H est un foncteur covariant, additif, et que, si A est commutatif, il est A-linéaire.

Notons enfin qu'une suite nulle à trois termes (M) de $\mathcal{C}$ est pseudo-exacte si et seulement si son module de pseudo-homologie H(M) est nul.

Dans la proposition suivante, (M), (N), (P) désignent respectivement les suites nulles à trois termes de $\mathcal{C}$: $M_2 \to M_1 \to M_o$, $N_2 \to N_1 \to N_o$, $P_2 \to P_1 \to P_o$.

Proposition 2-2 :

> *Si les translations* $(M) \xrightarrow{f} (N) \xrightarrow{g} (P)$ *sont telles que :*
>
> *(i)* $N_2 \xrightarrow{g_2} P_2$ *est un pseudo-épimorphisme,*
>
> *(ii)* $M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_1} P_1$ *est une suite pseudo-exacte,*
>
> *(iii)* $M_o \xrightarrow{f_o} N_o$ *est un monomorphisme,*
>
> *alors la suite* $H(M) \xrightarrow{H(f)} H(N) \xrightarrow{H(g)} H(P)$ *est pseudo-exacte. En particulier cette dernière suite sera pseudo-exacte si la suite de translations* $0 \to (M) \xrightarrow{f} (N) \xrightarrow{g} (P) \to 0$ *est pseudo-exacte.*

Démonstration : Nous sommes en présence du diagramme commutatif ci-dessous à gauche, lequel donne naissance au diagramme commutatif de droite dans lequel i, i', i" sont les injections canoniques, p, p', p" les épimorphismes canoniques, et où nous continuons à désigner par f_1 et g_1 les restrictions de ces morphismes à $\mathrm{Ker}(M_1 \to M_o)$ et $\mathrm{Ker}(N_1 \to N_o)$ ainsi qu'à $\overline{\mathrm{Im}(M_2 \to M_1)}$ et à $\overline{\mathrm{Im}(N_2 \to N_1)}$.

$$\begin{array}{c} (M) \\ \downarrow f \\ (N) \\ \downarrow g \\ (P) \end{array} \qquad \begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_2"] & M_1 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_1"] & M_o \arrow[d, "f_o"] \\ N_2 \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g_2"] & N_1 \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g_1"] & N_o \arrow[d, "g_o"] \\ P_2 \arrow[r, "u''"] & P_1 \arrow[r, "v''"] & P_o \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{Im(M_2 \xrightarrow{u} M_1)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & Ker(M_1 \xrightarrow{v} M_o) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"] & H(M) \arrow[r] \arrow[d, "H(f)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{Im(N_2 \xrightarrow{u'} N_1)} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g_1"] & Ker(N_1 \xrightarrow{v'} N_o) \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g_1"] & H(N) \arrow[r] \arrow[d, "H(g)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{Im(P_2 \xrightarrow{u''} P_1)} \arrow[r, "i''"] & Ker(P_1 \xrightarrow{v''} P_o) \arrow[r, "p''"] & H(P) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il vient alors : $H(g)\circ H(f)\circ p = H(g)\circ p'\circ f_1 = p''\circ g_1\circ f_1 = 0$, d'où $H(g)\circ H(f) = 0$ puisque p est un épimorphisme, c'est-à-dire $Im(H(f)) \leq Ker(H(g))$. Montrons enfin que $Im(H(f))$ est essentiel dans $Ker(H(g))$, ce qui rétablira le résultat. Soit donc $x' \in Ker\ v'$ tel que $p'(x') \in Ker(H(g)) - \{0\}$. On a ainsi :

$p''\circ g_1(x') = H(g)\circ p'(x') = 0$, d'où $g_1(x') \in \overline{Im(u'')}$. En vertu du lemme 1-3-5, il existe donc $a \in A$ tel que $ap'(x') \neq 0$ et $ag_1(x') = u''(y'')$ pour un $y'' \in P_2$ convenable. Mais comme g_2 est unpseudo-épimorphisme, il existe $b \in A$ tel que $bap'(x') \neq 0$ et $by'' = g_2(y')$ pour un $y' \in N_2$ convenable. Il vient alors : $g_1\circ u'(y') = u''.g_2(y') = u''(by'') = bu''(y'') = bag_1(x')$, d'où $bax' - u'(y') \in Ker\ g_1$.

Comme $Im\ f_1 \trianglelefteq Ker\ g_1$, il existe $c \in A$ tel que $cbap'(x') \neq 0$ et $c(bax' - u'(y')) = f_1(x)$ pour un $x \in M_1$ convenable, ce qui entraîne $f_o\circ v(x) = v'.f_1(x) = v'(cbax' - u'(cy')) = cbav'(x') - v'u'(cy') = 0$ puisque $x' \in Ker\ v'$ et que (N) est une suite nulle. Comme f_o est un monomorphisme, il en résulte que $x \in Ker v$. Mais alors l'élément $p(x) \in H(M)$ est tel que $H(f)\ (p(x)) = H(f)\circ p(x) = p'\circ f_1(x) = p'(cbax' - u'(cy')) = cbap'(x') - p'(u'(cy')) = cbap'(x')$ puisque $u'(cy') \in Im\ u' \leq \overline{Imu'}$ entraîne $pe(u'(cy')) = 0$, ce qui montre que $cbap'(x') \in Im(H(f)) - \{0\}$, et achève la démonstration.

