HENRI BUCHWALTER

Espaces de Banach et dualité

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 2
, p. 2-61

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_2_2_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-2

ESPACES DE BANACH ET DUALITE

Henri BUCHWALTER

Il s'agit de la mise en forme d'une construction des produits tensoriels d'espaces de Banach, exposée dans un cours de 3ème cycle en 1965-66, et basée sur des propriétés essentiellement catégoriques. S'il n'était question que de construire le bifoncteur $\hat{\otimes}$, produit tensoriel projectif, il ne serait pas nécessaire de sortir de la catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach, car chacun sait que ce bifoncteur $\hat{\otimes}$ est défini comme adjoint à gauche au bifoncteur Hom.

En fait nous reprenons partiellement, en 1 et 2, les résultats établis par L. Waelbroeck dans [4], en les démontrant quelque peu différemment. L'introduction de la catégorie $\mathbb{W}$ des espaces de Waelbroeck, duale de la catégorie $\mathbb{B}$, va permettre ensuite une construction tout à fait symétrique, en 4 et 5, des produits tensoriels dans $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$.

Les principales propriétés de ces produits tensoriels sont des conséquences simples de propriétés de commutation, qui semblent nouvelles, attachées à deux types d'adjonction de foncteurs. Le paragraphe 3 étudie précisément les L-adjonction et L-adjonction définies à partir des deux bifoncteurs mixtes fondamentaux L et L.

Le point de vue fonctoriel, choisi une fois pour toutes, amène alors, tout naturellement à parler d'applications intégrales, d'applications nucléaires et de produits tensoriels $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\bar{\bar{\otimes}}$. Les paragraphes 6,7 et 8 sont consacrés à ces notions qui diffèrent légèrement de celles introduites par Grothendieck dans [1]. En particulier nous montrons, en 8, la symétrie parfaite qui existe entre applications intégrales et applications nucléaires telles que nous les définissons.

Le paragraphe 9 reprend le problème classique d'approximation en l'interprétant fonctoriellement. Nous donnons, en (9,5), une condition en apparence plus faible que celles rencontrées jusque là, mais peu maniable, pour qu'un espace de Banach possède la propriété d'approximation.

Nous nous sommes volontairement limité aux espaces de Banach. Les extensions aux catégories de limites projectives formelles et de limites inductives formelles redonnent de nombreux résultats concernant les produits tensoriels d'espaces localement convexes complets.

Enfin notons que tous les espaces vectoriels qui interviennent sont définis sur le corps K des nombres réels ou des nombres complexes. Une généralisation à des corps valués localement compacts parait largement possible à partir du moment où, le théorème de Hahn-Banach étant supposé valable, la caractérisation de la catégorie $\mathbf{W}$ comme duale de la catégorie $\mathbf{B}$ est obtenue.

TABLE DES MATIERES

1 - La catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach.

Les objets de $\mathbb{B}$ sont les couples (X,A) formés d'un espace de Banach X et de sa boule unité (fermée) A. Les morphismes $u : (X,A) \rightarrowtail (Y,B)$ sont les applications linéaires de X dans Y telles que $u(A) \subset B$.

Autrement dit l'ensemble $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est exactement la boule unité de l'espace de Banach des applications linéaires continues de X dans Y. Il est donc naturel de considérer sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ la structure <u>disquée</u> associée. Ainsi, pour deux morphismes u et $v : X \to Y$ et pour deux scalaires λ, μ tels que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, on définit le morphisme $\lambda u + \mu v : X \to Y$.

On aperçoit qu'avec ce choix des morphismes la catégorie $\mathbb{B}$ n'est pas additive. Mais on se rendra compte, dans la suite, que la structure disquée de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ offre des avantages comparables à ceux d'une structure de groupe abélien.

<u>Exemple de morphismes.</u>

Soit H un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> d'un espace de Banach X. On sait que H, muni de la norme induite, et X/H, muni de la norme quotient, sont des espaces de Banach. Il est clair que l'injection canonique : $H \to X$ et la surjection canonique : $X \to X/H$ sont des morphismes.

1.1 Monomorphismes. Epimorphismes.

La catégorie $\mathbb{B}$ admet comme objet nul l'espace, noté 0, réduit à (o) ; de sorte que $\mathrm{Hom}(X,Y)$ contient le morphisme nul. Il résulte de là que, dans $\mathrm{Hom}(X,Y)$, l'égalité $u = v$ est équivalente à l'égalité $\frac{u-v}{2} = o$. On aura donc tout comme dans une catégorie abélienne :

Un morphisme $u : X \to Y$ est un monomorphisme (resp : un épimorphisme) si pour tout morphisme $v : Z \to X$ (resp : $v : Y \to Z$) la condition $uv = 0$

(resp : $vu = o$) est équivalente à la condition $v = o$.

D'où l'on tire aisément :

(1.1.1) Proposition : Pour qu'un morphisme $u : X \to Y$ soit un monomorphisme (resp : un épimorphisme) il faut et il suffit qu'il soit injectif (resp : que le sous-espace $u(X)$ soit dense dans Y).

(1.1.2) Proposition : Un isomorphisme $u : X \to Y$ est exactement une isométrie surjective.

Remarque. Ici apparait tout l'intérêt de notre choix des morphismes de la catégorie $\mathbb{B}$. En effet deux espaces de Banach X et Y, isomorphes en tant qu'objets de $\mathbb{B}$ pourront être algèbriquement confondus avec identification de leurs normes. Ainsi chaque fois que nous construirons un espace de Banach X, défini à un isomorphisme près comme solution d'un problème universel de la catégorie $\mathbb{B}$, nous serons sûrs que X, ainsi que sa norme se détermineront sans aucune ambiguité. Il n'en aurait pas été de même si nous avions choisi d'appeler morphismes les applications linéaires continues ; la catégorie obtenue aurait été additive et un espace de Banach, défini à un isomorphisme près, aurait en sa topologie bien déterminée pais sa norme déterminée seulement à une équivalence près.

1.2 Noyau. Conoyau. Image. Coimage. Morphismes stricts.

Dans la catégorie $\mathbb{B}$ tout morphisme $u : X \to Y$ admet un noyau et un conoyau. En désignant par $u^{-1}(o)$ le sous-espace fermé de X noyau de l'application linéaire u, et par $\overline{u(X)}$ l'adhérence de $u(X)$ dans Y, nous voyons que le morphisme $\mathrm{Ker}(u)$ est exactement l'injection canonique $\mathrm{Ker}(u) : u^{-1}(o) \to X$ et le morphisme $\mathrm{Coker}(u)$ la surjection canonique $\mathrm{Coker}(u) : Y \to Y/\overline{u(X)}$.

Il en résulte que u est un monomorphisme (resp : un épimorphisme) si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = o$ (resp : $\mathrm{Coker}(u) = o$).

On peut donc définir l'image et la coimage d'un morphisme $u : X \to Y$ par :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(u)) : \overline{u(X)} \to Y$$

$$\mathrm{Coim}(u) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(u)) : X \to X/\overset{-1}{u}(o)$$

ce qui conduit naturellement à la décomposition canonique d'un morphisme dans la catégorie $\mathbb{B}$ selon :

(1.2.1) <u>Proposition</u>. Pour tout morphisme $u : X \to Y$, il existe un bimorphisme unique $\tilde{u} : X/\overset{-1}{u}(o) \to \overline{u(X)}$ tel que $u = \mathrm{Im}(u).\tilde{u}.\mathrm{Coim}(u)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{Coim}(u)"'] & Y \\
X/\overset{-1}{u}(O) \arrow[r, "\tilde{u}"'] & \overline{u(X)} \arrow[u, "\mathrm{Im}(u)"']
\end{tikzcd}$$

On dira alors que u est un <u>morphisme strict</u> si et seulement si le bimorphisme $\tilde{u}$ est un isomorphisme. La caractérisation suivante des morphismes stricts s'obtient immédiatement :

(1.2.2) <u>Proposition</u> : Soient X et Y deux espaces de Banach, de boules ouvertes respectives $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{B}$. Pour qu'un morphisme $u : X \to Y$ soit strict il faut et il suffit que :

a) $u(X)$ soit fermé dans Y;

b) $u(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B} \cap u(X)$.

<u>Corollaire 1</u>. Pour que u soit un épimorphisme strict (épi strict) il faut et il suffit que $u(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}$. En particulier un épi strict est surjectif.

<u>Corollaire 2</u>. Pour que u soit un monomorphisme strict (mono strict) il faut et il suffit que ce soit une isométrie sur un sous-espace fermé de Y.

En particulier, pour tout morphisme u, Ker(u) et Im(u) sont des mono stricts tandis que Coker(u) et Coim(u) sont des épi stricts.

Remarque. Le théorème de Baire-Banach, que nous retrouverons dans la suite, permet d'améliorer la caractérisation des épi-stricts donnée dans le corollaire 1.

1.3 Produits directs et sommes directes.

Le choix des morphismes implique que $\mathbb{B}$ est une catégorie complète à droite et à gauche. Elle admet en particulier des produits directs et des sommes directes quelconques. Une démonstration standard fournit :

(1.3.1) Proposition : Soit I un ensemble quelconque non vide et soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach indéxée par I.

a). Le produit $P = \Pi X_i$ est exactement l'espace vectoriel des familles $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$, où $x_i \in X_i$, telles que $\sup_i \|x_i\| < +\infty$ muni de la norme :

$$\|\bar{x}\|_P = \sup_i \|x_i\|$$

b). La somme $S = \Sigma X_i$ est exactement l'espace vectoriel des familles $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$, où $x_i \in X_i$, telles que $\sum_i \|x_i\| < +\infty$ muni de la norme :

$$\|\bar{x}\|_S = \sum_i \|x_i\|$$

Remarques 1 - On peut voir que les surjections canoniques $p_k : P \to X_k$ sont des épi-stricts tandis que les injections canoniques $j_k : X_k \to S$ sont des mono-stricts.

2 - Lorsque tous les espaces X_i sont égaux à un même espace X on reconnait dans le produit $P = X^I$ l'espace des familles bornées (x_i) d'éléments de X, noté habituellement $\ell^\infty_I(X)$, et dans la somme $S = X^{(I)}$ l'espace des familles absolument sommables d'éléments de X, noté habituellement $\ell^1_I(X)$.

Par exemple lorsque X est le corps des scalaires $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on a $K^I = \ell^\infty_I$ et $K^{(I)} = \ell^1_I$.

3 - La catégorie $\mathbb{B}$ n'étant pas additive, le produit $X \Pi Y$ diffère en général de la somme $X \Sigma Y$, puisque sur ces deux espaces les normes ne sont

pas les mêmes.

1.4 Foncteurs.

Etant donnés deux espaces de Banach (X,A) et (Y,B) nous dirons qu'une application $f : A \to B$ est disquée lorsque pour tout couple x,y de points de A et tout couple λ,μ de scalaires tel que $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$ on a l'égalité :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

En particulier si f est un morphisme : $X \to Y$ sa restriction à A est une application disquée. Nous allons voir que les applications disquées s'obtiennent toutes de cette façon puisque :

Lemme. Soit $f : A \to B$ une application disquée. Alors f se prolonge de façon unique en un morphisme $\overline{f} : X \to Y$.

En effet tout $x \in X$ s'écrit $x = \lambda a$ où $a \in A$. En posant $f(x) = \lambda f(a)$ on constate qu'on définit correctement une fonction $\overline{f}$ car $\lambda a = \lambda' a'$ entraine, à supposer $|\lambda| \leqslant |\lambda'|$ et $\lambda' \neq 0$ (si $x \neq 0$), $a' = \frac{\lambda}{\lambda'} a$, donc $\lambda' f(a') = \lambda f(a)$. De plus $\overline{f}$ est homogène de façon évidente. Enfin si $x = \lambda a$ et $y = \mu b$ on peut écrire $x + y = (|\lambda|+|\mu|)(\frac{\lambda a}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{\mu b}{|\lambda|+|\mu|})$ ce qui amène à la linéarité de $\overline{f}$.

De la même façon on peut dégager la notion d'application bidisquée, c'est-à-dire d'application du produit $A \times B$ des deux boules unités de deux espaces de Banach X et Y dans la boule unité C d'un espace de Banach Z qui soit disquée par rapport à chacune des variables. On montre alors sans peine qu'une application bidisquée $f : A\times B \to C$ se prolonge de façon unique en une application bilinéaire $\overline{f} : X\times Y \to Z$.

Foncteurs et bifoncteurs.

Etant donné un foncteur $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, covariant ou contravariant, nous lui imposerons (de même que sur une catégorie additive, on ne retient que les foncteurs additifs) de conserver les structures disquées. De façon précise nous demanderons que l'application $F : u \to F(u)$ de $Hom(X,Y)$ dans $Hom(F(X),F(Y))$ (lorsque F est covariant) soit disquée.

De même si F est un bifoncteur nous imposerons qu'il induise sur les morphismes une application bidisquée.

2 - La catégorie $\mathbb{W}$ des espaces de Waelbroeck.

La catégorie $\mathbb{W}$ a été récemment introduite par L. Waelbroeck dans l'article [4]. Nous en reprenons ici l'étude, en modifiant les morphismes, et en nous proposant de montrer le rôle efficace qu'elle peut et doit jouer dans la construction des produits tensoriels d'espaces de Banach.

2.1 Description de $\mathbb{W}$.

Les objets de la catégorie $\mathbb{W}$ sont les triplets (X,A,τ_A), où X est un espace vectoriel, A un disque absorbant de X, et τ_A une topologie sur A vérifiant :

1) A est compact pour τ_A ;

2) Pour tout $a \in A$ l'application $x \to \frac{a+x}{2}$ de A dans A est continue pour τ_A ;

3) L'origine admet dans A une base de voisinages disqués.

Les morphismes $u : (X,A,\tau_A) \to (Y,B,\tau_B)$ entre deux objets de $\mathbb{W}$ sont les applications disquées de A dans B qui sont continues pour les topologies τ_A et τ_B .

Il est clair que, de même que dans la catégorie $\mathbb{B}$, l'ensemble $Hom(X,Y)$ est muni d'une structure disquée puisque l'on peut définir le morphisme $\lambda u + \mu v$ pour tout couple u,v de morphismes et tout couple de scalaires λ,μ tel que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Puisque A est τ_A-compact il existe sur A une unique structure uniforme $\mathcal{U}_A$ compatible avec la topologie τ_A. Les résultats de L. Waelbroeck garantissent que $\mathcal{U}_A$ est complètement déterminée non seulement par la topologie τ_A , mais en fait par la base de filtre $\mathcal{V}$ des voisinages disqués de l'origine dans A. En effet :

(2.1.1) Proposition [4]. La structure uniforme $\mathcal{U}_A$ admet pour base d'entourages les ensembles U_V associés aux voisinages disqués V $\mathcal{V}$ selon :

$$(x,y) \in U_V \iff \frac{x-y}{2} \in V$$

On tire de là successivement :

Corollaire 1. Pour qu'une application disquée $u : A \to \mathcal{B}$ soit un morphisme il suffit qu'elle soit continue à l'origine de A .

