

ALAIN FAISANT

Sur les demi-groupes de fractions

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1969, tome 6, fascicule 1
, p. 73-85

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1969__6_1_73_0>

© Université de Lyon, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES DEMI-GROUPES DE FRACTIONS

par Alain FAISANT

Notre but est une construction explicite du demi-groupe des fractions d'un demi-groupe quelconque D pour rapport à un complexe quelconque (c'est-à-dire une partie non vide) de D . De façon plus précise, on veut résoudre le problème suivant :

Problème (D, S) . Etant donné un couple (D, S) où D est un demi-groupe et S un complexe de D , trouver un couple (Δ, ϕ) vérifiant les propriétés suivantes :

- $[D, S]_1$ Δ est un demi-groupe avec élément neutre et $\phi : D \rightarrow \Delta$ un homomorphisme.
- $[DS]_2$ pour tout $s, s \in S : \phi(s)$ est inversible dans Δ .
- $[DS]_3$ pour tout couple (Δ', ϕ') vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$, il existe un unique homomorphisme $\sigma : \Delta \rightarrow \Delta'$ tel que $\sigma \circ \phi = \phi'$.

Notations : $H(D, D')$ désigne l'ensemble des homomorphismes du demi-groupe D dans le demi-groupe D' ; e_D l'élément neutre éventuel de D ; $H^1(D, D')$ l'ensemble des homomorphismes conservant l'élément neutre, $U(D)$ l'ensemble des unités (éléments inversibles) de D .

§ 1. Forme universelle du problème (D,S).

Le problème (D,S) est équivalent à un problème d'application universelle [1] : l'espèce de structure T est celle des demi-groupes avec élément neutre (T-ensembles), la famille de T-morphismes est $(H^1(\Delta, \Delta'))_{\Delta, \Delta'} = \text{T-ensembles}$, la famille $(\alpha(\Delta, \Delta'))_{\Delta}$: T-ensemble d' α -applications est définie par $\alpha(\Delta, \Delta) = \{\phi \in H(\Delta, \Delta) \text{ tel que } \phi(S) \subseteq U(\Delta)\}$. Le résultat se déduit du lemme suivant :

Lemme 1 : a) si $\sigma \in H^1(\Delta, \Delta')$ alors $\begin{cases} \sigma(U(\Delta)) \subseteq U(\Delta') \\ \text{et } \forall x \in U(\Delta) : \sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1} \end{cases}$

b) soit $\sigma \in H(\Delta, \Delta')$ et supposons l'existence de e_Δ et $e_{\Delta'}$. Alors :

si $\sigma(\Delta) \cap U(\Delta') \neq \emptyset$ on a : $\sigma \in H^1(\Delta, \Delta')$.

a) c'est une propriété classique.

b) soit $\sigma(x) \in U(\Delta')$ donc $\sigma(x) \cdot \sigma(x)^{-1} = e_{\Delta'}$, et par multiplication à gauche par $\sigma(e_\Delta)$: $\sigma(e_\Delta x) \cdot \sigma(x)^{-1} = \sigma(e_\Delta) \cdot e_{\Delta'}$, soit $\sigma(x) \sigma(x)^{-1} = e_{\Delta'}$, d'où $e_{\Delta'} = \sigma(e_\Delta)$.

Le problème (D,S) étant équivalent à un problème universel, on a :

Proposition 1 : Si (Δ, ϕ) et (Δ', ϕ') sont solutions du problème (D,S) alors

Δ et Δ' sont isomorphes.

On va maintenant construire une solution du problème (D,S) selon une méthode exposée dans (4) pour les catégories de fractions.

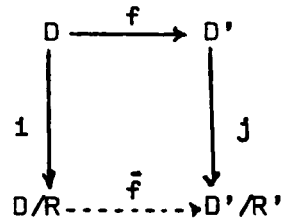
§ 2. Construction d'une solution du problème (D,S).

. Résultats préliminaires.

Congruence engendrée par une relation R_0 sur un demi-groupe D, cf (2).