Corollaire 2-3 :

Soit dans C *le diagramme commutatif suivant à lignes pseudo-exactes :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P \arrow[d, "h"] \\ M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' \end{tikzcd}$$

Si $M' \longrightarrow N'$ *est un monomorphisme, alors la suite*

(i) $\mathrm{Ker}\, f \longrightarrow \mathrm{Ker}\, g \longrightarrow \mathrm{Ker}\, h$ *est pseudo-exacte, tandis que si* $N \longrightarrow P$ *est un pseudo-épimorphisme, alors la suite*

(ii) $\mathrm{Coker}_C f \longrightarrow \mathrm{Coker}_C g \longrightarrow \mathrm{Coker}_C h$ *est pseudo-exacte.*

Démonstration :

La pseudo-exactitude des suites (i) et (ii) résulte de l'application de la Proposition 2-2 aux diagrammes respectifs :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant établir l'existence d'un "homomorphisme de connexion" dont l'application nous permettra d'obtenir un "pseudo-lemme du serpent".

Proposition 2-4 : Soit dans C *le diagramme commutatif (I) ci-dessous dans lequel les lignes sont exactes en* N_1 *et en* P_2 *et pseudo-exactes partout ailleurs, et où les colonnes sont des suites nulles :*

$$\text{(I)} \qquad \begin{tikzcd} & & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 & \\ 0 \arrow[r] & M_o \arrow[r] & N_o & & \end{tikzcd}$$

Il existe alors un A-homomorphisme canonique (II) $H(P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1) \xrightarrow{\Delta} H(M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o)$ et toute translation de (I) dans un diagramme de même type détermine une translation de (II).

Démonstration :

Pour simplifier l'écriture, nous noterons $x_2M_2M_1$ (resp. $x_2M_2M_1N_1$) l'image de l'élément $x_2 \in M_2$ par l'homomorphisme $M_2 \longrightarrow M_1$ (resp. $M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow N_1$), et de même pour les autres homomorphismes du diagramme.

Soit $\gamma \in H(P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1) = \mathrm{Ker}\, P_2P_1 / \overline{\mathrm{Im}\, P_3P_2}$, et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, P_2P_1$ tel que $\dot{x}_2 = \gamma$ ($\dot{x}_2$ désignant la classe de x_2 modulo $\overline{\mathrm{Im}\, P_3P_2}$). Comme N_2P_2 est un épimorphisme, il existe $y_2 \in N_2$ tel que $x_2 = y_2N_2P_2$, d'où $y_2N_2N_1 \in \mathrm{Ker}\, N_1P_1 = \mathrm{Im}\, M_1N_1$, et l'éxistence de $z_1 \in M_1$ tel que $z_1M_1N_1 = y_2N_2N_1$. Mais alors on a $z_1M_1M_oN_o = y_2N_2N_1N_o = 0$ (car les colonnes sont des suites nulles), ce qui entraîne $z_1M_1M_o = 0$ puisque M_oN_o est un monomorphisme, soit $z_1 \in \mathrm{Ker}\, M_1M_o$. Nous posons alors $\Delta(\gamma) = \alpha = \bar{z}_1$: classe de z_1 modulo $\overline{\mathrm{Im}\, M_2M_1}$. On définit bien ainsi une application Δ de $H(P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1)$ dans $H(M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o)$. En effet si $x_2' \in \mathrm{Ker}\, P_2P_1$ est tel que $\dot{x}_2' = \gamma$, si $y_2' \in N_2$ est tel que $x_2' = y_2'N_2P_2$ et si $z_1' \in M_1$ est tel que $z_1'M_1N_1 = y_2'N_2N_1$, le même raisonnement que ci-dessus nous montre que $z_1' \in \mathrm{Ker}\, M_1M_o$. Par suite il nous suffit de montrer que $\bar{z}_1' = \bar{z}_1$, c'est-à-dire $z_1 - z_1' \in \overline{\mathrm{Im}\, M_2M_1}$, soit finalement $\mathrm{Im}\, M_2M_1 : (z_1 - z_1') \Delta A$.

Soit donc $a \in A^*$. Si $a(z_1 - z_1') = 0$ c'est terminé. Sinon on a :$a(z_1 - z_1') \neq 0$, et comme $a(x_2 - x_2') \in \overline{\mathrm{Im}\, P_3P_2}$ (car $\dot{x}_2 = \dot{x}_2'$), il existe $b \in A$ tel que $ba(z_1 - z_1') \neq 0$ et $ba(x_2 - x_2') = x_3P_3P_2$ pour un $x_3 \in P_3$ convenable. Comme N_3P_3 est un pseudo-épimorphisme, il existe $c \in A$ tel que $cba(z_1 - z_1') \neq 0$ et $cx_3 = y_3N_3P_3$ avec $y_3 \in N_3$.

Il vient alors $y_3N_3N_2P_2 = cx_3P_3P_2 = cba(x_2 - x_2') = cba(y_2 - y_2')N_2P_2$, d'où $cba(y_2 - y_2') - y_3N_3N_2 \in \mathrm{Ker}\, N_2P_2$. Comme $\mathrm{Im}\, M_2N_2 \triangleleft \mathrm{Ker}\, N_2P_2$, il existe $d \in A$ tel que $dcba(z_1 - z_1') \neq 0$ et $dcba(y_2 - y_2') - dy_3N_3N_2 = z_2M_2N_2$, avec $z_2 \in M_2$, d'où $z_2M_2M_1N_1 = dcba(y_2-y_2')N_2N_1 = dcba(z_1 - z_1')M_1N_1$, ce qui entraîne $dcba(z_1 - z_1') = z_2M_2M_1$ puisque M_1N_1 est un monomorphisme, et établit le résultat.