Corollaire 2. Pour tout couple de scalaires λ,μ tel que $|\lambda|+|\mu|\leq 1$ l'application $(x,y) \to \lambda x+\mu y$ de $A\times A$ dans A est continue.

Corollaire 3. L'origine possède, dans A , une base de voisinages formée de disques fermés (donc compacts) pour la topologie τ_A.

Car le corollaire 2 implique que, dans A, l'adhérence d'un disque est encore un disque.

2.2 Les topologies T_c et T_ω sur un espace de Waelbroeck.

L'introduction de topologies particulières sur un espace de Waelbroeck va permettre la démonstration du théorème essentiel de Waelbroeck, à savoir que les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$ sont, à une équivalence près, duales l'une de l'autre.

La topologie T_c est par définition la topologie localement convexe la plus fine sur X rendant continue l'injection $A \to X$, c'est-à-dire induisant sur A une topologie moins fine que τ_A. On peut caractériser les voisinages de 0 pour cette topologie T_c par :

(2.2.1) Proposition : La topologie T_c admet pour base de voisinages de 0 les disques W de X tel que, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, il existe un voisinage V de 0 dans A vérifiant $V \subset \lambda W$.

On commence par remarquer, grâce à la compacité de A , que tout voisinage de 0 dans A est absorbant dans A , donc aussi dans X . A partir de là, si l'on désigne par $\mathcal{W}$ l'ensemble des disques W de X vérifiant la propriété en question, on montre que $\mathcal{W}$ est une base de voisinages de 0 pour une topologie T localement convexe sur X. Comme T_c est manifestement moins fine que T et que T rend continue l'injection $A \to X$, ces deux topologies sont égales.

La topologie T_ω est par définition la topologie la plus fine sur X rendant continues les translations et les homothéties de X ainsi que l'injection $A \to X$. Elle n'est pas à priori localement convexe, ni même compatible avec la structure vectorielle de X. Evidemment elle est plus fine que la topologie T_c.

En fait on peut démontrer du même coup, ce qui est la clé du théorème de Waelbroeck que les topologies T_c et T_ω sont égales et qu'elles sont séparées. On obtiendra même de cette façon l'un des aspects, pour les espaces de Banach, du théorème de Banach-Dieudonné.

(2.2.2) Théorème (Waelbroeck et Banach-Dieudonné).

Les topologies T_ω et T_c sont égales et séparées.

Il suffit de prouver que T_ω est moins fine que T_c et que T_c est séparée. Soit donc Ω un ouvert non vide pour T_ω . Montrons que Ω est un voisinage, pour T_c, de tout point x qu'il contient. On se ramène aisément à $x=o$, compte tenu du fait que les translations de X sont des homéomorphismes pour T_c et pour T_ω . Nous allons construire un voisinage de 0 disqué W pour la topologie

T_c tel que $W \subset \Omega$, et, pour prouver que T_c est séparée, il suffit de choisir W de façon que W ne contienne pas un point donné $a \neq 0$, que l'on peut supposer dans A , puisque A est absorbant et que les homothéties non nulles sont des homéomorphismes pour T_c et T_ω.

En résumé, soit Ω un ouvert pour T_ω contenant l'origine et soit $a \in A$, $a \neq 0$. Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'ensemble $(\lambda\Omega) \cap A$ est un ouvert de A pour la topologie induite sur A par T_ω , donc à fortiori un ouvert de A pour τ_A

On peut donc trouver un voisinage de 0 dans A , soit V_o, que l'on peut choisir disqué fermé (donc complet) tel que :

$$a \notin V_o \subset \Omega$$

Supposons maintenant construit un disque compact $K_n \subset A$ tel que $a \notin 3^n K_n \subset \Omega$. Le disque compact $\frac{1}{3}K_n$ est contenu dans l'ouvert $(3^{-(n+1)}\ \Omega) \cap A$ de A et ne contient pas le point $3^{-(n+1)}.a$. Ce que l'on sait de la structure uniforme de A permet d'obtenir un voisinage de 0, dans A , soit V_{n+1}, choisi disqué compact tel que :

$$3^{-(n+1)}.\ a \notin (\tfrac{1}{3}K_n + 2V_{n+1}) \cap A \subset 3^{-(n+1)}\Omega$$

Ainsi le disque $K_{n+1} = \frac{1}{3}K_n + \frac{2}{3}V_{n+1}$ est contenu dans A , il est compact dans A et tel que :

$$a \notin 3^{n+1}K_{n+1} \subset \Omega$$

A partir du compact $K_o = V_o$, on construit donc une suite (V_n) de voisinages de 0 dans A , choisis disqués fermés, et une suite (K_n) de disques compacts de A telles que, pour $n \geqslant 0$.

$$\begin{cases} 3^{n+1}K_{n+1} = 3^n K_n + 2\times 3^n V_{n+1} \\ a \notin 3^n K_n \subset \Omega \end{cases}$$

La suite $(3^n K_n)$ étant croissante, la réunion $W = \bigcup_{n\geq 0} 3^n K_n$ est un disque de X qui vérifie $a \notin W \subset \Omega$. Enfin, puisque pour tout n, $W \supset 2\times 3^n . V_{n+1}$, la proposition (2.2.1) assure que W est un voisinage de 0 pour T_c, ce qui termine la démonstration.

Ainsi, T_c étant séparée et τ_A compacte, l'on a :

Corollaire 1. La topologie T_c induit sur A exactement la topologie τ_A.

Désignons maintenant par X_c l'espace localement convexe séparé obtenu en munissant X de la topologie T_c. Cela étant on prouve facilement :

Corollaire 2. Soient (X, A, τ_A) et (Y, B, τ_B) deux objets de $\mathcal{W}$ et H un ensemble

> d'applications disquées de A dans B. Pour que H soit un ensemble équicontinu de morphismes il faut et il suffit que H définisse par prolongement linéaire un ensemble équicontinu d'applications linéaires de X_c dans Y_c.

Enfin, en tenant compte de l'égalité $T_c = T_\omega$:

Corollaire 3. (Banach-Dieudonné) Pour qu'une partie F de X soit fermée pour

> la topologie T_c il faut et il suffit que, pour tout scalaire λ, $(\lambda F) \cap A$ soit fermée dans A pour la topologie τ_A.

En effet la condition étant nécessaire prouvons qu'elle est suffisante. Pour cela remarquons que la condition sur F signifie aussi que $F \cap \mu A$ est une partie compacte de X_c. Soit alors $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les parties F de X vérifiant cette propriété. On voit facilement que $\mathcal{F}$ constitue la famille des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X, rendant continues les homothéties et les translations de X. Comme $\mathcal{T}$ est plus fine que T_c et qu'elle induit sur A exactement la topologie τ_A, elle est moins fine que T_ω. L'égalité $T_\omega = T_c$ fournit donc le résultat.

2.3 Le théorème de Waelbroeck.

Les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$ étant toutes deux des catégories disquées, on imposera évidemment à tout foncteur de l'une de ces catégories dans l'autre (ou dans elle-même) de conserver la structure disquée des ensembles de morphismes de source et de but donnés.

(2.3.1) Théorème (Waelbroeck [4]) La catégorie $\mathbb{W}$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{B}^{\circ}$ duale de la catégorie $\mathbb{B}$.

La démonstration introduit deux foncteurs contravariants, dits foncteurs de dualité, l'un $D : \mathbb{B} \to \mathbb{W}$, l'autre $\Delta : \mathbb{W} \to \mathbb{B}$ tels que les foncteurs ΔD et $D\Delta$ soient isomorphes respectivement aux foncteurs neutres $1_{\mathbb{B}}$ et $1_{\mathbb{W}}$.

Le foncteur D associe à tout espace de Banach (X,A) l'espace de Waelbroeck $D(X) = (X',A',\tau_{A'})$ où X' est le dual de X, A' la boule unité de X', polaire de A, et $\tau_{A'}$ la restriction à A' de la topologie faible $\sigma(X',X)$.

Le foncteur Δ associe à tout espace de Waelbroeck (X,A,τ_A) l'espace de Banach des formes linéaires sur X dont la restriction à A est continue pour τ_A, muni de la norme de la convergence uniforme sur A. Nous noterons $\Delta(X) = X^*$

Les foncteurs D et Δ opèrent sur les morphismes de façon évidente par transposition.

Pour prouver que $D\Delta$ est isomorphe au foncteur $1_{\mathbb{W}}$ on utilise de façon essentielle l'égalité algèbrique $X^* = (X_c)'$. Le théorème de Waelbroeck prouve alors que X^* sépare X ce qui permet d'immerger X dans l'espace $(X^*)'$ et de montrer ensuite l'isomorphisme entre X et $(X^*)'$. Comme cet isomorphisme est canonique et fonctoriel en X, le résultat est acquis.

Enfin on montre que le foncteur ΔD est isomorphe au foncteur $1_{\mathbb{B}}$, car tout espace de Banach X est sous-espace fermé de $\Delta D(X) = (X')^{*}$. Et comme ces deux espaces X et $(X')^{*}$ ont même dual X', en vertu du résultat précédent, ils sont égaux.

On aperçoit maintenant que tout espace de Waelbroeck peut être considéré comme le dual d'un espace de Banach et réciproquement. Cette situation symétrique va permettre à la fois de compléter l'étude de la catégorie $\mathbb{W}$ et de construire sur les catégories $\mathbb{W}$ et $\mathbb{B}$ des produits tensoriels dont les propriétés immédiates seront conséquences de propriétés catégoriques générales.

2.4 Retour sur la catégorie $\mathbb{W}$.

On sait maintenant que $\mathbb{W}$ est une catégorie complète admettant des noyaux et des conoyaux.

a) Sous-espace. Soit M un sous-espace de X , fermé dans X_c, c'est-à-dire tel que (Banach-Dieudonné) $M \cap A$ soit compact dans A . Nous dirons que le triplet $(M, M\cap A, \tau_A|M\cap A)$ qui est un objet de $\mathbb{W}$, est le sous-espace M.

Avec cela, étant donné un morphisme $u : X \to Y$, nous voyons immédiatement que $\bar{u}^1(o)$ est fermé dans X_c, de sorte que le noyau Ker(u) est donné par :

$$\mathrm{Ker}(u) : \bar{u}^1(o) \to X$$

d'où l'on déduit :

> Pour que u soit un monomorphisme il faut et il suffit que u soit injective.

b) Espace quotient. De même si M est un sous-espace fermé de X_c, l'application canonique $\phi : X \to X/M$ est continue si l'on place sur X/M la topologie quotient, qui est séparée. Ainsi $\phi(A)$ est une partie compacte disquée absorbante de X/M de sorte que le triplet $(X/M, \phi(A), \tau_{\phi(A)})$ est un objet de $\mathbb{W}$ noté plus simplement X/M.

Ce qui permet de voir que si $u : X \to Y$ est un morphisme, il admet un conoyau Coker(u) donné par :

$$\mathrm{Coker}(u) : Y \to Y/\overline{u(X)}$$

où $\overline{u(X)}$ n'est autre que l'adhérence de $u(X)$ dans Y_c.

Ainsi :

Pour que u soit un épimorphisme il faut et il suffit que $u(X)$ soit dense dans l'espace localement convexe Y_c.

c) Morphismes stricts.

Tout morphisme $u : X \to Y$ admet la décomposition unique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{Coim}(u)"'] & Y \\ X/\overset{-1}{u}(0) \arrow[r, "\tilde{u}"'] & \overline{u(X)} \arrow[u, "\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(u))"'] \end{tikzcd}$$

où $\tilde{u}$ est un bimorphisme. Lorsque $\tilde{u}$ est un isomorphisme on dira que u est un morphisme strict. On a la caractérisation :

(2.4.1) Proposition : Pour qu'un morphisme $u : X \to Y$ soit strict il faut et il suffit que $u(A) = B \cap u(X)$.

Désignons par $A' = \mathrm{Coim}(u)(A)$ le disque compact absorbant de $X/\overset{-1}{u}(o)$ et par $B' = \overline{u(X)} \cap B$ celui de $\overline{u(X)}$.

Si $\tilde{u}$ est un isomorphisme, il est surjectif de sorte que $u(X) = \overline{u(X)}$ et puisque $\tilde{u}(A') = B'$, on a bien $u(A) = B \cap u(X)$.

Réciproquement si u vérifie la condition donnée alors $u(X)$ est fermé dans Y_c car (Banach-Dieudonné) son intersection avec B est compacte dans B. Ainsi $\tilde{u}(A') = B'$ ce qui suffit pour prouver que $\tilde{u}$ transforme bijectivement et continûment A' en B'. La compacité de A' et B' assure donc que u est un isomorphisme.

On tire de là :

Corollaire 1. Les épistricts $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sont exactement les morphismes tels que $u(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Corollaire 2. Les mono-stricts $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sont exactement les morphismes injectifs tels que $u(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \cap u(\mathcal{X})$.

Comme application de la proposition (2.4.1), qui constitue un résultat fin, donnons une caractérisation des épimorphismes stricts dans la catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach. Le théorème de Waelbroeck permet d'écrire qu'ils correspondent par transposition, aux monomorphismes stricts de la catégorie $\mathbb{W}$. Ainsi :

(2.4.2) Proposition : Soient (X,A) et (Y,B) deux espaces de Banach. Les épi-stricts $u : X \to Y$ sont exactement les applications linéaires u telles que $\overline{u(A)} = B$.

Il suffit en effet de montrer que, sous ces conditions, ${}^t u : Y' \to X'$ est un mono-strict de la catégorie $\mathbb{W}$ ce qui est immédiat, grâce à la caractérisation donnée plus haut.

On retrouve ainsi, comme corollaire du théorème de Banach-Dieudonné en quelque sorte, le théorème classique de Baire-Banach.

Comme application rappelons que l'on déduit de là que tout espace de Banach X est isomorphe à un espace quotient d'un espace ℓ^1_I, où I est un ensemble équipotent à une partie dense de la boule unité A de X (ou de la sphère unité $\|x\| = 1$). On montre en effet, en identifiant i à son image $x_i \in A$, que l'application $\phi : \ell^1_I \to X$ définie par $\phi(\xi) = \Sigma \xi_i x_i$, où $\xi = (\xi_i)$, est un épi-strict de $\mathbb{B}$.

Ce résultat signifie encore que :

(2.4.3) Proposition: Dans la catégorie $\mathbb{B}$, tout objet est quotient d'une somme directe de droites, autrement dit le corps des scalaires K est un générateur de $\mathbb{B}$.