On l'obtient en trois étapes : soit d'abord $R_1 = R_0 \cup \bar{R}_0^{-1} \cup E_D$ où E_D désigne la relation d'égalité dans D ; on définit ensuite R_2 par $a R_2 b$ ssi : $\exists x, y \in D^1$, $\exists a', b' \in D$ tels que $a = xa'y$, $b = xb'y$ et $a' R_1 b'$, où D^1 désigne D si D possède un élément neutre, et $D \cup \{1\}$ avec $1.x = x.1 = x \quad \forall x \in D$, $1.1 = 1$, si D ne possède pas d'élément neutre ; enfin $\bar{R}_2$ fermeture transitive de R_2 est la congruence engendrée par R_0 .

Lemme 2 : Le diagramme ci contre, où $f \in H(D, D')$
 et où R et R' sont des congruences sur
 D et D' , se ferme commutativement de
 façon unique par $\bar{f} \in H(D/R, D'/R')$ ssi
 $R \subseteq \bar{f}^{-1}(R')$

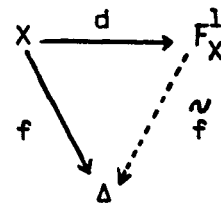


Rappelons que : $x \bar{f}^{-1}(R') y$ ssi $f(x) R' f(y)$. Si $R \subseteq \bar{f}^{-1}(R')$ on posera $\bar{f}(1(x)) = j(f(x))$
 $\bar{f}$ est bien définie et c'est un homomorphisme. Unicité et réciproque sont évidentes.

Le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X : c'est l'ensemble des suites finies,
 ou mots, d'éléments de X , que l'on compose par juxtaposition :

$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_p) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$. Ce demi-groupe ne possède pas
 d'élément neutre et n'est pas commutatif.

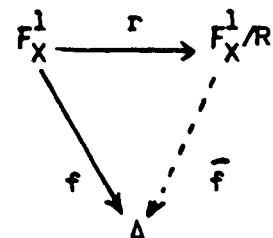
Lemme 3 : Dans le diagramme ci contre d désigne
 l'injection naturelle $x \mapsto (x)$, et Δ
 est un demi-groupe avec élément
 neutre. Alors il existe un unique
 homomorphisme $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f} \circ d = f$,
 et conservant l'élément neutre.



On obtient directement $\tilde{f}$ unique en posant $\tilde{f}((x_1, \dots, x_n)) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$
 $\tilde{f}(e_F) = e_\Delta$

Lemme 4 : Soit le diagramme :

où R est la congruence engendrée par
 une relation R_0 sur F_X^1 , r la sur-
 jection canonique, et f un homo-
 morphisme de demi-groupes. Alors :
 Si $R_0 \subseteq \bar{f}^{-1}(E_\Delta)$ il existe $\bar{f}$ homomor-
 phisme unique tel que $\bar{f} \circ r = f$



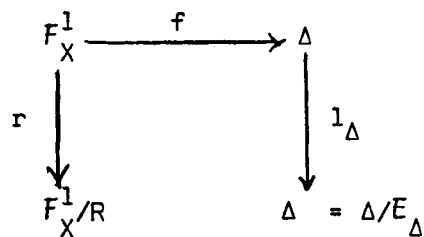
En effet, le diagramme peut s'écrire :

où 1_Δ est l'application identique de Δ .

D'après le lemme 2 il suffit de montrer que $R \subseteq \bar{f}^1(E\Delta)$ ce qui est réalisé puisque

$R_0 \subseteq \bar{f}^1(E_\Delta)$ et que R est la plus fine

congruence contenant R_0 .



. Construction du demi-groupe de fractions $D[S^{-1}]$

Soit $D \amalg S$ la somme directe ensembliste de D et S . On note $in_1 : D \rightarrow D \amalg S$

et $in_2 : S \rightarrow D \amalg S$ les injections canoniques. $D \amalg S$ n'est muni d'aucune structure.