Soient maintenant γ , $\gamma' \in H(P_3 \to P_2 \to P_1)$ et $a \in A$. On a $\Delta(\gamma) = \overline{z_1}$ où $z_1M_1N_1 = y_2N_2N_1$, $y_2N_2P_2 = x_2$, $\dot{x}_2 = \gamma$, $\Delta(\gamma') = \overline{z_1'}$ où $z_1'M_1N_1 = y_2'N_2N_1$, $y_2'N_2P_2 = x_2'$, $\dot{x}_2' = \gamma'$; d'où $\overset{\bullet}{\widehat{x_2 + x_2'}} = \dot{x}_2 + \dot{x}_2' = \gamma + \gamma'$, $(y_2 + y_2')N_2P_2 = x_2 + x_2'$, $(z_1 + z_1')M_1N_1 = (y_2 + y_2')N_2N_1$, ce qui entraîne $\Delta(\gamma + \gamma') = \overline{z_1 + z_1'} = \overline{z_1} + \overline{z_1'} = \Delta(\gamma) + \Delta(\gamma')$.

De même on a $\overset{\bullet}{\widehat{ax_2}} = a\dot{x}_2 = a\gamma$, $ay_2N_2P_2 = ax_2$, $az_1M_1N_1 = ay_2N_2N_1$, d'où $\Delta(a\gamma) = \overline{az_1} = a\overline{z_1} = a\Delta(\gamma)$, ce qui montre que Δ est un A-homomorphisme. Supposons enfin que nous ayons une translation du diagramme (I) dans un diagramme du même type dont les objets sont notés M_i' , N_j' , P_k' , les composantes de la translation étant notées M_iM_i' , N_jN_j' , P_kP_k'. Soit $\gamma \in H(P_3 \to P_2 \to P_1)$ et x_2 , y_2 , z_1 définis comme ci-dessus, et posons $x_2' = x_2P_2P_2'$, $y_2' = y_2N_2N_2'$, $z_1' = z_1M_1M_1'$. Comme $x_2 \in \mathrm{Ker}\, P_2P_1$

$$\begin{tikzcd} H(P_3 \to P_2 \to P_1) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\phi"] & H(M_2 \to M_1 \to M_0) \arrow[d, "\Psi"] \\ H(P_3' \to P_2' \to P_1') \arrow[r, "\Delta'"] & H(M_2' \to M_1' \to M_0') \end{tikzcd}$$

et $z_1 \in \mathrm{Ker}\, M_1M_0$, on a évidemment $x_2' \in \mathrm{Ker}\, P_2'P_1'$ et $z_1' \in \mathrm{Ker}\, M_1'M_0'$. Or le morphisme $\Phi : H(P_3 \to P_2 \to P_1) \longrightarrow H(P_3' \to P_2' \to P_1')$ est défini par $\Phi(\dot{x}_2) = \overset{\bullet}{\widehat{x_2P_2P_2'}} = \dot{x}_2'$, et de même le morphisme $\psi : H(M_2 \to M_1 \longrightarrow M_0) \to H(M_2' \to M_1' \to M_0')$ est défini par $\psi(\overline{z_1}) = \overline{z_1M_1M_1'} = \overline{z_1'}$. Il vient alors : $\phi(\gamma) = \phi(\dot{x}_2) = \dot{x}_2'$, $y_2'N_2'P_2' = y_2N_2N_2'P_2' = y_2N_2P_2P_2' = x_2P_2P_2' = x_2'$, $z_1'M_1'N_1' = z_1M_1M_1'N_1' = z_1M_1N_1N_1' = y_2N_2N_1N_1' = y_2N_2N_2'N_1' = y_2'N_2'N_1'$, d'où $\Delta'(\phi(\gamma)) = \overline{z_1'} = \psi(\overline{z_1}) = \psi(\Delta(\gamma))$, soit $\Delta' \circ \phi = \phi \cdot \Delta$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse selon laquelle les lignes sont exactes en N_1 et en P_2 et non pas simplement pseudo-exactes, est indispensable pour conclure, ainsi que le montrent les deux contre-exemples suivants dans lesquels Z et Q désignent l'anneau des entiers rationnels et le corps des nombres rationnels.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Dans le 1er diagramme, l'exactitude en P_2 est devenue pseudo-exactitude alors que dans le second c'est en N_1 que cette modification a été effectuée. Or il ne peut exister d'homomorphisme de connexion Δ : $H(0 \to Q \to 0) = Q \to H(0 \to Z \to 0) = Z$, car Z contiendrait alors un sous-groupe divisible.

D'autre part, le diagramme (I), en plus de nous permettre de définir l'homomorphisme de connexion Δ, donne naissance à des homomorphismes
$H(N_3 \to N_2 \to N_1) \xrightarrow{f} H(P_3 \to P_2 \to P_1)$ et $H(M_2 \to M_1 \to M_o) \xrightarrow{g} H(N_2 \to N_1 \to N_o)$.

Concernant le tout, nous avons le résultat suivant,

<u>*Proposition 2-5*</u> : *Si les hypothèses sont les mêmes que dans la Proposition 2-4, alors la suite :*

(III) $H(N_3 \to N_2 \to N_1) \xrightarrow{f} H(P_3 \to P_2 \to P_1) \xrightarrow{\Delta} H(M_2 \to M_1 \to M_o) \xrightarrow{g}$

$H(N_2 \to N_1 \to N_o)$ *est pseudo-exacte. De plus toute translation de (I) dans un diagramme de même type détermine une translation de la suite (III).*

<u>Démonstration</u> :

<u>(i) Im $f \leqslant \operatorname{Ker}\Delta$</u> : Soit $\beta \in H(N_3 \to N_2 \to N_1)$ de représentant $y_2 \in \operatorname{Ker} N_2N_1$ et posons $x_2 = y_2N_2P_2$. Il vient alors $f(\beta) = f(\mathring{y}_2) = \widehat{y_2N_2P_2} = \overset{c}{x}_2$, $y_2N_2P_2 = x_2$ et $0M_1N_1 = y_2N_2N_1$, d'où $\Delta(f(\beta)) = \bar{0} = 0$.