Rappelons encore que le théorème de Hahn-Banach exprime que K est aussi un séparateur de $\mathbb{B}$.

d) Produit direct et somme directe.

On sait déjà que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille (non vide) d'espaces de Waelbroeck, on peut affirmer par dualité :

$$\Pi X_i = (\Sigma X_i^*)'$$

$$\Sigma X_i = (\Pi X_i^*)'$$

En fait il n'est pas facile de définir directement la somme directe ΣX_i , par contre le produit ΠX_i est plus maniable. Car si A_i est le disque compact absorbant de X_i, le produit topologique ΠA_i est compact et muni d'une topologie localement convexe. L'espace de Waelbroeck ΠX_i s'identifie donc à l'espace vectoriel engendré par ΠA_i dans l'espace vectoriel produit (algèbrique) des X_i.

Précédemment nous avons considéré le corps K des scalaires comme un objet de $\mathbb{B}$. Rien n'empêche de le considérer simultanément comme un objet de $\mathbb{W}$, le disque unité $|\lambda|\leq 1$ étant compact. En quelque sorte K est auto-dual, et les résultats de c) conduisent immédiatement à la :

(2.4.4) Proposition. Dans la catégorie $\mathbb{W}$ tout objet est un sous-espace d'un produit de droites.

3 - Les deux bifoncteurs mixtes fondamentaux. Adjonction.

3.1 Le bifoncteur L et le foncteur L_X.

Etant donnés un espace de Waelbroeck (X,A,τ_A) et un espace de Banach (Y,B), on désigne par $L(X,Y)$ l'espace des applications linéaires $f : X \to Y$ dont la restriction à A est continue pour la topologie τ_A et la topologie de Y.

On munit l'espace $L(X,Y)$ de la norme de la convergence uniforme sur A pour laquelle il est complet. Ainsi $L(X,Y)$ devient un espace de Banach dont la boule unité est formée des fonctions f telles que $f(A) \subset B$.

On a donc défini un bifoncteur $L : \mathbb{W}^o \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, son action sur les morphismes est évidente et n'est pas détaillée.

Lorsqu'on fixe l'espace X, on obtient un foncteur covariant
$L_X = L(X,.) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

<u>Exemples</u> . On reconnait l'égalité $L(X,K) = X^*$ ainsi que l'égalité $L(K,Y) = Y$ qui exprime encore $L_K = 1_{\mathbb{B}}$.

<u>Foncteurs L-représentables</u>.

L'égalité $L(X,K) = X^*$ démontre que X est complètement déterminé (par son dual) lorsqu'on connait le foncteur L_X. On peut retrouver ce fait par le résultat plus général en apparence :

(3.1.1) <u>Proposition</u> : L'ensemble $\hom(L_X,L_Y)$ des morphismes fonctoriels $L_X \to L_Y$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathrm{Hom}(Y,X)$.

Indiquons seulement les deux correspondances. A tout morphisme fonctoriel $\phi : L_X \to L_Y$ on associe le morphisme $U_\phi : Y \to X$ défini par $U_\phi = {}^t\phi_K$. Et à tout morphisme $u : Y \to X$ on associe le morphisme fonctoriel $\phi u : L_X \to L_Y$ défini par :

$$(\phi u)_Z : L(X,Z) \to L(Y,Z)$$
$$(\phi u)_Z(f) = uf \qquad Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Z$$

On tire de là la notion de foncteur L-représentable. Un foncteur covariant $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ est dit L-représentable lorsqu'il est isomorphe à un foncteur L_X. L'espace de Waelbroeck X est alors défini à un isomorphisme près.

Foncteurs L-adjoints.

Etant donnés deux foncteurs covariants, l'un $F : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$, l'autre $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, nous dirons que F et G sont L-adjoints (F nécessairement à gauche et G à droite) lorsque les bifoncteurs $L(F(.),.)$ et $L(.,G(.))$ sont isomorphes.

3.2 Le bifoncteur $\mathcal{L}$ et le foncteur $\mathcal{L}_X$.

Etant donnés un espace de Banach (X,A) et un espace de Waelbroeck $(\mathcal{Y},\mathcal{B},\tau_{\mathcal{B}})$ on désigne par $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ l'espace des applications linéaires $f : X \to \mathcal{Y}$ qui envoient A dans un homothétique du disque $\mathcal{B}$. Le disque $A(X,\mathcal{Y})$ formé des f telles que $f(A) \subset \mathcal{B}$, muni de la topologie de la convergence simple sur A, constitue un disque compact (Tychonoff !) absorbant de l'espace $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$. Ainsi $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ devient un objet de $\mathbb{W}$ ce qui donne à $\mathcal{L}$ les caractéristiques d'un bifoncteur $\mathbb{B}^{\circ} \times \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ bien que son action sur les morphismes ne soit pas détaillée.

Lorsqu'on fixe X on obtient le foncteur covariant $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}(X,.) : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$. Et l'on peut démontrer comme précédemment :

(3.2.1) Proposition : l'ensemble $\hom(\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y)$ des morphismes fonctoriels $\mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_Y$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathrm{Hom}(Y,X)$.

D'ailleurs, plus directement, $\mathcal{L}(X,K) = X'$. Ce qui nous autorise à parler de foncteurs de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{W}$ $\mathcal{L}$-représentables.

Foncteurs $\mathcal{L}$-adjoints.

Etant donnés deux foncteurs covariants $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $G: \mathbb{W} \to \mathbb{W}$, nous dirons que F et G sont $\mathcal{L}$-adjoints lorsque les bifoncteurs $\mathcal{L}(F(.),.)$ et $\mathcal{L}(.,G(.))$ sont isomorphes.

3.3 Dualité de foncteurs.

On rappelle que la dualité des catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$ s'exprime à travers les foncteurs contravariants :

$$D : \mathbb{B} \to \mathbb{W} \qquad \text{et} \qquad \Delta : \mathbb{W} \to \mathbb{B}.$$

Etant donné un foncteur $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, on peut lui associer un foncteur, dit dual de F et noté F', qui n'est autre que :

$$F' = D_o F_o \Delta : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$$

De même, tout foncteur $G : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$, admet un foncteur dual, noté $G^{*} = \Delta_o G_o D : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Si l'on identifie les foncteurs ΔD et $D\Delta$ aux foncteurs neutres $1_{\mathbb{B}}$ et $1_{\mathbb{W}}$ respectivement, ce qui est loisible, à un isomorphisme fonctoriel près, on voit que la dualité de foncteurs se calcule selon les formules :

$$(F')^{*} = F \qquad \text{et} \qquad (G^{*})' = G$$

L'intérêt de cette notion se résume pour nous en deux types de propositions. D'une part la conservation de l'adjonction par dualité et d'autre part la conservation de propriétés de commutation. En effet :

(3.3.1) <u>Proposition</u> : Soient $F : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ deux foncteurs L-adjoints. Alors les foncteurs $G' : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et $F^{*} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ sont aussi L-adjoints.

Et de même :

(3.3.2) <u>Proposition</u> : Soient $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $G : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ deux foncteurs L-adjoints. Alors les foncteurs $G^{*} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $F' : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ sont aussi L-adjoints.

Les démonstrations sont standard et reposent sur les isomorphismes (fonctoriels par rapport aux deux variables) des espaces $L(X,Y)$ et $L(Y',X^{*})$ d'une part et $L(X,Y)$ et $L(Y^{*},X')$ d'autre part.

Enfin, et sans difficulté :

(3.3.3) <u>Proposition</u> : Pour qu'un foncteur $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ commute aux monomorphismes (resp : aux épimorphismes ; aux monostricts ; aux épistricts ; aux produits directs ; aux sommes directes) il faut et il suffit que son foncteur dual $F' : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$, commute aux épimorphismes (resp : aux monomorphismes ; aux épistricts ; aux monostricts ; aux sommes directes ; aux produits directs).

3.4 Les théorèmes de commutation.

On sait qu'un foncteur entre deux catégories qui admet un adjoint (au sens habituel) à gauche (resp : à droite) commuta aux limites gauches (resp : aux limites droites). La question importante, et résolue ici, est de savoir si ces propriétés de commutation sont encore vérifiées pour les notions de L-adjonction et L-adjonction.

On va voir qu'il n'en est pas exactement ainsi. Toutefois les propriétés de commutation obtenues seront suffisamment bonnes pour commander les principales propriétés des produits tensoriels (dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$) que nous introduirons plus loin.

En fait on se propose de démontrer les deux théorèmes de commutation suivants :

(3.4.1) (1er théorème de commutation). Soient $F : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ deux foncteurs (covariants) L-adjoints. Alors F commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes finies de la catégorie $\mathbb{W}$ tandis que G commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits directs finis de la catégorie $\mathbb{B}$. En général F (resp : G) ne commute pas aux sommes directes quelconques (resp : aux produits quelconques).

(3.4.2) (2ème théorème de commutation). Soient $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $G : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ deux foncteurs (covariants) Ω-adjoints. Alors F commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes quelconques de la catégorie $\mathbb{B}$, tandis que G commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits quelconques de la catégorie $\mathbb{W}$.

La démonstration est longue et se développe en plusieurs parties. Elle nécessite de nouvelles caractérisations des épimorphismes, épistricts et produits dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$, et s'appuie essentiellement sur le fait que le corps des scalaires K est <u>à la fois</u> un générateur et un séparateur des catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$.

A - <u>Epimorphismes et épistricts dans W.</u>

Soit $u : (X,A,\tau_A) \to (Y,B,\tau_B)$ un morphisme de $\mathbb{W}$. On sait que u est un épimorphisme si et seulement si $u(X)$ est dense dans l'espace Y_c et que c'est un épistrict si et seulement si $u(A) = B$. Cela étant on a, avec le théorème de Hahn-Banach :

(A,1) <u>Proposition</u> :

a) si u est un épimorphisme, alors pour tout $Z \in \mathbb{B}$ et toute application $f \in L(Y,Z)$ la condition $fu = 0$ entraîne la condition $f = 0$.

b) Réciproquement si, pour $f \in Y^*$ la condition $fu = o$ entraîne la condition $f = 0$, alors u est un épimorphisme.

(A.2) <u>Proposition</u> (mêmes notations)

a) si u est un épistrict la condition $\|fu\| \leq 1$ entraîne la condition $\|f\| \leq 1$.

b) réciproquement si pour $f \in Y^*$ la condition $\|fu\| \leq 1$ entraîne la condition $\|f\| \leq 1$, alors u est un épistrict.

Soient maintenant $F : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ deux foncteurs L-adjoints, l'adjonction étant réalisée par l'isomorphisme fonctoriel :

$$\theta : L(F(.), .) \to L(.,G(.))$$

Montrons que F commute aux épimorphismes et aux épistricts, ce qui entrainera que G commute aux monomorphismes et aux monostricts car le foncteur G' admet le foncteur F^* pour L-adjoint (à droite). ((3.3.1) et (3.3.3)).

Démontrons seulement la commutation de F aux épistricts la démonstration étant analogue pour les épimorphismes. Soit donc $u : X \to Y$ un épistrict de $\mathbb{W}$. Pour voir que $F(u)$ est un épistrict utilisons (A,2,b) et soit $f \in (F(Y))^*$ telle que $\|f.F(u)\| \leqslant 1$. L'isomorphisme θ échange les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(u)"] & F(Y) \arrow[dl, "f"] \\ K & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[dl, dotted, "\tilde{f} = \theta_{Y,K}(f)"] \\ G(K) & \end{tikzcd}$$

et la fonctorialité de θ garantit l'égalité :

$$\theta_{X,K}(f.F(u)) = \theta_{Y,K}(f).u = \tilde{f}.u$$

Or $\theta_{X,K}$ et $\theta_{Y,K}$ sont des isométries de sorte que $\|\tilde{f}.u\| \leqslant 1$. Alors, d'après (A,2,a), u étant épistrict, on a $\|\tilde{f}\| \leqslant 1$ et par suite $\|f\| \leqslant 1$, ce qui termine la démonstration.

B - Produits directs dans $\mathbb{B}$.

Le corps K étant un générateur de $\mathbb{B}$ ((2,4,3)) un résultat catégorique général, que l'on peut retrouver ici aisément, montre que dans la définition catégorique du produit $\prod X_\alpha$, il suffit de limiter la "variable" Z en choisissant pour Z une somme directe $K^{(I)}$. De façon détaillée :

(B,1) Proposition : Soient (X_α) une famille non vide d'espaces de Banach, P un espace de Banach et $p_\alpha : P \to X_\alpha$ une famille de morphismes $v_\alpha : K^{(I)} \to X_\alpha$, il existe un morphisme unique $v : K^{(I)} \to P$ tel que $p_\alpha . v = v_\alpha$ pour tout α, alors P est le produit $\prod X_\alpha$ dans la catégorie $\mathbb{B}$.

Reprenons maintenant les deux foncteurs L-adjoints F et G et l'isomorphisme fonctoriel θ. Prouvons que G commute aux produits finis de $\mathbb{B}$, ce qui rpouvera bien que F commute aux sommes directes finies de $\mathbb{W}$, car

F^{*} a les propriétés de G.