Soit ensuite $d : D \amalg S \rightarrow F_{D \amalg S}^1$ l'injection naturelle, et R_0 la relation sur $F_{D \amalg S}^1$ définie par :

$$a) (in_1 x)(in_1 y) R_0 (in_1 xy) \quad \forall x, y \in D$$

$$b) (in_2 s)(in_1 s) R_0 e_f \quad \forall s \in S$$

$$c) (in_1 s)(in_2 s) R_0 e_f \quad \forall s \in S$$

On note R la congruence engendrée par R_0 , $\bar{x} = r(x)$ la classe de x modulo R ,

$r : F_{D \amalg S}^1 \rightarrow F_{D \amalg S}^1/R = D[S^{-1}]$ la surjection canonique

Posons enfin $\phi_S = r \circ d \circ in_1$ $D \xrightarrow{in_1} D \amalg S \xrightarrow{d} F_{D \amalg S}^1 \xrightarrow{r} D[S^{-1}]$

Théorème 1 : le couple $(D[S^{-1}], \phi_S)$ est solution du problème (D, S) .

On vérifie successivement les conditions $[DS]_1$, $[DS]_2$ et $[DS]_3$

Condition $[DS]_1$:

- . $D[S^{-1}]$ muni de la structure $\sqrt{\quad}$ est bien un demi-groupe avec élément neutre. quotient
- . ϕ_S est un homomorphisme car : $\phi_S(xy) = r_0 d((in_1 xy)) = r((in_1 xy)) = \overline{(in_1 xy)}$
- et : $\phi_S(x)\phi_S(y) = \overline{(in_1 x)}\overline{(in_1 y)}$

d'où le résultat d'après a).

Condition $[DS]_2$:

pour tout $s \in S$ on a $\phi_S(s) = \overline{(in_1 s)}$. On calcul successivement :

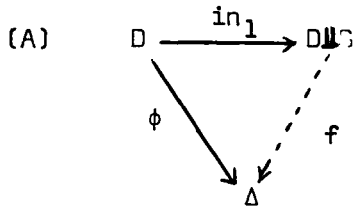
$$\left. \begin{array}{l} \phi_S(s) \cdot \overline{(in_2 s)} = \overline{(in_1 s)} \overline{(in_2 s)} = \bar{e}_F \quad \text{d'après c)} \\ \overline{(in_2 s)} \phi_S(s) = \overline{(in_2 s)} \overline{(in_1 s)} = \bar{e}_F \quad \text{d'après b)} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_S(s)^{-1} = \overline{(in_2 s)}$$

Remarquons que si e_D existe on aura $\phi_S(e_D) = \bar{e}_F = e_D[s^{-1}]$

Condition $[DS]_3$:

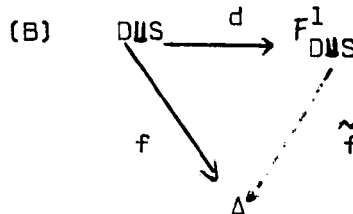
soit (Δ', ϕ') un couple vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$.

existence de σ on procède de proche en proche de la façon suivante :

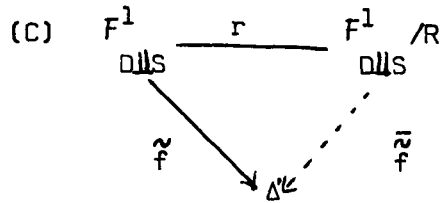


il existe une unique application $f : D||S \rightarrow \Delta'$
telle que $\begin{cases} f \circ in_1 = \phi' \\ \text{et } f(in_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S \end{cases}$

Ces deux conditions définissent en effet f de façon unique.