<u>(ii) Im $f \vartriangleleft \operatorname{Ker}\Delta$</u> : Soit $\gamma \in \operatorname{Ker} \Delta - \{0\}$, $\mathring{x}_2 = \gamma$, $y_2N_2P_2 = x_2$, $z_1M_1N_1 = y_2N_2N_1$, $\overline{z_1} = \Delta(\gamma) = 0$. Ainsi $z_1 \in \overline{\operatorname{Im} M_2M_1}$, et il existe $a \in A$ tel que $a\gamma \neq 0$ et $az_1 = z_2M_2M_1$ pour un $z_2 \in M_2$ convenable, d'où $(ay_2 - z_2M_2N_2)N_2N_1 = ay_2N_2N_1 - az_1M_1N_1 = 0$, soit $ay_2 - z_2M_2N_2 \in \operatorname{Ker} N_2N_1$. soit alors $\beta = \widehat{ay_2 - z_2M_2N_2} \in H(N_3 \to N_2 \to N_1)$; on a $f(\beta) = \widehat{(ay_2 - z_2M_2N_2)N_2P_2} = \widehat{ay_2N_2P_2 - z_2M_2N_2P_2} = \widehat{ax_2 - 0} = \mathring{ax}_2 = a\gamma \in \operatorname{Im} f - \{0\}$.

<u>(iii) $\operatorname{Im}\Delta \leqslant \operatorname{Ker} g$</u> : Soit $\gamma = \mathring{x}_2$, $y_2N_2P_2 = x_2$, $z_1M_1N_1 = y_2N_2N_1$, $\Delta(\gamma) = \overline{z_1}$.

On a alors $g(\Delta(\gamma)) = g(\overline{z_1})$ = classe de $z_1M_1N_1$ modulo $\overline{\operatorname{Im} N_2N_1} = 0$ puisque $z_1M_1N_1 = y_2N_2N_1 \in \operatorname{Im} N_2N_1$.

<u>(iv) Im $\Delta \vartriangleleft \operatorname{Ker} g$</u> : Soit $\alpha \in \operatorname{Ker} g - \{0\}$ et $z_1 \in \operatorname{Ker} M_1M_0$ tel que $\alpha = \overline{z_1}$. On a $g(\alpha)$ = classe de $z_1M_1N_1$ modulo $\overline{\operatorname{Im} N_2N_1} = 0$, d'où $z_1M_1N_1 \in \overline{\operatorname{Im} N_2N_1}$. Par suite il existe $a \in A$ tel que $a\alpha \neq 0$ et $az_1M_1N_1 = y_2N_2N_1$ pour un $y_2 \in N_2$ convenable. Posons $x_2 = y_2N_2P_2$, d'où $x_2P_2P_1 = y_2N_2N_1P_1 = az_1M_1N_1P_1 = 0$, soit $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2P_1$. Considérons alors l'élément $\gamma = \mathring{x}_2 \in H(P_3 \to P_2 \to P_1)$; par construction de Δ il est tel que $\Delta(\gamma) = \overline{az_1} = \overline{az_1} = a\alpha$, ce qui montre que $a\alpha \in \operatorname{Im} \Delta - \{0\}$.

Enfin l'assertion sur la translation induite résulte directement de la proposition 2-4.

<u>*Corollaire 2-6 : (pseudo-lemme du serpent)*</u> :

Soit dans C *le diagramme commutatif ci-dessous à lignes exactes en* P *et* N' *et pseudo-exactes partout ailleurs.*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' & \end{tikzcd}$$

Alors on a une suite pseudo-exacte canonique dans $\mathcal{C}$ *:*

$\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker}_C f \to \operatorname{Coker}_C g \to \operatorname{Coker}_C h.$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la proposition 2-5 et le corollaire 2-3 au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & P' & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

III - COMPLEXES ET TRANSLATIONS DANS C.

Un complexe X de C est une suite $\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$ d'objets de C infinie dans les deux directions et telle que l'on ait $d^n . d^{n-1} = 0$ pour tout $n \in Z$. Une translation du complexe X dans le complexe X', notée $X \xrightarrow{f} X'$, est une famille $(f_n)_{n \in Z}$ d'homomorphismes $X^n \xrightarrow{f_n} X'^n$ telle que pour tout $n \in Z$ le carré ci-dessous soit commutatif, et on vérifie facilement que l'on obtient ainsi une catégorie additive.

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f_n"] & X^{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
X'^n \arrow[r, "d'^n"] & X'^{n+1}
\end{tikzcd}$$

On pose $H^n(X) = H(X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow X^{n+1}) = \operatorname{Ker} d^n / \overline{\operatorname{Im} d^{n-1}}$; ces modules sont appelés les "modules de pseudo-homologie" du complexe X.

Toute translation $X \longrightarrow X'$ de X dans un autre complexe X' détermine pour tout $n \in Z$ un A-homomorphisme $H^n(X) \longrightarrow H^n(X')$, de sorte que H^n est un foncteur covariant additif défini sur la catégorie des complexes de C et à valeurs dans C.

Il est pratique dans certains cas de poser $X_n = X^{-n}$, $d_n = d^{-n}$, $H_n(X) = H^{-n}(X)$; le complexe X s'écrit alors : $\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$ avec $d_n \circ d_{n+1} = 0$ et $H_n(X) = H(X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1}) = \operatorname{Ker} d_n / \overline{\operatorname{Im} d_{n+1}}$ pour tout $n \in Z$.