Soit $P = \Pi X_\alpha$ un produit quelconque dans $\mathbb{B}$. Nous supposons pour l'instant la famille des indices (α) quelconque pour apercevoir l'instant où la condition de finitude intervient. Pour voir que $G(P)$ est produit des $G(X_\alpha)$ utilisons (B,1). Soient donc I un ensemble et $v_\alpha : K^{(I)} \to G(X_\alpha)$ une famille des morphismes. Pour tout $i \in I$ soit $j_i : K \to K^{(I)}$ l'inejction canonique.

$$\begin{tikzcd}
G(P) \arrow[rr, "G(p_\alpha)"] \arrow[dr, "v"] \arrow[ddr, dotted, "v_i"'] & & G(X_\alpha) \\
& K^{(I)} \arrow[ur, "v"] & \\
& K \arrow[u, "j_i"] \arrow[uur, dotted, "v_{\alpha,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "p_\alpha"] & & X_\alpha \\
& F(K) \arrow[ul, dashed, "v_i"] \arrow[ur, "v_{\alpha,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors $v_{\alpha,i} = v_\alpha . j_i : K \to G(X_\alpha)$ est un morphisme de $\mathbb{B}$, mais K <u>étant lu dans la catégorie $\mathbb{W}$</u> c'est aussi une application de l'espace $L(K,G(X_\alpha))$. Alors l'isomorphisme $\tilde{\theta}^{1}_{K,X_\alpha}$ permet de remplacer les morphismes $G(P_\alpha)$ et $v_{\alpha,i}$ par le diagramme ci-contre où $v_{\alpha,i} = \tilde{\theta}^{1}_{K,X_\alpha}(v_{\alpha,i})$ est un élément de $L(F(K),X_\alpha)$. De plus :

$\| \tilde{v}_{\alpha,i} \| = \| v_{\alpha,i} \| \leqslant 1.$

Le problème est donc de savoir maintenant si l'on peut condenser la famille $(\tilde{v}_{\alpha,i})_\alpha$ en une seule application $\tilde{v}_i \in L(F(K),P)$ telle que $p_\alpha . \tilde{v}_i = \tilde{v}_{\alpha,i}$. On peut toujours poser, pour $z \in F(K)$, $\tilde{v}_i(z) = (\tilde{v}_{\alpha,i}(z))$. On définit ainsi une application linéaire de $F(K)$ dans P, qui envoie le disque compact unité de $F(K)$ dans la boule unité de P, car $\| \tilde{v}_{\alpha,i} \| \leqslant 1$. Mais pour que $\tilde{v}_i$ appartienne à $L(F(K),P)$ il faut encore que $\tilde{v}_i$ soit continue sur le disque compact unité de $F(K)$. Or ce que l'on sait c'est que $p_\alpha . \tilde{v}_i$ est bien continue sur ce compact, de sorte que le résultat sera acquis chaque fois que la topologie de l'espace de Banach P sera le produit des topologies des espaces facteurs X_α. Or ceci n'a lieu que si $\underline{P}$ est un produit fini. Faisons dorénavant cette hypothèse, ce qui permet d'écrire $\tilde{v}_i \in L(F(K),P)$. L'isomorphisme $\theta^{-1}_{K,P}$ donneedonc une application linéaire v_i $v_i \in L(K,G(P))$ et puisque :

$$\|v_i\| = \|\tilde{v}_i\| = \sup_\alpha \|\tilde{v}_{\alpha,i}\| = \sup_\alpha \|v_{\alpha,i}\| \leq 1$$

on voit, en fait, en lisant de nouveau K dans $\mathbb{B}$, que v_i est un morphisme de $\mathbb{B}$. Alors lorsque i décrit I, la famille (v_i) se condense en un seul morphisme $v : K^{(I)} \to P$ tel que $v.j_i = v_i$. La condition $p_\alpha.\tilde{v}_i = \tilde{v}_{\alpha,i}$ donne la condition $G(p_\alpha).v_i = v_{\alpha,i}$ de sorte que $G(p_\alpha).v.j_i = v_\alpha.j_i$ d'où l'on tire $G(p_\alpha).v = v_\alpha$. Enfin l'unicité de v sous ces conditions résulte aisément de l'unicité de $\tilde{v}_i$, qui détermine chaque v_i, donc aussi v, ce qui termine la démonstration.

Ainsi le 1er théorème de commutation est complètement démontré. Dans la suite nous donnerons des exemples nombreux de foncteurs G possédant un L-adjoint et ne commutant pas aux produits quelconques de $\mathbb{B}$, de sorte que la restriction aux produits finis est bien essentielle.

C - Epimorphismes et épistricts dans $\mathbb{B}$.

La partie "épique" du 2nd théorème de commutation se demontre de la même façon une fois obtenues les caractérisations suivantes, où $u : (X,A) \to (Y,B)$ est un morphisme de B et (Z,C,τ_C) un objet variable de $\mathbb{W}$:

(C.1) Proposition :

a) Si u est un épimorphisme, pour tout $f \in L(Y,Z)$ la condition $fu = o$ entraîne la condition $f = o$.

b) Réciproquement si, pour $f \in Y'$ la condition $f.u = o$ entraîne $f = o$ alors u est un épimorphisme.

(C.2) Proposition :

a) Si u est un épistrict, la condition $(fu)(A) \subset C$ entraîne la condition $f(B) \subset C$.

b) Réciproquement, si pour $f \in Y'$, la condition $f.u \in A^{o}$ (polaire de A) entraîne la condition $f \in B^{o}$, alors u est un épistrict.

D - Produits dans $\mathbb{W}$.

On sait que tout espace de Banach X est un sous-espace (avec norme induite) d'un espace K^{I} (il suffit de prendre pour I une partie faiblement dense de la boule unité de X'). Ceci prouve aue tout espace de Waelbroeck est un quotient d'une somme directe $K^{(I)}$, où K est lu dans $\mathbb{W}$. Ainsi K est un générateur de $\mathbb{W}$, de sorte que la propriété (B,1) est valable aussi dans la catégorie $\mathbb{W}$.

Il suffit donc de reprendre pas à pas la même démonstration que précédemment pour prouver la dernière partie du 2nd théorème de commutation. Mais comme, dans ce cas, sur le compact unité d'un produit $P = \Pi X_\alpha$, la topologie est exactement la topologie-produit des disques compacts A_α ((2,4,d)), sans que l'on ait à imposer de condition de finitude, le théorème est valable avec toute la généralité désirable.

4 - Produit tensoriel (projectif) d'espaces de Banach.

Nous utilisons maintenant de façon essentielle la dualité des catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$ pour définir un produit tensoriel sur $\mathbb{B}$. Bien entendu on retrouve ainsi le produit tensoriel projectif habituel. Néanmoins la forme même des définitions proposées ici va nous inviter à définir dans la suite un produit tensoriel (catégorique) d'espaces de Waelbroeck par un procédé analogue.

4.1 L'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}(X,Y)$.

Etant donnés deux espaces de Banach (X,A) et (Y,B) on désigne par $\mathcal{B}(X,Y)$

l'espace des formes bilinéaires continues sur $X \times Y$. On peut munir $\mathcal{B}(X,Y)$ de sa norme habituelle et désigner par $A(X,Y)$ la boule unité de $\mathcal{B}(X,Y)$. En fait ce n'est pas cette structure normée qui va nous intéresser, et, de même que sur la boule unité du dual X' nous avons placé la topologie faible, considérons $A(X,Y)$ comme un disque topologique avec pour topologie celle d la convergence simple sur $X \times Y$ (que nous appellerons dans la suite bi-simple). Ce faisant on considère $A(X,Y)$ comme un sous-espace topologique du produit topologique $\Delta^{A\times B}$, où Δ est le disque unité du corps K. On voit ainsi aisément que $A(X,Y)$ est compact et comme la topologie bi-simple est localement convexe et rend continue l'application $(f,q) \to \frac{f+g}{2}$, il est clair que $\mathcal{B}(X,Y)$ est un espace Waelbroeck.

Comme on sait classiquement que les produits tensoriels algèbriques $X \otimes Y$ et $X' \otimes Y'$ sont en dualité séparante (car X et X' d'une part, Y et Y' d'autre part, sont eux-mêmes en dualité séparante). On en déduit

(4.1.1) <u>Proposition</u> :

a) $X' \otimes Y' \subset \mathcal{B}(X,Y)$

b) $X \otimes Y$ et $\mathcal{B}(X,Y)$ sont en dualité séparante.

4.2 <u>Le produit tensoriel $X \hat{\otimes} Y$.</u>

Nous définissons $X \hat{\otimes} Y$ comme le dual de l'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}(X,Y)$. Aussi :

$$X \hat{\otimes} Y = [\mathcal{B}(X,Y)]^* \quad ; \quad \mathcal{B}(X,Y) = (X \hat{\otimes} Y)'$$

Avec cette définition de l'espace de Banach $X \otimes Y$, on retrouve immédiatement les propriétés classiques.

En désignant par $\Gamma(A \otimes B)$ l'enveloppe disquée du produit $A \otimes B$ dans l'espace vectoriel $X \otimes Y$ et par $A \hat{\otimes} B$ la boule unité de $X \hat{\otimes} U$, on a :

(4.2.1) Proposition :

a) $X \otimes Y$ est un sous-espace partout dense de $X \hat{\otimes} Y$ et $A \hat{\otimes} B$ coïncide avec l'adhérence de $\Gamma(A \otimes B)$ dans $X \hat{\otimes} Y$.

b) Sur $X \otimes Y$ la norme de $X \hat{\otimes} Y$ (dite norme tensorielle) est exactement la jauge du disque absorbant $\Gamma(A \otimes B)$. Elle est donnée par l'expressic classique :

$$\|u\|^{\wedge} = \inf \Sigma \|x_i\| \, \|y_i\|$$

où la borne inférieure est prise pour toute décomposition $u = \Sigma x_i \otimes y_i$

On tire de là un principe de prolongement :

(4.2.2) (Principe de prolongement)

Soit f une application linéaire de $X \otimes Y$ dans un espace de Waelbroeck (Z, C, τ_C) telle que $f(A \otimes B) \subset \lambda C$. Il existe une application unique $\bar{f} \in L(X \hat{\otimes} Y, Z)$ qui prolonge f. De plus $\bar{f}(A \hat{\otimes} B) \subset \lambda C$.

4.3 Le foncteur $B_{X,Y}$.

Etant donnés deux espaces de Banach (X,A) et $Y,B)$ on leur associe le foncteur $B_{X,Y} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ défini par :

Pour tout (Z, C, τ_C) l'espace $B_{X,Y}(Z) = B(X,Y\,;Z)$ est l'espace des fonctions bilinéaires de $X \times Y$ dans Z, qui envoient le produit $A \times B$ dans un homothétique du disque compact C. Cet espace contient comme disque absorbant l'ensemble $A(X,Y\,;Z)$ des fonctions f telles que $f(A,B) \subset C$, sur lequel on place la topologie τ_A de la convergence bi-simple. Ce qui identifie $A(X,Y;Z)$ comme une partie fermée du produit topologique $C^{A \times B}$ qui est compact. Ainsi $B(X,Y;Z)$ devient un espace de Waelbroeck. En particulier on reconnaît en l'espace $B(X,Y\,;K)$ l'espace $B(X,Y)$ déjà introduit.

Comme $\mathcal{B}_{X,Y}$ agit de façon évidente sur les morphismes de la catégorie W, on voit sans peine qu'on a ainsi défini un foncteur covariant de W dans elle-même. Alors :

(4.3.1) Théorème : A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$\begin{array}{|ll} (1) & \mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \\ (2) & \mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_{X \hat{\otimes} Y} \end{array}$$

Les premières égalités traduisent le fait évident que les espaces $\mathcal{B}(X,Y;Z)$ et $\mathcal{B}(Y,X;Z)$ sont isomorphes à l'espace $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,Z))$, dans des isomorphismes fonctoriels en Z. La dernière se démontre à l'aide du principe de prolongement une fois mis en place les morphismes, inverses l'un de l'autre :

$$\sigma_Z \ : \mathcal{B}(X,Y;Z) \to \mathcal{L}(X \hat{\otimes} Y,Z)$$

$$\tau_Z \ : \mathcal{L}(X \hat{\otimes} Y,Z) \to \mathcal{B}(X,Y;Z)$$

en définissant, pour $f \in \mathcal{B}(X,Y;Z)$ et $g \in \mathcal{L}(X \hat{\otimes} Y,Z)$:

$$\sigma_Z(f)(x\otimes y) = f(x,y)$$
$$\tau_Z(g)(x,y) = g(x\otimes y).$$

Elle exprime que le foncteur $\mathcal{B}_{X,Y}$ est $\mathcal{L}$-représentable et représenté par l'espace de Banach $X \hat{\otimes} Y$. D'ailleurs cette dernière condition détermine complètement l'espace $X\hat{\otimes}Y$ (vectoriellement et en norme) comme on a vu en (3.2.1).

On tire de là la commutativité et l'associativité du produit tensoriel d'espaces de Banach, puis en faisant $Z = K$ dans les formules (1) :

Corollaire : $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y') = \mathcal{L}(Y,X')$

4.4. Le bifoncteur $\hat{\otimes}$ et le foncteur $\hat{\otimes}_Y$

En définissant par prolongement un produit tensoriel de morphismes dans la catégorie $\mathbb{B}$, on fait de $\hat{\otimes} : (X,Y) \mapsto X \hat{\otimes} Y$ un bifoncteur covariant : $\mathbb{B}\times\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et de $\otimes_Y : X \mapsto X \hat{\otimes} Y$ un foncteur covariant $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Le théorème (4.3.1) peut alors se récrire, en tenant compte de l'isomorphisme (fonctoriel en X et Z) entre les espaces $L(X \hat{\otimes} Y, Z)$ et $L(X, L(Y,Z))$:

(4.4.1) <u>Théorème</u> : Les foncteurs $\hat{\otimes}_Y : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $L_Y : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ sont L-adjoints.

C'est là le résultat le plus intéressant de la théorie. Il va entrainer toutes les propriétés de commutation des produits tensoriels, puisque, en vertu du 2ème théorème de commutation ((3.4.2)), on a :

(4.4.2) <u>Théorème</u> : le foncteur $\hat{\otimes}_Y$ commute, dans la catégorie $\mathbb{B}$, aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes. Le foncteur L_Y commute, dans la catégorie $\mathbb{W}$, aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits.

En détaillant quelque peu les résultats relatifs au foncteur $\hat{\otimes}_Y$ on retrouve des théorèmes de Grothendieck ([1]).

(4.4.3) <u>Théorème</u> : les espaces $\ell^1_I(X) \hat{\otimes} Y$ et $\ell^1_I(X \hat{\otimes} Y)$ sont isomorphes dans un isomorphisme qui associe à tout $\bar{x} \otimes y$ l'élément $\bar{z} = (z_i) \in \ell^1_I(X \hat{\otimes} Y)$ donné par $z_i = x_i \otimes y$ si $\bar{x} = (x_i)$.

<u>Corollaire 1</u> : $\ell^1_I(X) = \ell^1_I \hat{\otimes} X$

<u>Corollaire 2</u> : Le dual de $\ell^1_I(X)$ est isomorphe, dans la catégorie $\mathbb{W}$, aux espaces $B(X, \ell^1_I)$ et $L(\ell^1_I, X')$.

Et aussi :

(4.4.4) <u>Théorème</u> : Soient $u_1 : X_1 \to Y_2$ et $u_2 : X_2 \to Y_2$ des morphismes de $\mathbb{B}$. Si u_1 et u_2 sont des épimorphismes (resp : des épistricts) il en est de même du morphisme $u_1 \hat{\otimes} u_2$.

<u>Application à l'étude de</u> $X \hat{\otimes} Y$.

Nous savons que tout espace de Banach est un quotient d'un espace ℓ^1_I. Par ailleurs, le corollaire 1 de (4.4.3) montre le résultat classique $\ell^1_I \otimes \ell^1_J = \ell^1_{I \times J}$. De sorte que, étant donnés deux espaces de Banach X et Y et des épistricts :

$$\phi : \ell^1_I \to X \qquad \phi(\bar{\xi}) = \Sigma\xi_i x_i$$

$$\psi : \ell^1_J \to Y \qquad \psi(\bar{\eta}) = \Sigma\eta_j y_j$$

on en déduit un épistrict $\rho = \phi\hat{\otimes}\psi$:

$$\rho : \ell^1_{I\times J} \to X \hat{\otimes} Y$$

donné par :

$$\rho\ (\bar{\nu}) = \Sigma\nu_{ij}\ x_i\otimes y_j$$

Le choix des points $x_i \in X$ et $y_j \in Y$ ((2.4.2)) suffit à prouver :

(4.4.5) Théorème (Grothendieck).