d'après le lemme 3 il existe un unique
homomorphisme $\tilde{f}$ tel que $\begin{cases} \tilde{f} \circ d = f \\ \tilde{f}(e_F) = e_\Delta \end{cases}$



on a : $R_0 \subseteq f^{-1}(E_\Delta)$, c'est à dire que
si $a R_0 b$ alors $f(a) = f(b)$. En effet,
supposons que $a R_0 b$; ceci peut avoir
lieu dans les trois cas suivants :

a) $a = (in_1 x)(in_1 y)$ alors $\tilde{f}(a) = f(in_1 x)f(in_1 y) = \phi'(x) \cdot \phi'(y) = \phi'(xy)$
 $b = (in_1 xy)$ $= f(in_1 xy) = \tilde{f}(b)$

b) $a = (in_2 s)(in_1 s)$ alors $\tilde{f}(a) = f(in_2 s) \cdot f(in_1 s) = \phi'(s)^{-1} \cdot \phi'(s) = e_\Delta = \tilde{f}(b)$
 $b = e_F$ car $\tilde{f}$ conserve l'élément neutre d'après (B).

c) $a = (in_1 s)(in_2 s)$ le cas se traite comme au b)
 $b = e_F$

D'après le lemme 4 il existe donc un unique homomorphisme $\tilde{f} = \sigma$ tel que $\sigma \circ r = \tilde{f}$. Il en résulte :

$$\sigma \circ \phi_S = \sigma \circ r \circ d \circ \text{in}_1 = \tilde{f} \circ d \circ \text{in}_1 = f \circ \text{in}_1 = \quad .$$

Unicité de σ

Supposons que $\sigma'_0 \phi_S = \sigma \circ \phi_S = \phi'_S$ et montrons que $\sigma' = \sigma$

Pour cela nous utilisons les unicités signalées ci-dessus en (A), (B) et (C) :

il faut donc d'abord vérifier les propriétés correspondantes pour σ' :

$$\begin{aligned} \text{(B)'} \quad \sigma'_0 r(e_F) &= e_{\Delta}, \text{ car } \sigma'((\overline{\text{in}_1 s}))^{-1} \text{ existe et c'est } \phi'(s)^{-1} \\ &\text{puisque } \sigma'((\overline{\text{in}_1 s})) = \sigma'_0 r \circ d \circ \text{in}_1(s) = \sigma'_0 \phi_S(s) = \phi'(s) \\ &\text{d'où le résultat d'après le lemme 1.} \end{aligned}$$

$$\text{(C)'} \quad R \subseteq \sigma'^{-1}_0 r(E_{\Delta},) \text{ car } a R_0 b \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \text{ ie } \sigma'_0 r(a) = \sigma'_0 r(b)$$

$$\text{(4)'} \quad \sigma'_0 r \circ d(\text{in}_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S$$

D'après (B)' il nous suffit de démontrer que $\sigma'((\overline{\text{in}_2 s})) = \sigma'((\overline{\text{in}_1 s}))^{-1}$

$$\left. \begin{aligned} \text{en effet : condition b) et (C')} &\Rightarrow \sigma'((\overline{\text{in}_2 s})) \sigma'((\overline{\text{in}_1 s})) = \sigma'(\bar{e}_F) = e_{\Delta}, \\ \text{condition c) et (C')} &\Rightarrow \sigma'((\overline{\text{in}_1 s})) \sigma'((\overline{\text{in}_2 s})) = \sigma'(\bar{e}_F) = e_{\Delta}, \end{aligned} \right\} \text{ d'où}$$

$$\sigma'((\overline{\text{in}_2 s})) = \sigma'((\overline{\text{in}_1 s}))^{-1} = \phi'(s)^{-1}$$

On a alors successivement :

$$- \sigma'_0 r \circ d = f \quad \text{en effet : } \begin{cases} (\sigma'_0 r \circ d) \circ \text{in}_1 = \phi' \text{ par hypothèse} \\ \sigma'_0 r \circ d(\text{in}_2 s) = \phi'(s)^{-1} \quad \forall s \in S \text{ d'après (A)'} \end{cases}$$

et on applique (A) : unicité de f

$$- \sigma'_0 r = \tilde{f} \quad \text{car } \begin{cases} (\sigma'_0 r) \circ d = f \\ \sigma'_0 r(e_F) = e_{\Delta}, \text{ d'après (B)'} \end{cases}$$

et on applique (B) : unicité de $\tilde{f}$

$$- \sigma' = \sigma \quad \text{car } \begin{cases} \sigma'_0 r = \tilde{f} \\ R \subseteq \sigma'^{-1}_0 r(E_{\Delta},) \text{ d'après (C')} \end{cases}$$

et on applique (C) : unicité de $\tilde{f} = \sigma$

On notera $(D[S^{-1}], \phi_S)$ la solution ainsi construite, qui est donc unique à un isomorphisme près. $[;^{-1}]$ est appelé demi-groupe de fractions de D par rapport à S .