Enfin, on dit qu'un complexe X de C est un complexe à droite (resp. à gauche) si $X^n = 0$ (resp. $X_n = 0$) pour tout $n < 0$, et une suite $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ de complexes de C et de translations est dite exacte si pour tout $n \in Z$ la suite d'homomorphismes $X'_n \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{g_n} X''_n$ est exacte. De plus il est pratique de noter 0 le complexe X tel que $X_n = 0$ pour tout $n \in Z$.

Proposition 3-1 :

Soit $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes de C et de translations. Alors il en résulte une suite pseudo-exacte canonique dans C:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X') \longrightarrow H_{n+1}(X) \longrightarrow H_{n+1}(X'') \xrightarrow{\Delta} H_n(X') \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X'') \longrightarrow \dots$$

De plus toute translation de la suite de complexes dans une suite de même type détermine une translation de la suite canonique précédente.

Démonstration :

Ceci résulte de ce que la suite canonique ci-dessus n'est autre que la co-réflexion dans C de la suite d'homologie dans Mod_A associée à la suite exacte de complexes $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$, et du fait que la co-réflexion transforme une suite exacte en une suite pseudo-exacte, comme nous le montre le :

Lemme 3-2 :

La co-réflexion de Mod_A dans C transforme

(i) toute suite exacte en une suite pseudo-exacte ;

(ii) tout monomorphisme en un monomorphisme ;

(iii) tout épimorphisme en un homomorphisme surjectif (et non pas simplement en un pseudo-épimorphisme).

<u>Démonstration</u> :

(i) Nous avons le diagramme ci-dessous dans lequel la ligne supérieure est exacte et où les colonnes sont les épimorphismes canoniques.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\ M'/_{\alpha(o)} \arrow[r, "\tilde{f}"] & M/_{\alpha(o)} \arrow[r, "\tilde{g}"] & M''/_{\alpha(o)} \end{tikzcd}$$

Comme $\tilde{g}.\tilde{f} = \widetilde{g.f} = \tilde{0} = 0$ (propriétés fonctorielles) on a déjà $\mathrm{Im}\ \tilde{f} \leqslant \mathrm{Ker}\ \tilde{g}$. Montrons que $\mathrm{Im}\ \tilde{f}$ est essentielle dans $\mathrm{Ker}\ \tilde{g}$.

Soit $\dot{x} \in (\mathrm{Ker}\ \tilde{g})^{*}$ avec $x \in M$. On a ainsi $\dot{\widehat{g(x)}} = \tilde{g}(\dot{x}) = 0$, c'est-à-dire $M''^{\vartriangle} : g(x) \triangleleft A$.

Comme $M/_{\alpha(o)}$ est non-singulier, il existe en vertu du lemme 1-3-5 un $a \in A$ tel que $a\dot{x} \neq 0$ et $a1 \in M''^{\vartriangle} : g(x)$, soit $g(ax) = ag(x) \in M''^{\vartriangle}$, c'est-à-dire $0 : g(ax) \vartriangle A$; de même il existe $b \in A$ tel que $ba\dot{x} \neq 0$ et $b1 \in 0 : g(ax)$, c'est-à-dire $bax \in \mathrm{Ker}\ g = \mathrm{Im}\ f$, d'où $bax = f(y)$ pour un $y \in M'$ convenable. Mais alors on a : $ba\dot{x} = \dot{\widehat{bax}} = \dot{\widehat{f(y)}} = \tilde{f}(\dot{y}) \in (\mathrm{Im}\ \tilde{f})^{*}$, ce qui établit le résultat.

(ii) Ceci résulte immédiatement du (i) précédent et du fait que $0 \triangleleft N$ entraîne $N = 0$.

(iii) Ceci résulte du fait que l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow M/_{\alpha(o)}$ est surjectif.

<u>Remarques</u> :

1°) Il existe des suites exactes de Mod_A qui sont effectivement transformées en des suites pseudo-exactes et non exactes par co-réflexion dans $\mathcal{C}$; exemple : la suite exacte de Z-modules $Z \xrightarrow{i} Q \to Q/Z$ (où i est l'injection canonique).

Z et Q étant non-singuliers sont transformés en eux-mêmes : par contre, Z étant essentiel dans Q, on a $(Q/Z)^{\vartriangle} = Q/Z$, de sorte que Q/Z est co-réflechi en 0, et que la transformée de la suite précédente est la suite $Z \xrightarrow{i} Q \to 0$.

2°) Le (iii) du lemme précédent nous montre qu'il n'est pas possible de démontrer les propositions 2-2 et 2-4 de la même façon que la proposition 3-1, à savoir en considérant les diagrammes de $\mathcal{C}$ dont il est question comme co-réflexion de diagrammes de Mod_A pour lesquels les propriétés sont bien connues. En effet, nous voyons ici qu'un pseudo-épimorphisme non surjectif ne peut pas être la co-réflexion d'un épimorphisme de Mod_A.