Pour tout $u \in X \hat{\otimes} Y$, il existe deux suites $x_n \in X$ et $y_n \in Y$ telles que $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$ et une suite $\bar{\nu} = (\nu_n) \in \ell^1$ telle que :

$$u = \sum_{0}^{\infty} \nu_n x_n \otimes y_n$$

Corollaire : Si X et Y sont séparables, les suites (x_n) et (y_n) peuvent être fixées une fois pour toutes. Dans ces conditions

$$\|u\|^{\wedge} = \mathrm{Inf}\,\Sigma\,|\nu_n|$$

sous la condition : $u = \Sigma\nu_n x_n \otimes y_n$.

Dans le cas où X et Y ne sont plus séparables on remarque que l'application $\rho : \ell^1_{I\times J} \to X \hat{\otimes} Y$ est ouverte et transforme la boule unité ouverte de $\ell^1_{I\times J}$ en la boule unité ouverte de $X \hat{\otimes} Y$. Il suit de là que l'on peut relever tout compact H de la boule ouverte de $X \hat{\otimes} Y$ en un compact L de la boule ouverte de $\ell^1_{I\times J}$, (Bourbaki : Top. Géné. Ch. 9. § 2. prop.18), de sorte que la connaissance des compacts d'un espace ℓ^1_I détermine celle des compacts de $X \hat{\otimes} Y$.

En laissant de côté les détails on arrive ainsi aux résultats de Grothendieck ([1]), qui apparaissent donc comme des corollaires des propriétés catégoriques de L-adjonction :

(4.4.6) Théorème (Grothendieck).

Soit H un compact de $X \hat{\otimes} Y$, contenu dans la boule ouverte de cet espace. Alors il existe deux suites $x_n \in X$, $y_n \in Y$ vérifiant $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, et une partie compacte L de ℓ^1, contenue dans la boule ouverte de ℓ^1, telles que tout $u \in H$ puisse s'écrire :

$$u = \sum_0^\infty \nu_n x_n \otimes y_n$$

avec $\bar{\nu} = (\nu_n) \in L$.

5 - Produit tensoriel (projectif) d'espaces de Waelbroeck.

Il suffit d'opérer symétriquement en échangeant, en quelque sorte, les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$. Néanmoins il faudra prendre quelques précautions.

5.1 L'espace de Banach $B(X,Y)$

Etant donnés deux espaces de Waelbroeck (X,A,τ_A) et (Y,B,τ_B) nous désignons par $B(X,Y)$ l'espace des formes bilinéaires sur $X \times Y$ dont la restriction au produit $A \times B$ est continue, muni de la topologie de la convergence uniforme sur $A \times B$.

L'espace $B(X,Y)$ peut encore s'interpreter comme le sous-espace fermé de l'espace de Banach $C(A \times B)$ formé des fonctions bi-disquées. Comme en 4 :

(5.1.1) Proposition :

a) $X^* \otimes Y^* \subset B(X,Y)$

b) $X \otimes Y$ et $B(X,Y)$ sont en dualité séparante.

5.2 Le produit tensoriel $X \bar{\otimes} Y$

Nous le définissons comme dual de l'espace de Banach $B(X,Y)$:

$$X \bar{\otimes} Y = [B(X,Y)]' \quad ; \quad B(X,Y) = (X \bar{\otimes} Y)^*$$

On a alors un théorème de densité :

(5.2.1) Proposition : l'espace vectoriel $X \otimes Y$ est un sous-espace partout dense de l'espace localement convexe $(X \bar{\otimes} Y)_c$ et le disque compact absorbant de $X \bar{\otimes} Y$, noté $A \bar{\otimes} B$, coïncide exactement avec l'adhérence du disque $\Gamma(A \otimes B)$.

(5.2.2) (Principe de prolongement).

Soit f une application linéaire de $X \otimes Y$ dans un espace de Banach Z, dont la restriction à $\Gamma(A \otimes B)$ est continue pour la topologie de $A \bar{\otimes} B$. Il existe une application linéaire unique $\bar{f} \in L(X \bar{\otimes} Y, Z)$ qui prolonge f.

5.3 Le foncteur $B_{X,Y}$

C'est un foncteur covariant de $\mathbb{B}$ dans elle-même. Il associe, à tout espace de Banach Z, l'espace $B(X,Y;Z)$ formé des applications bilinéaires de $X \times Y$ dans Z dont la restriction au compact $A \times B$ est continue, muni de la topologie de la convergence uniforme sur $A \times B$. Il opère de façon évidente sur les morphismes. Lorsque $Z = K$, on retrouve l'espace $B(X,Y)$.

(5.3.1) Théorème : A des isomorphismes fonctoriels près on a :

(1) $B_{X,Y} = L_X \circ L_Y = L_Y \circ L_X$

(2) $B_{X,Y} = L_{X \bar{\otimes} Y}$

Les premiers égalités s'obtiennent aisément. Pour voir la seconde mettons en place le morphisme :

$$\begin{cases} \tau_Z : L(X \bar{\otimes} Y, Z) \to B(X,Y;Z) \\ \tau_Z(g)(x,y) = g(x \otimes y) \end{cases}$$

La fonctorialité étant immédiate il suffit de prouver que τ_Z est un isomorphisme. On vérifie immédiatement que τ_Z est un isométrie grâce à la densité de $\Gamma(A \otimes B)$ dans $A \tilde{\otimes} B$. Il reste à voir que τ_Z est surjectif. Soit donc $f \in B(X,Y;Z)$. En posant $g(x\otimes y) = f(x,y)$ on définit une fonction linéaire $g : X \otimes Y \to Z$. Montrons qu'elle se prolonge en une fonction linéaire $\tilde{g} \in L(X \tilde{\otimes} Y, Z)$ qui sera donc telle que $f = \tau_Z(\tilde{g})$. Il suffit, avec le principe de prolongement, de vérifier que g est continue sur $\Gamma(A \otimes B)$ pour la topologie compacte de $A \tilde{\otimes} B$. Supposons donc $u \to u_o$ dans $\Gamma(A \otimes B)$. Alors pour tout $z' \in Z'$ la forme bilinéaire $z'{}_o f$, appartenant à $B(X,Y)$ définit une forme linéaire $(z'{}_o f)^{\sim}$ sur $X \tilde{\otimes} Y$ telle que $(z'{}_o f)^{\sim}(u) \to (z'{}_o f)^{\sim}(u_o)$. Or la restriction à $X \otimes Y$ de $(z'{}_o f)^{\sim}$ est précisément $z'{}_o g$. Nous voyons donc que $g(u) \to g(u_o)$ dans Z, pour la <u>topologie faible</u> $\sigma(Z,Z')$. Tirons de là que $g(u) \to g(u_o)$ dans Z. En effet tout provient du fait que $f(A \times B)$ est un disque compact H de Z de sorte que $g(\Gamma(A \otimes B)) \subset H$. Or sur un compact H de Z la topologie faible $\sigma(Z,Z')$ coïncide avec la topologie d'espace de Banach de Z, ce qui termine la démonstration.

Ce résultat exprime que le foncteur $B_{X,Y}$ est L-représentable et représenté par l'espace de Waelbroeck $X \tilde{\otimes} Y$, ce qui détermine d'ailleurs complètement cet espace ((3.1.1)).

On en tire immédiatement l'associativité et la commutativité du produit tensoriel d'espaces de Waelbroeck.

5.4 <u>Le bifoncteur $\tilde{\otimes}$ et le foncteur</u> $\tilde{\otimes}_Y$

On définit par prolongement évident un produit tensoriel de morphismes dans la catégorie $\mathbb{W}$, on fait de $\tilde{\otimes}$ un bifoncteur covariant : $\mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et, en fixant Y, de $\tilde{\otimes}_Y : X \mapsto X \tilde{\otimes} Y$ un foncteur covariant : $\mathbb{W} \to \mathbb{W}$.

Le théorème (5.3.1) se récrit immédiatement, en tenant compte de l'isomorphisme (fonctoriel) des espaces $L(X \tilde{\otimes} Y, Z)$ et $L(X, L(Y,Z))$:

(5.4.1) Théorème : Les foncteurs $\bar{\otimes}_y : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ et $L_y : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ sont L-adjoints.

Ce théorème entraîne les propriétés de commutation suivantes.((3.4.1)) :

(5.4.2) Théorème : Le foncteur $\bar{\otimes}_y$ commute dans la catégorie $\mathbb{W}$, aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes finies. Le foncteur L_y commute, dans la catégorie $\mathbb{B}$, aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits directs finis.

Corollaire : Soient $u_1 : X_1 \to Y_1$ et $u_2 : X_2 \to Y_2$ des morphismes de $\mathbb{W}$.

Si u_1 et u_2 sont des épimorphismes (resp : des épistricts), il en est de même du morphisme $u_1 \bar{\otimes} u_2$.

6 - Les produits tensoriels $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\bar{\bar{\otimes}}$.

6.1 Les deux morphismes fonctoriels t et τ:

a) Etant donnés deux espaces de Banach X et Y, on sait que l'espace vectoriel $X \otimes Y$ s'injecte dans l'espace $B(X',Y')$. Traitons ce dernier espace comme l'espace $L(Y',X)$. Cela revient à dire que tout $u = \Sigma\lambda_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ définit un opérateur $\tilde{u} \in L(Y',X)$ selon :

$$\tilde{u}(y') = \Sigma\lambda_i \langle y_i, y'\rangle x_i$$

On vérifie instantanément l'inégalité $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|^\wedge$ de sorte que l'application $X \otimes Y \to L(Y',X)$ se prolonge en un morphisme $X \hat{\otimes} Y \to L(Y',X)$ (qui n'est plus injectif en général). Si l'on fixe l'espace Y, on constate la fonctorialité en X de sorte qu'en fait on a défini un morphisme fonctoriel :

$$t : \hat{\otimes}_Y \to L_{Y'}$$

détaillé ainsi :

$$\begin{cases} t_X : X \hat{\otimes} Y \to L(Y',X) \\ \quad t_X(x \otimes y)(y') = \langle y, y'\rangle x \end{cases}$$

b) Symétriquement, étant donnés deux espaces de Waelbroeck, notés X' et Y' et considérés comme duals d'espaces de Banach X et Y, on met en place le morphisme

$$\begin{cases} \tau_{X'} : X' \bar{\otimes} Y' \to \mathcal{L}(Y,X') \\ \tau_{X'}(x'\otimes y')(y) = \langle y,y'\rangle x' \end{cases}$$

ce qui donne en réalité un morphisme fonctoriel :

$$\tau : \bar{\otimes}_{Y'} \to \mathcal{L}_Y$$

La principale propriété de t et τ se résume en :

(6.1.1) Proposition : Les morphismes $t_X : X \hat{\otimes} Y \to L(Y',X)$ et $\tau_{X'} : X' \bar{\otimes} Y' \to \mathcal{L}(Y,X')$ sont transposés l'un de l'autre.

On reconnait déjà dans le dual de $X \hat{\otimes} Y$ l'espace $\mathcal{L}(Y,X')$ et dans le dual de $L(Y',X)$ l'espace $X' \bar{\otimes} Y'$. De plus si $u = x\otimes y$ et $v = x'\otimes y'$ alors

$$\langle t_X(u),v\rangle = \langle u,\tau_{X'}(v)\rangle = \langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$$

Remarque : On pourrait traduire cette propriété en disant que les morphismes fonctoriels t et τ eux-mêmes sont transposés l'un de l'autre. Car la notion de foncteur dual, dégagée en 3.3, trouve ici sa raison d'être puisque :

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_Y)^* = \hat{\otimes}_Y \\ (L_{Y'})' = \bar{\otimes}_{Y'} \end{cases}$$

Et l'on passe de $t : \hat{\otimes}_Y \to L_{Y'}$ à $\tau : \bar{\otimes}_{Y'} \to \mathcal{L}_Y$ par dualité (ou transposition).

6.2 Diagrammes fonctoriels.

a) Rien n'empêche maintenant de décomposer canoniquement le morphisme t_X sous la forme :

$$t_X = \mathrm{Im}(t_X).\tilde{t}_X.\mathrm{Coim}(t_X)$$

ce qui met en évidence deux espaces de Banach ; l'un qui est le but de $\mathrm{Coim}(t_X)$, l'autre qui est la source de $\mathrm{Im}(t_X)$.

Comme t_X se réduit à une injection sur $X \otimes Y$, on voit que l'espace $\overline{t_X(X \hat{\otimes} Y)}$, source de $\mathrm{Im}(t_X)$ coïncide avec l'adhérence de $X \otimes Y$ dans l'espace $L(Y',X) = B(X',Y')$. On reconnait ici l'espace produit tensoriel ε noté habituellement $X \hat{\hat{\otimes}} Y$.

Quant à l'espace $X \hat{\otimes} Y/t_X^{-1}(o)$ muni de sa norme quotient, nous le noterons $L^1(Y',X)$. Ainsi :

(6.2.1) <u>Définition</u> : L'espace de Banach $L^1(Y',X)$ est l'espace des applications nucléaires de Y' dans X. Sa norme, dite norme nucléaire, est notée $\|.\|_1$.

On obtient donc la décomposition :

$$\begin{tikzcd}
X \hat{\otimes} Y \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "p_X = \mathrm{Coim}(t_X)"'] & L(Y',X) \\
L^1(Y',X) \arrow[r, "\tilde{t}_X"'] & X \hat{\hat{\otimes}} Y \arrow[u, "r_X = \mathrm{Im}(t_X)"']
\end{tikzcd}$$

où l'on rappelle que p_X est un épistrict, $\tilde{t}_X$ un bimorphisme et r_X un mono strict.

On peut d'ailleurs, ces définitions étant données, constater assez vite que $L^1(.,.)$ et $\hat{\hat{\otimes}}$ sont des bifoncteurs, et que, en fixant l'espace Y, les morphismes qui interviennent sont fonctoriels en X, de sorte que l'on obtient un diagramme fonctoriel commutatif :

$$\text{(D)} \qquad \begin{tikzcd}
\hat{\otimes}_Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p"'] & L_{Y'} \\
L^1_{Y'} \arrow[r, "\tilde{t}"'] & \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

b) En opérant avec le morphisme $\tau_{X'}$ que l'on décompose dans la catégorie $\mathbb{W}$ on met en évidence deux espaces de Waelbroeck. L'un, source de $\mathrm{Im}(\tau_{X'})$, noté $X' \bar{\bar{\otimes}} Y'$ est exactement l'adhérence de $X' \otimes Y'$ dans l'espace localement convexe $(L(Y,X'))_c = (E(X,Y))_c$ muni du disque compact unité obtenu en prenant l'intersection de $X \bar{\bar{\otimes}} Y'$ avec le disque compact unité $A(X,Y)$ de $B(X,Y)$. L'autre, but de $\mathrm{Coim}(\tau_{X'})$, est l'espace quotient $(X' \bar{\otimes} Y')/\overset{-1}{\tau}_{X'}(o)$ muni de sa structure d'espace de Waelbroeck quotient, et noté $L^1(Y,X')$. Alors :

(6.2.2) Définition : L'espace de Waelbroeck $L^1(Y,X')$ est dit espace des applications intégrales de Y dans X'.