Remarque 1 : d'après la construction, tout élément ξ de $D[S^{-1}]$ s'écrit :

$$\xi = \phi_S(x_1)^{\alpha_1} \cdot \phi_S(x_2)^{\alpha_2} \dots \phi_S(x_n)^{\alpha_n} \text{ avec pour tout } i = 1, 2, \dots, n :$$

$$x_i \in D \text{ et } \alpha_i = \pm 1 \text{ et si } \alpha_i = -1 \quad x_i \in S$$

En d'autres termes $\phi_S(D) \cup \phi_S^{-1}(S)$ est un système générateur de $D[S^{-1}]$, ce que l'on écrit : $D[S^{-1}] = \langle \phi_S(D) \cup \phi_S^{-1}(S) \rangle$

Remarque 2 : il résulte du lemme 1 que si e_D existe alors $\phi_S \in H^1(D, D[S^{-1}])$

§ 3. Quelques propriétés de $D[S^{-1}]$.

Soit $\tilde{S} = \langle S \rangle$ sous demi groupe engendré par S .

Théorème 2 : $D[S^{-1}]$ et $D[\tilde{S}^{-1}]$ sont isomorphes.

Montrons que $(D[\tilde{S}^{-1}], \phi_{\tilde{S}})$ est solution du problème (D, S) :

$[DS]_1$ évident

$[DS]_2 \quad \forall s \in S \quad \phi_{\tilde{S}}(s)^{-1}$ existe car $S \subseteq \tilde{S}$

$[DS]_3$ soit (Δ', ϕ') vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$ donc $\phi'(S) \subseteq U(\Delta')$; or

$U(\Delta')$ est un sous-groupe de Δ' d'où $\phi(\tilde{S}) \subseteq U(\Delta')$ i.e. (Δ', ϕ')

vérifie $[D\tilde{S}]_1$ et $[D\tilde{S}]_2$ donc il existe σ unique tel que $\sigma \circ \phi_{\tilde{S}} = \phi'$

Alors, $D[S^{-1}]$ et $D[\tilde{S}^{-1}]$ étant solutions du même problème universel sont isomorphes.

Corollaire : Soit $\tilde{\tilde{S}} = \langle S \rangle \cup U(D)$ et supposons $U(D) \neq \{$

$$\text{Alors : } D[S^{-1}] \simeq D[\tilde{S}^{-1}] \simeq D[\tilde{\tilde{S}}^{-1}]$$

Montrons de même que $(D[\tilde{\tilde{S}}^{-1}], \phi_{\tilde{\tilde{S}}})$ est solution du problème (D, S) :

$[DS]_1, [DS]_2$ évident

$[DS]_3$ soit (Δ', ϕ') tel que $[DS]_1$ et $[DS]_2$ donc $\phi'(S) \subseteq U(\Delta')$ et

$\phi'(\tilde{\tilde{S}}) \subseteq U(\Delta')$. Or ϕ' conserve l'élément neutre (lemme 1) donc

$\phi'(U(D)) \subseteq U(\Delta')$ (lemme 1) d'où :

$\phi'(\tilde{S}) \subseteq \phi'(\tilde{S}) \cup \phi'(U(D)) \subseteq U(\Delta') \cup \phi'(U(D)) = U(\Delta')$; le couple

(Δ', ϕ') vérifie donc $[D\tilde{S}]_1$ et $[D\tilde{S}]_2$, on a alors un unique σ tel

que $\sigma \circ \phi_S^\vee = \phi'$.