3°) Il est permis de se demander si, dans l'énoncé de la proposition 3-1, il serait possible de remplacer l'hypothèse "exacte" portant sur la suite de complexes par "pseudo-exacte". La réponse est non, ainsi que le montre le contre-exemple suivant : on prend pour X', X, X'' les complexes de Mod_Z définis par $X'_n = 0$ pour tout $n \neq 0$, $X'_o = Z$: $X''_n = 0$ pour tout $n \neq 1$, $X''_1 = Q$; $X_n = 0$ pour tout $n \notin \{0,1\}$, $X_1 = X_o = Q$, $d_1 = 1_Q$; et comme translations, $f : X' \longrightarrow X$ définie par $f_n = 0$ si $n \neq 0$, $f_o = i$ injection canonique de Z dans Q, et $g : X \longrightarrow X''$ définie par $g_n = 0$ pour tout $n \neq 1$ et $g_1 = 1_Q$. La suite de complexes de C $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$ est bien pseudo-exacte, ainsi qu'on peut le constater sur le diagramme ci-contre, et cependant on ne peut y associer une suite canonique comme dans la proposition 3-1 car sinon l'homomorphisme $\Delta : H_1(X'') \longrightarrow H_o(X')$ serait un homomorphisme de Q dans Z, ce qui est impossible.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r, "1_Q"] \arrow[d, "1_Q"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

<u>*Corollaire 3-3 :*</u>

Soit $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de complexes de* C. *Si deux d'entre eux sont pseudo-exacts, alors le troisième l'est aussi.*

<u>Démonstration</u> : Il est immédiat qu'un complexe est pseudo-exact si et seulement si tous ses modules de pseudo-homologie sont nuls. En désignant par Y celui des trois complexes dont on ne sait pas à priori s'il est pseudo-exact, la suite canonique pseudo-exacte de $\mathcal{C}$ dont on a établi l'existence à la proposition 3-1 se présente sous la forme $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n+1}(Y) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_n(Y) \rightarrow 0 \rightarrow \ldots$, d'où le résultat.

<u>Rappel</u> : Une translation $f : X \longrightarrow X'$ entre deux complexes de $\mathcal{C}$ est dite "homotope à 0" s'il existe pour tout $n \in Z$ un A-homomorphisme $u_n : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$ telle que

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "u_n"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "u_{n-1}"'] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & X'_n \arrow[r, "d'_n"] & X'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

l'on ait $f_n = u_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \cdot u_n$ pour tout $n \in Z$.

Il est immédiat que l'ensemble des translations homotopes à 0 de X dans X' est un sous-groupe du groupe additif de toutes les translations de X dans X', et que, lorsque A est commutatif, ce sous-groupe est alors un sous-module.

On dit alors que deux translations f et g de X dans X' sont homotopes si f-g est homotope à 0, de sorte que l'on définit ainsi une relation d'équivalence compatible sur le groupe des translations de X dans X'. De plus, si f est homotope à 0, on a pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, d_n$: $f_n(x) = u_{n-1} \circ d_n(x) + d'_{n+1} \cdot u_n(x) = d'_{n+1} \circ u_n(x) \in \mathrm{Im}\ d'_{n+1} \leqslant \overline{\mathrm{Im}\ d'_{n+1}}$, de sorte que l'homomorphisme induit $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$ est nul.

Par suite, si deux translations de X dans X' sont homotopes, alors les homomorphismes induits de $H_n(X)$ dans $H_n(X')$ coïncident pour tout $n \in Z$.

IV. RESOLUTIONS INJECTIVES ET PROJECTIVES DANS $\mathcal{C}$.

Dans ce qui suit, nous associerons à tout objet M de $\mathcal{C}$ le complexe de $\mathcal{C}$, noté (M) défini par $X_o = M$, $X_n = 0$ pour tout $n \neq 0$ et $d_n = 0$ pour tout $n \ Z$; (M) est appelé le "complexe associé à M".

Définition 4-1 : Un complexe à gauche X *sur* M *consiste en la donnée d'un complexe à gauche* X *de* $\mathcal{C}$ *et d'une translation* $\varepsilon : X \longrightarrow (M)$.

En raison du caractère dégénéré de (M) cette translation est parfaitement définie par l'homomorphisme $X_o \longrightarrow M$, que l'on note aussi ε, et qui est soumis à la condition $X_1 \longrightarrow X_o \xrightarrow{\varepsilon} M$ est une suite nulle. Le complexe à gauche X est dit projectif si tous les X_n sont des objets projectifs de $\mathcal{C}$.

Pour définir un complexe acyclique sur M nous avons, dans Mod_A, le choix entre les deux définitions équivalentes suivantes :

(i) la translation $\varepsilon : X \longrightarrow (M)$ induit un isomorphisme $H(X) \longrightarrow (M)$

(ii) La suite $\cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$ est exacte.

Examinons ce qui se passe lorsqu'on se restreint à la catégorie $\mathcal{C}$. La condition (i) se traduit par $H_n(X) = 0$ pour tout $n \in N^{*}$, soit finalement par $\operatorname{Im} d_{n+1} \triangleleft \operatorname{Ker} d_n$, et par $H_o(X) = X_o / \overline{\operatorname{Im} d_1}$ isomorphe à M au moyen de l'isomorphisme induit par ε, ainsi qu'on peut le voir facilement à l'aide du diagramme de gauche ci-dessous,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "d_1"] & X_o \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\operatorname{Im} d_1} \arrow[r] \arrow[d] & X_o \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & H_o(X) \arrow[r] \arrow[d, "\text{isomorphisme}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "1_M"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ce qui impose à ε d'être surjectif, comme le montre le diagramme de droite.