Et l'on constate aussi que $L^1(.,.)$ et $\bar{\bar{\otimes}}$ sont en réalité des bifoncteurs et que l'on a réalisé un diagramme fonctoriel commutatif, exactement dual du précédent :

$$\begin{tikzcd}
\bar{\otimes}_{Y'} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varpi"'] & L_Y \\
L^1 \arrow[r, "\tilde{\tau}"'] & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

Ceci traduit en fait les égalités :

(6.2.3) Proposition :
$$(X \hat{\hat{\otimes}} Y)' = L^1(Y,X')$$
$$(X' \bar{\bar{\otimes}} Y')^{*} = L^1(Y',X)$$

c) Remarque : La terminologie (applications nucléaires ; intégrales) est la même que celle de Grotgendieck, car évidemment les notions sont les mêmes. Cependant elles sont traduites ici en respectant la dualité entre les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$. En particulier ce procédé "réhabilité" les applications intégrales et leur fait jouer un rôle tout à fait symétrique de celui joué par les applications nucléaires. On pourra s'en convaincre au paragraphe 8.

6.3. Formes bilinéaires nucléaires et formes bilinéaires intégrales.

Les espaces $L^1(Y',X)$ et $\mathcal{L}^1(Y,X')$ sont des espaces d'applications linéaires. Il leur correspond des espaces de formes bilinéaires.

Au premier correspond l'espace de Banach, noté $B^1(X',Y')$ des formes bilinéaires nucléaires sur $X'\times Y'$, de même que $L(Y',X)$ correspond à $B(X',Y')$.

Au second correspond l'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}^1(X,Y)$ des formes bilinéaires intégrales sur $X\times Y$, de même que se correspondent les espaces $\mathcal{L}(Y,X')$ et $\mathcal{B}(X,Y)$.

7. Les produits tensoriels $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ et $X' \bar{\otimes} Y'$

7.1 Le produit $X \hat{\hat{\otimes}} Y$

Ce produit tensoriel étant bien connu nous ne ferons que rappeler les propriétés les plus évidentes.

A - L'espace $C(T,X)$

Etant donné un espace compact T on désigne par $C(T,X)$ l'espace des fonctions continues : $T \to X$ muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est un espace de Banach. Lorsque $X = K$ on pose $C(T,K) = C(T)$ et l'on désigne par $\mathcal{M}(T)$ l'espace dual de $C(T)$. Ainsi l'espace $\mathcal{M}(T)$ des mesures sur T est essentiellement un espace de Waelbroeck.

Une démonstration classique donne :

(7.1.1) Proposition : $C(T,X) = L(X',C(T))$

Et une autre démonstration classique garantit la densité de l'espace $C(X) \otimes T$ dans l'espace $C(T,X)$ de sorte que :

(7.1.2) Théorème : $C(T,X) = C(T) \hat{\hat{\otimes}} X = L(X',C(T))$

On tire de là :

Corollaire 1. Soient S et T deux espaces compacts. Alors :

$$\left| \begin{array}{l} a)\ C(S) \hat{\hat{\otimes}} C(T) = C(S\times T) \\ b)\ M(S) \breve{\otimes} M(T) = M(S\times T). \end{array} \right.$$

L'égalité b) se déduit de l'égalité a) par dualité. En effet
$C(S\times T) = C(S) \hat{\hat{\otimes}} C(T) = L(M(T),C(S)) = B(M(S),M(T))$.

Ces formules forment évidemment la base de la théorie du produit de mesures.

B - Intégration vectorielle à valeur dans un espace de Waelbroeck.

La construction d'une intégrale vectorielle faible est intimement liée à la résolution d'un problème universel pour les applications continues d'un compact quelconque T dans le disque compact unité A d'un espace de Waelbreock X.

Rappelons les résultats suivants :

Désignons par $A(T)$ le disque compact unité de $M(T)$, c'est-à-dire l'ensemble des mesures de masse totale au plus égale à 1, par $A^+(T)$l'ensemble des mesures positives, de masse 1 et par P l'ensemble des mesures de Dirac ε_t lorsque t décrit T. Alors :

Lemme : $A(T) = \bar{\Gamma}(P)$; $A^+(T) = \bar{C}(P)$

$\bar{\Gamma}$ désigne l'enveloppe disquée fermée, $\bar{C}$ l'enveloppe convexe fermée.

Soit maintenant $f : T \to A$ une application continue. Alors f définit un morphisme de $\mathbb{B}$: $\Psi_f : X^* \to C(T)$ et par transposition un morphisme de $\mathbb{W}$: $\Phi_f : M(T) \to X$. En posant, pour μ $M(T)$.:

$$\Phi_f(\mu) = \int_T f\, d\mu$$

on obtient un élément de X, dit intégrale faible de f par rapport à μ , et caractérisé par :

$$(1) \qquad \langle \int_T f\, d\mu \ , x^* \rangle = \int_T \langle f(t) \ , x^* \rangle\, d\mu(t) \quad \forall x^* \in X^*$$

Par ailleurs la fonction $\varepsilon : T \to \mathcal{M}(T)$ qui, à $t \in T$ associe sa mesure de Dirac ε_t est bien continue de T dans le disque compact $A(T)$ de $\mathcal{M}(T)$. Alors, avec le lemme précédent :

(B.1) Proposition : Pour toute fonction continue $f : T \to A$, l'application

Φ_f est le seul morphisme de W rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & X \\ \mathcal{M}(T) \arrow[ur, dashed, "\Phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

Corollaire 1. $\phi_f(A(T)) = \bar{\Gamma}(f(T))$

$\phi_f(A^+(T)) = \bar{C}(f(T))$

Corollaire 2. Pour tout morphisme $u : X \to Y$ on a :

$$u\left(\int_T f \, d\mu\right) = \int_T (u_o f) d\mu$$

(7.2) Application au produit $\widetilde{\otimes}$.

Examinons les questions les plus importantes liées au produit tensoriel $\otimes$

a) Prenons pour T le disque A et pour f l'identité de A. Comme l'application $X^* \to C(A)$ est un monostrict (isométrie) on voit que l'application $\mathcal{M}(A) \to A$ est un épistrict. Donc :

Tout espace de Waelbroeck X est un quotient d'un espace $\mathcal{M}(T)$ en l'occurrence l'espace $\mathcal{M}(A)$.

Fixons maintenant deux espaces de Waelbroeck (X, A, τ_A) et (Y, B, τ_B) ainsi que les épistricts :

$$\phi : \mathcal{M}(A) \to X \text{ et } \psi . \mathcal{M}(B) \to Y$$

On en déduit, en identifiant les espaces $\mathcal{M}(A \times B)$ et $\mathcal{M}(A) \widetilde{\otimes} \mathcal{M}(B)$ (en associant $\varepsilon_a \otimes \varepsilon_b$ à $\varepsilon_{a,b}$), l'existence d'un épistrict $\rho : \mathcal{M}(A \times B) \to X \widetilde{\otimes} Y$ (corollaire de (5.4.2)), tel que $\rho(\varepsilon_{a,b}) = (\phi \widetilde{\otimes} \psi)(\varepsilon_a \otimes \varepsilon_b) = \phi(\varepsilon_a) \otimes \psi(\varepsilon_b) = a \otimes b$.

Ainsi le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & X \bar{\otimes} Y \\ M(A\times B) \arrow[ur, dotted, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

étant commutatif on a nécessairement $\rho = \Phi_{\otimes}$ et le corollaire 1 de (B.1) s'applique pour donner les résultats essentiels :

(7.2.1) <u>Théorème</u> : L'épistrict canonique $\rho : M(A\times B) \to X \bar{\otimes} Y$ associe à toute mesure $\lambda \in M(A\times B)$ l'intégrale faible

$$\rho\lambda = \int_{A\times B} a\otimes b \, d\lambda(a,b)$$

(7.2.2) <u>Théorème</u> : Pour tout élément $u \in A \bar{\otimes} B$, il existe une mesure $\lambda \in M(A\times B)$, positive et de masse 1, telle que

$$u = \int_{A\times B} a\otimes b \, d\lambda(a,b)$$

Il suffit de voir que $A \bar{\otimes} B$ coïncide avec l'enveloppe <u>convexe</u> fermée $\bar{C}(A \otimes B)$.

Ce dernier théorème est donc un théorème de représentation des éléments de $X \bar{\otimes} Y$ qui est l'analogue du théorème (4,4,5) pour la représentation des éléments de $X \hat{\otimes} Y$. Mais ici les séries absolument convergentes sont remplacées par des mesures sur des compacts.

8. <u>Applications intégrales et applications nucléaires.</u>

Etant donnés deux espaces de Banach X et Y, rappelons qu'une application nucléaire $\tilde{u} : Y' \to X$ est définie par la donnée d'un élément $u \in X \bar{\otimes} Y$, que l'on peut représenter sous la forme $u = \sum_0^\infty \lambda_n x_n \otimes y_n$ où $\|x_n\| \leq 1$; $\|y_n\| \leq 1$ et $\bar{\lambda} = (\lambda_n) \in \ell^1$ selon :

$$(1) \qquad \tilde{u}(y') = \sum_0^\infty \lambda_n \langle y_n, y' \rangle x_n$$

la norme nucléaire de $\tilde{u}$ étant donnée par la borne inférieure des quantités $\sum_0^\infty |\lambda_n|$ prise pour toutes les décompositions possibles du type (1).

De même une application intégrale $\tilde{v} : Y \to X'$ est définie par la donnée d'un élément $v \in X' \tilde{\otimes} Y'$, que l'on peut représenter par une intégrale faible $\int_{A' \times B'} x' \otimes y' \, d\lambda(x',y')$ où λ est une mesure (positive si l'on veut) sur le compact $A' \times B'$, selon :

$$(2) \qquad \langle \tilde{v}(y) , x \rangle = \int_{A' \times B'} \langle x,x' \rangle \langle y,y' \rangle \, d\lambda(x',y')$$

le disque compact unité de l'espace $\mathcal{L}^1(Y,X')$ étant décrit lorsque λ parcourt le disque des mesures de masse totale 1.

8.1 Invariance par transposition.

Chaque application nucléaire $\tilde{u}$, élément de $L^1(Y'X)$ définit une forme bilinéaire sur $X' \times Y'$, dite forme bilinéaire nucléaire. Il est clair que la permutation de X' et Y' établit sur l'espace $B^1(X',Y')$ de ces formes bilinéaires un isomorphisme d'espaces de Banach. Or cette permutation correspond exactement à la transposition pour les applications linéaires associées. De sorte que :

(9.1.1) Proposition : La transposée d'une application nucléaire est encore nucléaire et de même norme nucléaire.

Ce qui traduit les isomorphismes : $L^1(Y',X) = L^1(X',Y) = B^1(X',Y')$.

Et de même :

(8.1.2) Proposition : La transposée d'une application intégrale est encore une application intégrale.

Ce qui traduit les isomorphismes : $\mathcal{L}^1(Y,X') = \mathcal{L}^1(X,Y') = \mathcal{B}^1(X,Y)$

8.2 Caractère fonctoriel.

Nous avons affirmé l'existence de bifoncteurs $L^1(.,.)$ et $\mathcal{L}^1(.,.)$. En fait il faut prouver que l'action sur les morphismes est cohérente. Ce qui se fait immédiatement à partir des décompositions (1) et (2) :

(8.2.1) Proposition : Soient $\tilde{u} \in L^1(Y',X)$ une application nucléaire, $\tilde{v}_1 \in \mathcal{L}^1(Y_1,X_1')$ une application intégrale, $\alpha : X \to X$ et $\beta : Y \to Y$ des morphismes de $\mathbb{B}$, $\alpha' : X_1' \to X'$ et $\beta' : Y_1' \to Y'$ les morphismes de $\mathbb{W}$, transposées de α et β.

$$Y_1' \xrightarrow{\beta'} Y' \xrightarrow{\tilde{u}} X \xrightarrow{\alpha} X_1 \; ; \; Y \xrightarrow{\beta} {}_1 \xrightarrow{\tilde{v}_1} X_1' \xrightarrow{\alpha'} X'$$

L'application $\tilde{u} = \alpha.\tilde{u}.\beta' : Y_1' \to X_1$ est nucléaire et $\|\tilde{u}_1\|_1 \leq \|\tilde{u}\|_1$.

L'application $\tilde{v} = \alpha'.\tilde{v}_1.\beta : Y \to X'$ est intégrale et contenue dans le disque compact unité de $\mathcal{L}^1(Y,X')$ lorsque $\tilde{v}_1$ est contenue dans le disque compact unité de $\mathcal{L}^1(Y\ ,X_1')$.

8.3 Application nucléaire-type.

Désignons par $\ell^1 \in \mathbb{B}$ et $\ell^\infty = (\ell^1)' \in \mathbb{W}$ les espaces habituels $\ell^1_{\mathbb{N}}$ et $\ell^\infty_{\mathbb{N}}$. Soit de l'application canonique, dite application diagonale :

$$d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad d(n) = (n,n)$$

On lui associe un morphisme δ' de $\mathbb{W}$:

$$\delta' : \ell^\infty_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \ell^\infty \qquad (\delta'\bar{\zeta})_n = \zeta_{n,n}$$

et par transposition un morphisme δ de $\mathbb{B}$:

$$\delta : \ell^1 \to \ell^1_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \qquad (\delta\bar{\xi})_{n,m} = \begin{cases} \xi_n \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$$

Comme $\|\delta\bar{\xi}\|_1 = \|\bar{\xi}\|_1$, on voit que δ est un monostrict, donc δ' est un épistrict. Désignons par $(\bar{\varepsilon}_k)_{k>0}$ la base canonique de ℓ^1 définie par $\bar{\varepsilon}_k = (\delta_{n,k})$ où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker. On sait que l'espace $\ell^1_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ s'identifie à l'espace $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1$ en associant à $\bar{\zeta} = (\zeta_{n,m})$ l'élément $\sum_{n,m} \zeta_{n,m}\, \bar{\varepsilon}_n \otimes \bar{\varepsilon}_m \in \ell^1 \hat{\otimes} \ell^1$. Par ailleurs l'application canonique $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1 \to \ell^1 \hat{\hat{\otimes}} \ell^1$ étant injective (ce qui signifie que ℓ^1 vérifie la propriété d'approximation : cf.9.), on peut identifier $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1$ et l'espace $L^1(\ell^\infty,\ell^1)$. Ainsi l'application diagonale d fournit un monostrict $\Delta : \ell^1 \to L^1(\ell^\infty,\ell^1)$.