Proposition 2 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) ϕ_S est un isomorphisme.

b) $S \subseteq U(D)$

$a \Rightarrow b$: il e' est l'élément neutre de $D[S^{-1}]$ et $\bar{\phi}_S^{-1}$ l'isomorphisme réciproque :

$\forall x \in D \quad \exists x' \in D[S^{-1}]$ tel que $x = \bar{\phi}_S^{-1}(x')$ donc $x \cdot \bar{\phi}_S^{-1}(e') = \bar{\phi}_S^{-1}(x'e') = \bar{\phi}_S^{-1}(x') = x$

et de même $\bar{\phi}_S^{-1}(e')x = x$. Donc $e_D = \bar{\phi}_S^{-1}(e')$ est l'élément neutre de D et

$\bar{\phi}^{-1} \in H^1(D[S^{-1}], D)$. D'après le lemme 1 on a alors

$S = \bar{\phi}_S^{-1}(\phi_S(S)) \subseteq \bar{\phi}_S^{-1}(U(D[S^{-1}])) \subseteq U(D)$

$b \Rightarrow a$: montrons que (D, l_D) est solution du problème (D, S) :

$[DS]_1$ évident.

$[DS]_2$ évident.

$[DS]_3$ si (Δ', ϕ') vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ il existe un unique σ tel que

$\sigma \circ l_D = \phi'$: c'est $\sigma = \phi'$.

On en déduit que $D[U(D)^{-1}] \simeq D$. Retenons seulement que le couple (D, l_D)

vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ ainsi que le couple $(D[S^{-1}], \phi_S)$. Comme ce dernier est

solution du problème (D, S) on a :

$\left. \begin{array}{l} \text{. un unique } \sigma \text{ tel que } \sigma \circ \phi_S = l_D \text{ donc } (\phi_S \circ \sigma) \circ \phi_S = \phi_S \\ \text{. un unique } \rho \text{ tel que } \rho \circ \phi_S = \phi_S \text{ donc } \rho = l_{D[S^{-1}]} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} \phi_S \circ \sigma = \rho = l_{D[S^{-1}]} \\ \text{or } \sigma \circ \phi_S = l_D \end{array} \right\} \quad \phi_S \text{ est donc un isomorphisme.}$

Proposition 3 : Considérons le diagramme :

où f est un homomorphisme,

T un complexe de D'

et où $f(S) \subseteq T$. Alors il existe

$\hat{f}$ unique tel que $\hat{f} \circ \phi_S = \phi_T \circ f$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D' \\ \phi_S \downarrow & & \downarrow \phi_T \\ D[S^{-1}] & \xrightarrow{\hat{f}} & D'[T^{-1}] \end{array}$$

En effet le couple $(D'[T^{-1}], \phi_T \circ f)$ vérifie $[DS]_1$ et $[DS]_2$ car $f(S) \subseteq T$ et la condition $[DS]_3$ entraîne alors l'existence de l'unique $\hat{f}$ tel que $\hat{f} \circ \phi_S = \phi_T \circ f$

Remarque : $\hat{f}$ conserve l'élément neutre car si $s \in S$ $\hat{f}[\phi(s)]$ est inversible et son inverse est $[\phi_T \circ f(s)]^{-1}$ d'où le résultat d'après le lemme 1

Corollaire : Si de plus f est surjectif alors $\hat{f}$ aussi cf. (3).

Cas particulier : $S = D$ et $T = D'$; il est facile de voir qu'alors $D[D^{-1}]$ est un groupe engendré par $\phi_D(D)$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D' \\ \phi_D \downarrow & & \downarrow \phi_{D'} \\ D[D^{-1}] & \xrightarrow{\hat{f}} & D'[D'^{-1}] \end{array}$$

où $\hat{f}$ est un homomorphisme de groupes,

car il conserve l'élément neutre d'après

la remarque précédente donc $\hat{f}(x)^{-1} = \hat{f}(x^{-1})$

d'après le lemme 1.