Par conséquent, si l'on adoptait cette définition, seuls les objets projectifs de C admettraient des résolutions projectives dans C. Nous nous baserons donc sur la définition (ii), ce qui nous donne la :

<u>*Définition 4-2*</u> *: Un complexe à gauche* X *sur* M *est dit "acyclique" si la suite de*

$$C : \dots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$ *est pseudo-exacte.*

<u>*Définition 4-3*</u> *: Pour tout objet* M *de* C *on appelle "résolution projective de* M *dans* C *" tout complexe à gauche sur* M *qui est à la fois projectif et acyclique.*

Rappelons enfin que si X est un complexe à gauche sur M, X' un complexe à gauche sur M', et f : M $\longrightarrow$ M' un A-homomorphisme, alors une translation g : X $\longrightarrow$ X' est dite "sur f" si le diagramme suivant de complexes et de translations est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & (M) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f)} \\ X' & \longrightarrow & (M') \end{array}$$

(en désignant par (f) la translation (M) $\longrightarrow$ (M') induite par f).

<u>*Proposition 4-4*</u> *: Soient* M *et* M' *deux objets de* C, f : M $\longrightarrow$ M' *un* A-*homomorphisme,* X *une résolution projective de* M *dans* C*, et* X' *un complexe à gauche acyclique sur* M'. *Alors il existe une translation* g : X $\longrightarrow$ X' *sur* f*, et deux telles translations sont homotopes.*

<u>**Démonstration**</u> :

Nous allons tout d'abord établir le

<u>*Lemme 4-5*</u> *: Soit dans* C *le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \end{array}$$

dans lequel P *est un objet projectif de* C*, la suite* M' $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ M'' *est pseudo-exacte, et la suite* P $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ M'' *est nulle. Alors il existe un homomorphisme* P $\longrightarrow$ M' *tel que* P $\longrightarrow$ M' $\longrightarrow$ M = P $\longrightarrow$ M.

En effet PMM" = 0 entraîne Im PM$\leq$Ker MM", de sorte que le diagramme précédent peut se mettre sous la forme ci-contre. Or, la suite $M' \longrightarrow \mathrm{Ker}\ MM'' \longrightarrow 0$ étant pseudo-exacte, il existe un morphisme $P \longrightarrow M'$ tel que $P \longrightarrow M' \longrightarrow \mathrm{Ker}\ MM'' = P \longrightarrow \mathrm{Ker}\ MM''$, ce qui établit le résultat.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ M' \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ MM'' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

Construisons maintenant une translation $g : X \longrightarrow X'$. Comme ε' est un pseudo-épimorphisme et X_o est un objet projectif de C, il existe un homomorphisme $g_o : X_o \longrightarrow X'_o$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{tikzcd} X_o \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g_o"'] & M \arrow[d, "f"] \\ X'_o \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \end{tikzcd}$$

De plus, comme $\varepsilon'.(g_o.d_1) = f.\varepsilon.d_1 = 0$, il existe en vertu du lemme 4-5 un homomorphisme $g_1 : X_1 \longrightarrow X'_1$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"'] & X_o \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g_o"'] & M \arrow[d, "f"] \\ X'_1 \arrow[r, "d'_1"] & X'_o \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \end{tikzcd}$$

Supposons alors construit $g_n : X_n \longrightarrow X'_n$ tel que $d'_n.g_n = g_{n-1}.d_n$. Comme $d'_n.(g_n.d_{n+1}) = g_{n-1}\circ d_n.d_{n+1} = 0$, il existe un homomorphisme g_{n+1} : $X_{n+1} \longrightarrow X'_{n+1}$ rendant commutatif le diagramme ci-contre, ce qui nous permet de construire la translation g par récurrence sur n.

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & \cdots \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & X'_n \arrow[r, "d'_n"] & X'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que $g' : X \longrightarrow X'$ soit une autre translation sur f. Il existe des homomorphisme $u_o : X_o \longrightarrow X'_1$ et $u_1 : X_1 \longrightarrow X'_2$ tels que $d'_1.u_o = g_o - g'_o$ et $g_1 - g'_1 = d'_2.u_1 + u_o.d_1$ (application du lemme 4-5 aux deux diagrammes ci-contre).

$$\begin{tikzcd} & X_o \arrow[dl, "u_o"'] \arrow[d, "g_o - g'_o"] & \\ X'_1 \arrow[r, "d'_1"] & X'_o \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[d, "g_1-g'_1-u_o\circ d_1"] & \\ X'_2 \arrow[r, "d'_2"] & X'_1 \arrow[r, "d'_1"] & X'_o \end{tikzcd}$$

Supposons construit $u_n : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$ tel que l'on ait $g_n - g'_n = d'_{n+1}\cdot u_n + u_{n-1}\cdot d_n$.

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "u_{n+1}"'] \arrow[d, "g_{n+1}-g'_{n+1}-u_n\cdot d_{n+1}"] & \\ X'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & X'_n \end{tikzcd}$$

Comme $d'_{n+1}\circ(g_{n+1} - g'_{n+1} - u_n\circ d_{n+1}) = (g_n - g'_n)\cdot d_{n+1} - d'_{n+1}\circ u_n\cdot d_{n+1} = d'_{n+1}\circ u_n\cdot d_{n+1} + u_{n-1}\circ d_n\cdot d_{n+1} - d'_{n+1}\cdot u_n\cdot d_{n+1} = 0$ il résulte du lemme 4-5 qu'il existe un homomorphisme $u_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X'_{n+2}$ tel que $d'_{n+2}\circ u_{n+1} = g_{n+1} - g'_{n+1} - u_n\circ d_{n+1}$, ce qui achève la construction par récurrence de la famille $(u_n)_{n\in N}$, et montre que $g - g'$ est homotope à zéro.