Pout $\bar{\xi} = (\xi_n) \in \ell^1$, on a $\Delta_{\bar{\xi}} = \sum_0^\infty \xi_n \; \bar{\varepsilon}_n \otimes \bar{\varepsilon}_n$ ce qui donne pour $\bar{\eta} = (\eta_n) \in \ell^\infty$:

$$\Delta_{\bar{\xi}}(\bar{\eta}) = \sum_0^\infty \xi_n \eta_n \; \bar{\varepsilon}_n = (\xi_n \eta_n) = \bar{\xi}.\bar{\eta}$$

Résumons :

Lemme 1 : Toute suite $\bar{\xi} \in \ell^1$ définit une application nucléaire $\Delta_{\bar{\xi}} \in L^1(\ell^\infty, \ell^1)$ par l'égalité $\Delta_{\bar{\xi}}(\bar{\eta}) = \bar{\xi}.\bar{\eta}$. L'application $\Delta : \ell^1 \to L^1(\ell^\infty, \ell^1)$ est un monostrict.

Une telle application $\Delta_{\bar{\xi}}$ sera qualifiée d'application nucléaire-type. L'intérêt d'une telle application est bien illustré par la proposition suivante.

(8.3.1) Proposition : Pour toute application nucléaire $\tilde{u} \in L^1(Y', X)$ il existe des morphismes $\alpha : \ell^1 \to X$, $\beta : \ell^1 \to Y$ et une application nucléaire-type $\Delta_{\bar{\nu}} : \ell^\infty \to \ell^1$ tels que $\tilde{u}$ se factorise en $\tilde{u} = \alpha.\Delta_{\bar{\nu}}.\beta'$. Réciproquement une application factorisée de cette manière est évidemment nucléaire.

On sait que $\tilde{u}$ se représente par $u = \sum_0^\infty \nu_n x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes} Y$, où $\|x_n\| \leq 1$; $\|y_n\| \leq 1$ et $\bar{\nu} = (\nu_n) \in \ell^1$. Il suffit alors de définir α et β par :

$$\alpha(\bar{\xi}) = \sum_0^\infty \xi_n x_n \qquad\qquad \beta(\bar{\xi}) = \sum_0^\infty \xi_n y_n$$

pour vérifier l'égalité : $\tilde{u} = \alpha.\Delta_{\bar{\nu}}.\beta'$.

Factorisation à travers un espace de Hilbert.

Un espace de Hilbert H (plus généralement un espace de Banach réflexif) définit à la fois un objet de $\mathbb{B}$, noté encore H, et un objet de $\mathbb{W}$, noté H_σ , lorsqu'on place sur sa boule unité la topologie affaiblie $\sigma(H,H')$.

Par ailleurs, on sait, (Schatten : [3]), que $H \hat{\otimes} H = L^1(H_\sigma, H)$ (car un espace de Hilbert possède la propriété d'approximation).et que $H \hat{\hat{\otimes}} H = L(H_\sigma, H) =$ $= K(H,H)$ où $K(H,H)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs compacts de H.

Cela étant, à toute suite $\bar{\nu} = (\nu_n) \in \ell^1$, on peut associer une suite (r_n) avec $r_n \neq 0$, $r_n \to +\infty$, telle que la suite $\bar{\lambda} = (\lambda_n)$, $\lambda_n = r_n \nu_n$, soit encore dans ℓ^1. Soit $\bar{\rho} = (\rho_n)$, $\rho_n = 1/r_n$. Alors $\bar{\rho} \in c_o$, $\bar{\nu} = \bar{\rho}.\bar{\lambda}$, et quitte à modifier ρ_n , on peut supposer $\lambda_n \geqslant o$ et $\|\lambda\|_1 \leqslant 1$.

On définit alors les applications :

$$\gamma : \ell^2 \to \ell^1 \qquad \gamma(\xi) = (\xi_n \sqrt{\lambda_n})$$

$$\Phi : \ell^2 \to \ell^1 \qquad \Phi(\bar{\xi}) = \bar{\rho}.\bar{\xi}.$$

On voit que γ est un morphisme de $\mathbb{B}$, que Φ est un opérateur hermitien dont les valeurs propres ρ_n forment une suite de c_o. Donc Φ est compact et $\Phi \in K(\ell^2, \ell^2)$. Enfin il est clair que $\Delta_{\bar{\nu}} = \gamma.\phi.\gamma'$, ce qui donne une factorisation à travers un espace de Hilbert séparable. En revenant à X et Y on obtient :

(8.3.2) <u>Proposition</u> : Pour toute application nucléaire $\tilde{u} \in L^1(Y', X)$ il existe un espace de Hilbert séparable H, des morphismes

$$r : K \to X \text{ et } s : H \to Y$$

et une application $\Phi \in L(H_\sigma, H) = K(H,H)$ tels que $\tilde{u} = r.\Phi.s'$.

La situation est résumée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[rrr, "u"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "s'"'] & & & X \\
& \ell^\infty \arrow[r, dash, "\Delta_{\bar{\nu}}"] \arrow[dl, "\gamma'"] & \ell^1 \arrow[ur, "\alpha"'] & \\
H_\sigma \arrow[rrr, "\Phi"] & & & H \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[uu, "r"']
\end{tikzcd}$$

8.4. <u>Applications intégrales-type.</u>

La procédure est analogue, l'ensemble $\mathbb{N}$ étant remplacé par un compact T quelconque. L'application diagonale $d : T \to T{\times}T$, $d(t) = (t,t)$ donne naissance à un morphisme δ' de $\mathbb{B}$.

$$\delta' : C(T{\times}T) \to C(T)$$

et par transposition à un morphisme δ de $\mathbb{W}$:

$$\delta : M(T) \to M(T{\times}T)$$

On constate aisément que δ' est un épistrict, donc δ est un <u>monostrict.</u>

Par ailleurs les égalités (7.1.2)

$$C(T\times T) = L(M(T),C(T)) = C(T) \hat{\otimes} C(T)$$

donnent par dualité :

$$M(T\times T) = M(T) \widetilde{\otimes} M(T) = L^1(C(T),M(T))$$

Et, si l'on se souvient que $M(T\times T)$ est isomorphe à $M(T) \widetilde{\otimes} M(T)$ en associant à toute mesure $\lambda \in M(T\ T)$ l'intégrale faible

$$\int_{T\times T} \varepsilon_s \otimes \varepsilon_t \, d\lambda(s,t)$$

on voit que d induit un <u>monostrict</u> Δ :

$$\Delta : M(T) \to L^1(C(T),M(T))$$

défini par :

$$\Delta_\mu = \int_T \varepsilon_t \otimes \varepsilon_t \, d\mu(t) \quad \text{, de sorte que, pour } f \in C(T) :$$

$$\Delta_\mu(f) = \int_T \langle f,\varepsilon_t\rangle \varepsilon_t \, d\mu(t) = \int_T f(t)\varepsilon_t \, d\mu(t)$$

On reconnait dans le dernier membre la mesure $f.\mu$. Donc :

<u>Lemme 2</u> : toute mesure $\mu \in M(T)$ définit une application intégrale $\Delta_\mu \in L^1(C(T),M(T))$ par l'égalité $\Delta_\mu(f) = f.\mu$. L'application $\Delta : M(T) \to L^1(C(T),M(T))$ est un monostrict de $\mathbb{W}$.

Une telle application est dite application intégrale-type. Et l'on peut factoriser toute application intégrale à travers une application intégrale-type puisque :

(8.4.1) <u>Proposition</u> : Pour toute application intégrale $\tilde{v} \in L^1(Y,X')$ il existe un compact T, des morphismes $\alpha : X \to C(T)$,$\beta : Y \to C(T)$, et une application intégrale-type $\Delta_\mu : C(T) \to M(T)$ tels que $\tilde{v}$ se factorise en $\tilde{v} = \alpha'.\Delta_\mu.\beta$. Réciproquement une application factorisée de cette manière est évidemment intégrale.

On sait que $\tilde{v}$ est déterminée par la donnée d'une mesure μ, positive si l'on veut, sur le disque compact $T = A'\times B'$, selon :

$$\tilde{v}(y) = \int_{A'\times B'} \langle y,y'\rangle x' \, d\mu(x',y')$$

Définissons α et β par : $(\alpha x)(x',y') = \langle x,x'\rangle$

$$(\beta y)(x',y') = \langle y,y'\rangle$$

Alors :

$$\langle x,\alpha'.\Delta_\mu.\beta y\rangle = \int_T \alpha x.\beta y \, d\mu = \langle x,\tilde{v}y\rangle$$ ce qui prouve l'égalité $\tilde{v} = \alpha'.\Delta_\mu.\beta$ et termine la démonstration.

Factorisation à travers un espace de Hilbert.

Supposons μ positive et soit λ la mesure proportionnelle à μ et de mesure totale 1. Posons $H = L^2(\lambda)$. L'injection canonique $\gamma : C(T) \to H$ est un morphisme, donc sa transposée $\gamma' : H_\sigma \to \mathcal{M}(T)$ est un morphisme de $\mathfrak{W}$ qui associe à toute fonction $g \in H$ la mesure $g.\lambda$. Enfin l'application identique 1_H de H est contenue dans l'espace $\mathcal{L}(H,H_\sigma)$ donc aussi $\Phi = \mu(1).1_H$. Alors pour $f \in C(T)$ on a : $(\gamma'.\Phi.\gamma)(f) = \mu(1) f.\lambda = f.\mu$ ce qui prouve l'égalité $\gamma'.\phi.\gamma = \Delta_\mu$.

Remarquons encore que si X et Y sont séparables le compact T est métrisable, ce qui assure que $L^2(\lambda)$ est aussi séparable. Donc :

(8.4.2) Proposition : Pour toute application intégrale $\tilde{v} \in \mathcal{L}^1(Y,X')$ il existe un espace de Hilbert H (séparable lorsque X et Y sont séparables) des morphismes $r : X \to H$, $s : Y \to H$, et une application $\Phi \in \mathcal{L}(H,H_\sigma)$, qui est d'ailleurs une homothétie, tels que $\tilde{v} = r'.\Phi.s$.

Ce qui résume par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rrr, "v"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "s"'] & & & X' \\
& C(T) \arrow[r, "\Delta_\mu"] \arrow[dl, "\gamma"] & \mathcal{M}(T) \arrow[ur, "\alpha'"] & \\
H \arrow[rrr, "\Phi"'] & & & H \arrow[ul, "\gamma'"] \arrow[uu, "r'"']
\end{tikzcd}$$

8.5. Relations entre applications intégrales et applications nucléaires.

(8.5.1) Proposition : Soient E,F , X,Y des espaces de Banach, et des applications applications :

$$F \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{\tilde{u}} X \xrightarrow{f} E'$$

On suppose $\tilde{u}$ nucléaire, $f \in L(X,E')$ et $g \in L(F,Y')$. Alors $f.\tilde{u}.g$ est intégrale.

On peut supposer, à une homothétie près, que f et g envoient respectivement les boules unité de X et F dans les compacts unité de E' et Y'. L'application $\tilde{u}$ est définie par $u = \sum_{o}^{\infty} \nu_n x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes} Y$. Posons $f(x_n) = a'_n \in E'$ et $g'(y_n) = b'_n \in F'$. Comme $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1$, les suites (a'_n) et (b'_n) sont contenues dans les compacts unité A' et B' de E' et F'. Soit maintenant μ la mesure sur $A' \times B'$ définie par $\mu = \Sigma \nu_n \, \varepsilon_{a'_n} \otimes \varepsilon_{b'_n}$, de masse totale au plus égal à $\Sigma |\nu_n|$. On vérifie que l'application $\tilde{v} = f.\tilde{u}.g$ est justement définie par la mesure μ, ce qui prouve que $\tilde{v}$ est intégrale.

Etant donné un espace de Banach X, on peut munir son dual X' d'une structure d'espace de Banach. Pour éviter les confusions nous noterons alors par X'_b ce dual. On reconnait en l'espace $(X'_b)'$ le bidual habituel X", qui doit donc être lu dans W. Evidemment l'injection canonique $j : X \to X''$ est un élément de $L(X,X'')$, ce qui donne le corollaire :

Corollaire:Pour les mêmes hypothèses l'application $\tilde{u}.g : F \to X$ définit une application $j.\tilde{u}.g : F \to X''$ qui est intégrale.

La propriété analogue avec les applications nucléaires va s'énoncer ainsi :

(8.5.2) Proposition : Soit $Y \xrightarrow{\tilde{v}} X' \xrightarrow{f} E$. On suppose $\tilde{v}$ intégrale et $f \in L(X',E)$. Alors l'application $f.\tilde{v}$ se relève en une application nucléaire de Y" dans E.

On peut supposer $\tilde{v}(B) \subset A'$. On sait que $f(A')$ est un disque compact de E, de sorte qu'il existe une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ de E telle que $f(A')$ soit contenue dans l'enveloppe disquée fermée $\bar{\Gamma}(e_n)$. Soit L le compact de E formé de la suite $(e_n)_{n\geq o}$, avec $e_o = o$. Alors $H = \bar{\Gamma}(L)$ est un disque compact de E et $f(A') \subset H$. Soit maintenant E_H l'espace vectoriel engendré par H dans E, et muni de la structure d'espace de Waelbroeck définie par le compact unité H. Evidemment l'application $f : X' \to E$ se factorise à travers E_H et l'application $f : X' \to E_H$ obtenue est un morphisme de $\mathbb{W}$. Il suit de là que $f.\tilde{v} : Y \to E_H$ est intégrale et qu'on peut la représenter par un élément $z \in Y' \bar{\otimes} E_H$, que l'on peut, à une homothétie près, supposer contenu dans le compact unité $B' \bar{\otimes} H$ de $Y' \bar{\bar{\otimes}} E_H$. Or on sait que $B' \bar{\otimes} H = \bar{\Gamma}(B' \otimes H)$ et l'égalité $H = \bar{\Gamma}(L)$ donne rapidement $B' \bar{\otimes} H = \Gamma'(B' \otimes L)$ et même $B' \bar{\otimes} H = \bar{C}(B' \otimes L)$, B étant un disque.

On est donc ramené à (7.1.B), au corollaire 1 de prop.(B,1), où l'on prend pour T le compact $B' \times L$. Ainsi il existe une mesure λ sur $B' \times L$, positive et de masse 1, telle que, dans $Y' \bar{\otimes} E_H$, on ait :

$$z = \int_{B' \times L} y' \otimes e \, d\lambda(y',e)$$

Or $B' \times L = \bigcup_{n \geq o} B' \times \{e_n\}$, de sorte que λ est en réalité définie par une suite (μ_n) de mesures positives sur B' de façon que $\lambda = \sum_o^\infty \mu_n \otimes \varepsilon_{e_n}$. La suite $(\mu_n(1))$ est dans ℓ^1 car $\sum_o^\infty \mu_n(1) = \lambda(1) = 1$. Alors :

$$z = \sum_o^\infty \left(\int_{B'} y' \, d\mu_n\right) \otimes e_n$$

Or, on peut écrire $\int_{B'} y' \, d\mu_n = \mu_n(1) y'_n$, ou $y'_n \in B'$. En résumé z s'écrit, dans $Y' \bar{\otimes} E_H$:

$$z = \sum_o^\infty \mu_n(1) \, y'_n \otimes e_n$$

ce qui prouve que pour tout $y \in Y$ et tout $e' \in E'$ (un tel e' définit bien un élément de $(E_H)^*$) on a :

$$\langle f.\tilde{v}.y, e' \rangle = \sum_o^\infty \mu_n(1) \langle y, y'_n \rangle \langle e_n, e' \rangle$$

Posons alors $\nu_n = \mu_n(1)$ et $\nu = (\nu_n)\ \mathcal{L}^1$. La formule précédente montre que l'on peut relever f.v en une application : $Y'' \to E$ définie par :
$y'' \mapsto \sum_0^\infty \nu_n \langle y'', y'_n\rangle\langle e_n, e'\rangle$ qui est nucléaire de façon évidente.

Corollaire : Soient E,F , X,Y des espaces de Banach et des applications :

$$F' \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\tilde v} X' \xrightarrow{f} E$$

On suppose $\tilde v$ intégrale, $f \in L(X',E)$ et $g \in L(F',Y)$. Alors $f.\tilde v.g$ est nucléaire.

Car $f.\tilde v$ se relève en une application nucléaire $Y'' \to E$ et manifestement g induit une application $F' \to Y''$ qui est un morphisme de W.

9. La propriété d'approximation.

Nous ne reprendrons pas en détail le problème d'approximation. Tous les résultats connus actuellement se trouvent dans [1]. Disons cependant qu'un espace Y possède la propriété d'approximation si et seulement, pour tout $X \in \mathbb{B}$, le morphisme canonique $X \hat{\otimes} Y \to L(Y',X)$ est injectif. On sait qu'il revient au même de dire que, pour tout $X \in \mathbb{B}$, le produit tensoriel algèbrique $X \otimes Y$ est dense dans l'espace $L(Y',X)$.

Cette définition se laisse traiter fonctoriellement. En effet dans les diagrammes fonctoriels de (6.2), transposés l'un de l'autre :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\otimes}_Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p"'] & L_{Y'} \\
L^1_{Y'} \arrow[r, "\tilde{t}"'] & \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{\otimes}_{Y'} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varpi"'] & \mathcal{L}_Y \\
\mathcal{L}^1_Y \arrow[r, "\tilde{\tau}"'] & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

elle exprime que p est un isomorphisme fonctoriel, ou bien que r est un isomorphisme fonctoriel. En suivant [1] on peut donc affirmer :

(9.1) Théorème (Grothendieck).

Les Hypothèses suivantes sur l'espace de Banach Y sont équivalentes :

a) $\hat{\otimes}_Y = L^1_{Y'}$,

b) $\hat{\hat{\otimes}}_Y = L_{Y'}$,

c) $\bar{\otimes}_{Y'} = \mathcal{L}^1_Y$

d) $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'} = \mathcal{L}_Y$

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que Y possède la propriété d'approximation.

Lorsque Y possède la propriété d'approximation le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ possède un foncteur L-adjoint, qui n'est autre que $\bar{\otimes}_{Y'}$. De même le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ possède un foncteur $\mathcal{L}$-adjoint qui est $\hat{\otimes}_Y$.

En fait ces propriétés se trouvent suffisantes pour entraîner que Y possède la propriété d'approximation.

(9.2) Théorème : Les hypothèses (9.1) sont encore équivalentes aux hypothèses suivantes :

e) Le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ possède un L-adjoint.

f) Le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ possède un $\mathcal{L}$-adjoint.

Démontrons l'équivalence de e) et b) c'est-à-dire l'implication e) $\to$ b).
Soit $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ un foncteur L-adjoint au foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$. Pour $X \in \mathcal{W}$ et $Z \in \mathcal{B}$ on a :

$$L(\mathcal{F}(X), Z) = L(X, Z \,\hat{\hat{\otimes}}\, Y)$$

En prenant $X = K$, on obtient $Z \,\hat{\hat{\otimes}}\, Y = L(\mathcal{F}(K), Z)$, puis, avec $Z = K$, l'égalité $Y = [\mathcal{F}(K)]^*$ d'où $Y' = \mathcal{F}(K)$. Ainsi $Z \,\hat{\hat{\otimes}}\, Y = L(Y', Z)$ ce qui prouve l'égalité $\hat{\hat{\otimes}}_Y = L_{Y'}$. On démontrerait de même l'équivalence de f) et d).

Revenons un instant au cas général où l'on ne fait aucune hypothèse sur l'espace de Banach Y. Bien qu'alors le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ ne possède pas nécessairement un L-adjoint, on peut voir qu'il conserve quelques propriétés des foncteurs admettant un L-adjoint. Et de même le foncteur $\overline{\otimes}_Y$, conserve quelques propriétés de commutation. En effet :

(9.3) Proposition : Le foncteur $\widehat{\otimes}_Y$ commute aux monomorphismes , aux monostricts et aux puissances finies dans la catégorie $\mathbb{B}$. Le foncteur $\overline{\otimes}_Y$, commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux puissances quelconques dans la catégorie $\mathbb{W}$.

Démonstration. a)

a) Si $u : X \to X_1$ est un monomorphisme (resp : strict) de $\mathbb{B}$, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \widehat{\otimes} Y \arrow[r] \arrow[d, "u \widehat{\otimes} 1_Y"'] & L(Y', X) \arrow[d, "L(Y', u)"] \\ X_1 \widehat{\otimes} Y \arrow[r] & L(Y', X_1) \end{tikzcd}$$

où les lignes sont des monostricts, permet de voir que $u \widehat{\otimes} 1_Y$ est un monomorphisme (resp : strict).

b) Soit I un ensemble quelconque. On sait que l'espace de Banach produit $K^I = \ell^\infty_I$ possède la propriété d'approximation. Désignons, provisoirement, pour éviter toute confusion, par $\mathcal{K}$ le corps K mais lu dans la catégorie $\mathbb{W}$. Alors l'espace de Waelbroeck somme directe $\mathcal{K}^{(I)} = (K^I)'$ est tel que, pour $X \in \mathbb{B}$, l'application canonique :

$$X' \overline{\otimes} \mathcal{K}^{(I)} \to L(K^I, X')$$

soit un monomorphisme, ce qui prouve que l'application canonique

$$\mathcal{K}^{(I)} \overline{\otimes} X' \to L(X, \mathcal{K}^{(I)})$$

est aussi un monomorphisme. Par dualité, il en résulte que l'application cononique

$$K^I \widehat{\otimes} X \to L(X', K^I)$$

est un épimorphisme ce qui garantit l'égalité :

$$K^I \widehat{\otimes} X = L(X', K^I) = (\mathcal{K}^{(I)} \overline{\otimes} X')^*.$$

Supposons maintenant l'ensemble I fini. Puisque $\tilde{\otimes}_{X'}$ commute aux sommes directes finies, on a l'égalité

$$K^{(I)} \tilde{\otimes} X' = (X')^{(I)}$$

d'où

$$K^I \hat{\hat{\otimes}} X = X^I$$

Il suit de là, grâce à l'associativité du produit $\hat{\hat{\otimes}}$, que

$$X^I \hat{\hat{\otimes}} Y = (K^I \hat{\hat{\otimes}} X) \hat{\hat{\otimes}} Y = K^I \hat{\hat{\otimes}} (X \hat{\hat{\otimes}} Y) = (X \hat{\hat{\otimes}} Y)^I$$

ce qui, pour le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$, termine la démonstration.

c) Pour le foncteur $\tilde{\tilde{\otimes}}_{Y'}$, le raisonnement est le même, en permutant les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$. Mais comme on sait que $\hat{\otimes}_X$ commute aux sommes directes quelconques de $\mathbb{B}$, l'hypothèse de finitude pour I n'est pas à retenir. La démonstration se termine en utilisant l'associativité du produit $\tilde{\tilde{\otimes}}$ dans la catégorie $\mathbb{W}$, (laquelle se prouve par des arguments évidents de densité).

Pour aller plus loin et examiner une réciproque il convient de revenir sur la notion de bidual. En réalité la correspondance $X \to X''$ définit un foncteur covariant :

$$\text{Bid} : \mathbb{B} \to \mathbb{W}$$

Et lorsqu'on associe à tout espace de Waelbroeck $\mathcal{X}$ l'espace de Banach $\mathcal{X}_b$ obtenu en prenant pour disque unité le compact unité de $\mathcal{X}$, on réalise aussi un foncteur covariant :

$$\text{Ban} : \mathbb{W} \to \mathbb{B}$$

Cela étant on a :

(9.4) Proposition : Le foncteur Bid est adjoint à gauche au foncteur Ban.

L'égalité $\text{Hom}(X,\mathcal{Y}_b) = \text{Hom}(X'',\mathcal{Y})$ provient exxentiellement du fait que tout morphisme $u : X \to \mathcal{Y}_b$ est continu pour les topologies faibles $\sigma(X,X')$ et $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$, et de la densité de la boule unité de X dans le disque compact unité de X".

On peut maintenant prouver :

(9.5) Théorème : Pour que l'espace de Banach Y possède la propriété d'approximation il suffit que le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ commute aux produits quelconques de $\mathbb{W}$.

Car alors $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ commute aux limites gauches dans $\mathbb{W}$. Or la catégorie $\mathbb{W}$ est localement petite et possède un séparateur K. Un théorème catégorique de Freyd-Mitchell ([2], V-3, th. 3.1 et cor 3.2) assure dans, ces conditions, l'existence d'un foncteur $F : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$, adjoint à gauche au foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$. On a donc, pour X et Z dans $\mathbb{W}$:

$$\mathrm{Hom}(F(X),Z) = \mathrm{Hom}(X,Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y')$$

En faisant $X = Z = K$ on recueille :

$$\mathrm{Hom}(F(K),K) = \mathrm{Hom}(K,Y')$$

d'où il suit l'égalité :

$$\mathrm{Hom}(K,[F(K)]^*) = \mathrm{Hom}(K,Y'_b)$$

d'où l'on tire $Y'_b = [F(K)]^*$ puis $F(K) = Y''$.

Ainsi, en revenant à Z, on a :

$$\mathrm{Hom}(Y'',Z) = \mathrm{Hom}(K,Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y')$$

ce qui donne encore avec (9.4) :

$$\mathrm{Hom}(Y,Z_b) = \mathrm{Hom}(K,Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y')$$

Or le premier ensemble n'est autre que le disque (compact) unité de l'espace $L(Y,Z)$ et le second coïncide avec le disque (compact) unité de $Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y'$. Les deux espaces de Waelbroeck $L(Y,Z)$ et $Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y'$ sont donc algèbriquement identiques, ce qui suffit pour entraîner leur égalité dans la catégorie $\mathbb{W}$ puisque, de toute façon $Z \mathbin{\bar{\bar{\otimes}}} Y'$ est un sous-espace de $L(Y,Z)$. On a donc prouver (car tous les isomorphismes qui interviennent sont fonctoriels) l'égalité des foncteurs $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ et L_Y, ce qui nous ramène à l'hypothèse d) de (9.1) et termine la démonstration.

Remarque 1 : Il reste, pour terminer, à poser deux questions non résolues.

1 - La commutation du foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ aux produits finis de $\mathbb{B}$ entraine-t-elle que Y possède la propriété d'approximation ?

Ce qui gêne est évidemment que le théorème cité de Freyd-Mitchell ne s'applique pas.

2 - La commutation du foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_Y$, aux produits finis de $\mathbb{W}$ (compte tenu de la commutation aux puissances quelconques) entraîne-t-elle la commutation aux produits quelconques donc que Y possède la propriété d'approximation ?

Remarque 2 : Il est inutile pour la question 1, de supposer que le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ commute aux produits quelconques de $\mathbb{B}$ pour pouvoir justement appliquer le théorème de Freyd-Mitchell. En effet, (et nous aurons ainsi un exemple de foncteur $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ admettant un foncteur $\mathbb{W} \to \mathbb{W}$ L-adjoint et ne commutant pas aux produits quelconques de $\mathbb{B}$, ce qui montrera que la condition de finitude du 1er théorème de commutation (3.4.1) est vraiment essentielle) :

(9.6) Proposition : On suppose que le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$, ou le foncteur L_Y, , commute aux produits quelconques de $\mathbb{B}$. Alors Y est de dimension finie.

Faisons la démonstration avec le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$. Alors, avec le théorème de Freyd-Mitchell, ce foncteur admet un adjoint à gauche dans la catégori $\mathbb{B}$, soit $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Ainsi, pour X et Z dans $\mathbb{B}$ on a :

$$\mathrm{Hom}(F(X),Z) = \mathrm{Hom}(X,Z \hat{\hat{\otimes}} Y)$$

Et avec $X = Z = K$ on obtient :

$$\mathrm{Hom}(F(K),K) = \mathrm{Hom}(K,Y).$$

Posons $E = F(K) \in B$. Ainsi :

$$\mathrm{Hom}(K,Y) = \mathrm{Hom}(K,E') = \mathrm{Hom}(K,E'_b)$$

de sorte que $Y = E'_b$. Mais alors avec $X = K$ et $Z = E$ on a :

$$\mathrm{Hom}(E,E) = \mathrm{Hom}(K, E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} E'_b)$$

Cette égalité prouve que l'application identique 1_E est un élément de $E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} E'_b$, en particulier elle est compacte, ce qui assure bien que E, et partant $Y = E'_b$, est de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1]- A. GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Amer. Math. Soc. 16 - 1965.

[2]- B. MITCHELL : Theory of categories. Academic Press. New-York - 1965.

[3]- R. SCHATTEN : Norm ideals of completely continuous operators. Springer-Verlag - Berlin - 1960.

[4]- L. WAELBROECK : Compacité et dualité en analyse linéaire Public. du Départ. de Math. - LYON. 1965 - t. 2 fasc. 1 - p. 72-92.

[5]- L. WAELBROECK : Duality and the injective tensor product. Math. Annalen 163 - (1966) p. 122-126.

Manuscrit remis le 1 juin 1966

Henri Buchwalter
Maitre de Conférences
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
15, quai Claude Bernard
69-LYON