Ceci permet de définir un foncteur ϕ de la catégorie $\mathbb{D}$ des demi-groupes dans la catégorie $\mathbb{G}$ des groupes :

$$\phi(D) = D[D^{-1}] \quad \text{pour tout } D \in \text{Ob } \mathbb{D}$$

$$\phi(f) = \hat{f} \quad \text{pour tout } f \in \text{Hom } \mathbb{D}$$

le fait que $\hat{g} \circ f = \hat{g} \circ \hat{f}$ est dû à l'unicité de $\hat{g} \circ f$. Pour la même raison : $\phi(1_D) = 1_{D[D^{-1}]}$

§ 4. Fractions à droite.

Un élément ξ de $D[S^{-1}]$ est une fraction à droite s'il peut s'écrire

$\xi = \phi_S(a) \phi_S(s)^{-1}$ avec $a \in D$, $s \in \langle S \rangle$ sous-demi groupe engendré par S . Si tout $\xi \in D[S^{-1}]$

est une fraction à droite, $D[S^{-1}]$ est appelé demi-groupe de fractions à droite de

D par rapport à S .

Théorème 3 : $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite si et seulement si :

le couple (D, S) vérifie la condition $(Sd) \bmod R_{\phi_S}$:

$$\forall (a, s) \in DXS \quad \exists (a', s') \in L \times \langle S \rangle \quad \text{tel que } as'R_{\phi_S} sa'$$

Pour que tout élément soit une fraction à droite il faut et il suffit que tout élément de la forme $\phi(s)^{-1} \phi(a)$, $a \in D$, $s \in S$ puisse s'écrire $\phi(b) \phi(t)^{-1}$ $b \in D$, $t \in \langle S \rangle$ c'est-à-dire $\phi(s)^{-1} \phi(a) = \phi(b) \phi(t)^{-1}$ ou bien $\phi(at) = \phi(sb)$ ie $atR_{\phi_S} sb$.

On sait construire, cf (5), la plus fine congruence simplifiable par les éléments d'une partie S de D . Soit R_S cette congruence, R_{ϕ_S} étant une congruence simplifiable dans S on a donc $R_S \subseteq R_{\phi_S}$. Mais on peut démontrer, cf (3) que les conditions $(Sd) \bmod R_{\phi_S}$ et $(Sd) \bmod R_S$ sont équivalentes, et que si l'une des deux est vérifiée alors $R_{\phi_S} = R_S$.

§.5 Immersion de D dans $D[S^{-1}]$.

Théorème 4 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) D est immersible dans $D[S^{-1}]$
- b) S est simplifiable dans D et $R_{\phi_S} \subseteq R_S$
- c) $R_{\phi_S} = E_D$
- d) $\forall x, y \in D$ tels que $x \neq y$ il existe un couple (Δ, ϕ) vérifiant $[DS]_1$ et $[DS]_2$ et tel que $\phi(s) \neq \phi(y)$
- e) la clôture de tout système de S -équations de Malcev est valide dans D

L'équivalence de a) b) et c) est évidente car S est simplifiable ssi $R_S = E_D$. a) $\sim$ d) c'est une propriété d'injectivité pour la solution d'un problème universel cf (1).

c) $\sim$ d) la condition e) est la généralisation de la condition de Malcev cf (2), (3).

Corollaire : Si S est simplifiable dans D et si $(Sd) \text{mod } E_D$, ou bien $(Sg) \text{mod } E_D$ condition duale, est vérifiée, alors :

D est immersible dans $D[S^{-1}]$.

En effet on a alors d'après le § 4 : $R_{\phi_S} = R_S = E_D$. Cette condition est la condition de Ore généralisée, cf (5) : si $(Sd) \text{mod } E_D$ est vérifiée, $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite dans lequel D est immergé.

§ 6. Immersion de D dans un groupe.

On a vu que si $S = D$, $D[S^{-1}]$ est un groupe. D'après le théorème 2 et son corollaire, on a plus généralement : si S est un système générateur de $D-\mathcal{U}(D)$ supposé non vide (ie D n'est pas un groupe) alors $D[S^{-1}]$ est un groupe. Soit Γ l'ensemble des systèmes générateurs de $D-\mathcal{U}(D)$:
 $S \in \Gamma$ ssi $\langle S \rangle = D-\mathcal{U}(D)$.

Théorème 5 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) D est immersible dans un groupe

b) il existe $S \in \Gamma$ tel que D soit immersible dans $D[S^{-1}]$

$a \Rightarrow b$ soit $\phi' : D \rightarrow G$ injectif, alors (G, ϕ') est un couple vérifiant les conditions $[DD]_1$ et $[DD]_2$ donc il existe σ unique tel que $\sigma \circ \phi_D = \phi'$ or ϕ' est injectif donc ϕ_D aussi. Comme $D[D-\mathcal{U}(D)^{-1}] \simeq D[D^{-1}]$ on a $\phi_{D-\mathcal{U}(D)}$ injectif cqfd, puisque $D-\mathcal{U}(D) \in \Gamma$

$b \Rightarrow a$ évident car $D[S^{-1}]$ est un groupe.

Ce résultat montre que le problème de l'immersion dans un groupe est un cas particulier du problème de l'immersion dans un demi-groupe de fractions. On peut donc appliquer les résultats du théorème 4 avec $S \in \Gamma$, la condition e) devient alors exactement celle de Malcev. Et d'après le corollaire de ce même théorème :

Corollaire : S'il existe $S \in \Gamma$ tel que S soit simplifiable et que $(Sd) \text{mod } E_D$ soit vérifiée (ou bien $(Sg) \text{mod } E_D$) alors D est immersible dans un groupe qui est un groupe de fractions à droite (resp. à gauche).

Ces conditions sont équivalentes à celles de Ore cf (2).

Remarques : Si $D[S^{-1}]$ est un groupe alors D ne possède pas de zéro à gauche, ni à droite, ou bien $\text{card } D = 1$.

. si D est immersible dans un groupe et s'il possède un idempotent e alors e est l'élément neutre de D et l'unique idempotent de D .

. pour tout $S \in I$ $D[S^{-1}] \simeq D[D^{-1}]$

Appendice : D-groupes libres.

Soit D un demi-groupe : un groupe G est un D -groupe, cf (2), s'il existe $\phi \in H(D, G)$ tel que G soit engendré par $\phi(D)$ ie $G = \langle \phi(D) \cup \bar{\phi}^{-1}(D) \rangle$.

Un groupe G est un D -groupe libre si :

- 1) G est un D -groupe ; soit ϕ l'homomorphisme associé
- 2) pour tout D -groupe G' d'homomorphisme associé ϕ' il existe σ unique tel $\sigma \circ \phi = \phi'$

On a vu (§ 2 remarque 1) que $D[D^{-1}] = \langle \phi_D(D) \cup \bar{\phi}_D^{-1}(D) \rangle$ $D[D^{-1}]$ est donc un D -groupe ; de plus la condition 2) est réalisée car elle moins forte que $[DD]_3$. Il s'ensuit :

- . que $D[D^{-1}]$ est un D -groupe libre
- . que tous les D -groupes libres sont isomorphes.
- . que, en particulier, le D -groupe libre défini dans (2) est isomorphe à $D[D^{-1}]$.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) BOURBAKI : Théorie des ensembles ch. 4 - Structures.
- (2) CLIFFORD et : The algebraic theory of semi-groups (Am. Math. Soc. 1961).
PRESTON
- (3) FAISANT : Rapport de D.E.A. 1968 et Séminaires P. Lefebvre 1968-69
(Lyon)
- (4) GABRIEL et : Calculus of fractions and homotopy theory.
ZISMAN (Springer Verlag 1967).
- (5) LEFEBVRE : Semi-groups and Rings of fractions
(University of Tennessee 1968, Knoxville U.S.A.).

Manuscrit remis le 15 mars 1969.

A. FAISANT
 Assistant
 Département de Mathématiques
 43, bd du 11 novembre 1918
 VILLEURBANNE