<u>*Proposition 4-6*</u> *: Si la catégorie* C *possède suffisamment d'objets projectifs, alors tout objet de* C *possède au moins une résolution projective dans* C*. Si* X *et* X' *sont des résolutions projectives dans* C *des objets* M *et* M' *de* C*, et si* $f : M \longrightarrow M'$ *est un* A*-homomorphisme, alors il existe une translation* $g : X \longrightarrow X'$ *sur* f*, et deux telles translations sont homotopes.*

<u>Démonstration</u> :

Si la catégorie C possède suffisamment de projectifs, le socle P d'un objet M de C est un objet projectif de C essentiel dans M (Proposition III 4-6) de sorte que l'on peut prendre comme résolution projective de M le complexe (P) associé à P, avec la translation augmentation (i) : $(P) \longrightarrow (M)$ induite par l'injection canonique $i : P \longrightarrow M$, c'est-à-dire la suite pseudo-exacte : $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$.
Quant au reste de la proposition, il résulte directement de la proposition 4-4.

Remarque : Ceci entraîne en particulier que deux résolutions projectives X et X' dans C d'un même objet M de C ont le même type d'homotopie, en ce sens qu'il existe des translations $g : X \longrightarrow X'$ et $g' : X' \longrightarrow X$ sur l'application identique de M telles que les composées $g' \cdot g$ et $g \circ g'$ soient respectivement homotopes aux translations identiques de X et de X'.

Indiquons maintenant rapidement et sans démonstration les résultats correspondant aux complexes à droite et aux résolutions injectives.

Un complexe à droite X sur un objet M de C consiste en la donnée d'un complexe à droite X dans C et d'une translation augmentation $\varepsilon : (M) \longrightarrow X$. Ce complexe est dit injectif si tous les X^n sont injectifs ; il est dit acyclique si la suite $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} X^o \xrightarrow{d^o} X^1 \longrightarrow \dots$ est pseudo-exacte. (La condition (M) isomorphe à H(X) équivaut à ce que la suite précédente soit exacte en X^o et pseudo-exacte partout ailleurs, de sorte qu'avec cette définition seuls les objets injectifs de C admettraient des résolutions injectives). Enfin, si X est à la fois injectif et acyclique, on dit que c'est une résolution injective de M dans C.

De plus, si X et X' sont deux complexes à droite sur les objets M et M' de C, et $f : M \longrightarrow M'$ un A-homomorphisme, alors la translation $g : X \longrightarrow X'$ est dite "sur f" si le diagramme suivant de complexes et de translations est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (M) & \xrightarrow{(f)} & (M') \\ \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

Nous avons alors les résultats suivants :

Proposition 4-7 : Soient M *et* M' *deux objets de* C, $f : M \longrightarrow M'$ *un* A-*homomorphisme,* X *un complexe à droite acyclique sur* M *et* X' *une résolution injective de* M' *dans* C. *Alors il existe une translation* $g : X \longrightarrow X'$ *sur* f, *et deux telles translations sont homotopes.*

Proposition 4-8 :

Tout objet M *de* C *possède au moins une résolution injective dans* C. *Si* X *et* X' *sont des résolutions injectives dans* C *des objets* M *et* M' *de* C, *et si* $f : M \to M'$ *est un A-homomorphisme, alors il existe une translation* $g : X \to X'$ *sur* f, *et deux telles translations sont homotopes.*

En particulier toute résolution injective dans C d'un objet M de C a le même type d'homotopie que la résolution injective $0 \to M \xrightarrow{i} \widehat{M} \to 0 \to 0 \to \dots$ où i désigne l'injection canonique de M dans l'une de ses enveloppes injectives notée $\widehat{M}$.

BIBLIOGRAPHIE

1 H. CARTAN, S. EILENBERG : Homological Algebra. (Princeton University Press, 1956).

2 B. MITCHELL : Theory of categories. (Academic Press, NewYork and London).

3 G. MAURY : Cours de 3e cycle 1966-1967 (Université de Lyon) Modules injectifs, modules projectifs, généralisations.

4 R. E. JOHNSON : Structure theory of faithful rings ([illegible]). Trans. Amer. Math. Soc., T. 84, 1957, p. 503 et suivantes.

5 J. RAVEL : Injectivité, extensions essentielles. Thèses de 3e cycle. Faculté des Sciences de Lyon - 1966.

6 M. HARADA : Note on quasi-injective modules. Osaka J. Math. 2 (1965), p. 351-356.

7 A. W. GOLDIE : Torsion-free modules and rings. J. Algebra 1 (1964), p. 268-287.

8 R.E. JOHNSON AND E. T. WONG : Quasi-injective modules and irreducible rings. J. of the London Math. Soc. 36 (1961), p. 260-268.

9 L. LEVY : Torsion-free and divisible modules over non integral domains. Can. J. Math. 15 (1963), p. 132 - 151.

10 S. E. DICKSON : A torsion theory for abelian categories. Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), p. 223-235.

11 P. GABRIEL und V. OBERST : Spektralkategorien und reguläre Ringe in Von Neumannschen Sinn. Math. Z. 92-389.395 (66).

12 P. GABRIEL : Des catégories abéliennes - Bull. Soc. Math. France. T. 90 - 1962, p. 323 - 448.

13 E. GENTILE : Singular submodule and injective hull. Indag. Math. 24 (1962), p. 426-433.

14 D.G. NORTHCOTT : An introduction to Homological Algebra (Cambridge University Press, 1960).

15 M. HACQUE : Mono-sous-catégories d'une catégorie de modules. Séminaire d'Algèbre et Théorie des nombres (P. Dubreil), exposé du 10-2-1969.

16 G. MAURY : Σ-compléments - Publications du Dép. de Math. Faculté des Sc. de Lyon - 1968- t.5, fasc. 1 p. 37-62.

Thèse de Doctorat de Spécialité 3e cycle
soutenue le 27 mars 1969.

C. LECLERC
Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
43, boulevard du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE