

A. COSTE

La catégorie des objets au-dessus d'un objet d'une catégorie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A4_0>

© Université de Lyon, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964
2° niveau

7
o

LA CATEGORIE DES OBJETS
AU-DESSUS D'UN OBJET D'
UNE CATEGORIE
par A. Coste

Cet exposé a pour but de transcrire dans le cas général quelques notions et propositions établies par A. Grothendieck dans un cas particulier, dans [2]. Pour les applications voir [6] et [7]

1. Définitions.

Dans tout cet exposé $\mathcal{C}$ désignera une catégorie sur laquelle on ne fera pour l'instant aucune hypothèse, et S un objet choisi une fois pour toutes dans la catégorie $\mathcal{C}$. Si X est un objet de $\mathcal{C}$ et φ un morphisme de X dans S , on dira que le couple (X, φ) est un objet au-dessus de S . Par abus d'écriture et si aucune confusion n'est possible (ce qui est rare) on désignera simplement par X un objet au-dessus de S , le morphisme φ étant sous-entendu. Si l'on considère S comme objet au-dessus de lui-même, ce sera toujours muni du morphisme identique.

On dira encore que X est un S -objet, que S est l'objet de base du S -objet X , et que φ est le morphisme structural du S -objet X .

Si (X, φ) et (Y, ψ) sont deux S -objets, on appellera morphisme de X dans Y au-dessus de S , ou S -morphisme de X dans Y , un morphisme u de X dans Y (au sens de $\mathcal{C}$) tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & S & \end{array}$$

soit commutatif.

Proposition 1. Les objets au-dessus de S munis des S -morphisme forment une catégorie.

Si X, Y, Z sont trois S -objets, u un S -morphisme de X dans Y ,

v un S -morphisme de Y dans Z , $v.u$ est un morphisme (dans $\mathcal{C}$) de X dans Z et

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi & \swarrow \theta & \\ & & S & & \end{array}$$

$$\theta.v.u = \psi.u = \varphi, \quad .$$

donc MOR_1 est vérifié; 1_X est aussi un S -morphisme, donc MOR_2 est vérifié. On notera $Hom_S(X, Y)$ l'ensemble des S -morphisms de X dans Y ; c'est un sous-ensemble de $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Soit (X, φ) un S -objet : on appelle S -section de X un S -morphisme de S dans X ; autrement dit une S -section de X est un morphisme $\psi : S \rightarrow X$ tel que $\varphi.\psi = 1_S$.

Exemple : soit Top la catégorie des espaces topologiques munis des applications continues; si X est un objet de Top , on appelle espace découpé de base X un X -objet; en particulier, les faisceaux de base X peuvent être considérés comme des X -objets (cf.[1]).

2. Produit de deux S -objets.

Soit (M_1, φ_1) et (M_2, φ_2) deux S -objets; conformément aux définitions générales (cf.[3], par exemple), on appellera produit direct de (M_1, φ_1) et (M_2, φ_2) un triplet $((P, \lambda), p_1, p_2)$, où (P, λ) est un S -objet, $p_i \in Hom_S(P, M_i)$ ($i = 1, 2$) tel que pour tout S -objet T , $f \mapsto (p_1.f, p_2.f)$ soit une bijection de $Hom_S(T, P)$ sur $Hom(T, M_1) \times Hom(T, M_2)$.

Proposition 2. Si dans $\mathcal{C}$ le produit fibré de φ_1 et φ_2 au-dessus de S existe, alors le produit direct des S -objets (M_1, φ_1) et (M_2, φ_2) existe.

Soit en effet, (P, p_1, p_2) le produit fibré de φ_1 et φ_2 au-dessus de S , et soit $\lambda = \varphi_1.p_1 = \varphi_2.p_2$; alors $((P, \lambda), p_1, p_2)$ est le produit direct de M_1 et M_2 , car p_1 et p_2 sont des S -morphisms et la seconde condition résulte de la définition des produits fibrés.

On notera $M_1 \times_S M_2$ le produit direct des S -objets (M_1, φ_1) et (M_2, φ_2) .

Soit S' un objet de $\mathcal{C}$, si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, S')$, et si (X, φ) est un S -objet, (X, f, φ) est un S' -objet.

Proposition 3. Si f est un monomorphisme, alors le produit direct des S' -objets (M_1, f, φ_1) et (M_2, f, φ_2) existe si et seulement si le produit direct des S -objets (M_1, φ_1) (M_2, φ_2) existe.

Si $((P, \lambda), p_1, p_2)$ est le produit direct des S -objets (M_1, φ_1) et (M_2, φ_2) , alors $((P, f, \lambda), p_1, p_2)$ est le produit direct des S' -objets (M_1, f, φ_1) et (M_2, f, φ_2) , et réciproquement; en effet, puisque f est un monomorphisme, $f \cdot \varphi_1 \cdot p_1 = f \cdot \varphi_2 \cdot p_2$ entraîne $\varphi_1 \cdot p_1 = \varphi_2 \cdot p_2$ et p_1 et p_2 sont des S' -morphisms.

Dans ce qui suit on supposera (ce qui n'est pas absolument nécessaire) que la catégorie $\mathcal{C}$ est à 2-produits fibrés ([4]). Les produits directs des S -objets existeront toujours, mais la plupart des résultats que nous allons établir supposeront simplement l'existence des produits que nous écrirons.

Proposition 4. $X \times_S Y$ est un bifoncteur covariant en X et Y dans $\mathcal{C}_S$.

Soient X' et Y' deux S -objets, $(X' \times_S Y', p'_1, p'_2)$ leur produit direct, f un S -morphisme de X dans X' , g un S -morphisme de Y dans Y' ; $f \cdot p_1$ (resp. $g \cdot p_2$) sont des S -morphisms de $X \times_S Y$ dans X' (resp. Y'), donc par définition, il existe un unique S -morphisme (qu'on notera $f \times_S g$) de $X \times_S Y$ dans $X' \times_S Y'$ tel que :

$$p'_1 \cdot (f \times_S g) = f \cdot p_1$$

$$p'_2 \cdot (f \times_S g) = g \cdot p_2$$

et si par exemple X, X', X'', Y sont quatre S -objets, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S Y & \xrightarrow{f \times_S 1_Y} & X' \times_S Y & \xrightarrow{f' \times_S 1_Y} & X'' \times_S Y \\ p_1 \downarrow & & p'_1 \downarrow & & p''_1 \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' & \xrightarrow{f'} & X'' \end{array}$$

est commutatif, chaque carré l'étant par définition de $f \times_S 1_Y$ d'où la proposition.

Proposition 5. Pour tout S-objet X , la première (resp. la seconde) projection de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) est un isomorphisme de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) sur X .

Soit φ le morphisme structural de X dans S ; si T est un S -objet, le seul S -morphisme de T dans S est le morphisme structural ψ de T dans S , et si f est un S -morphisme de T dans X , on a nécessairement $\psi = \varphi \cdot f$, donc $(X, 1_X, \varphi)$ est un produit direct de X et S ; la proposition en résulte immédiatement.

Si T est un S -objet, $g : T \rightarrow X$, $h : T \rightarrow Y$ deux S -morphisms, on désignera par $(g, h)_S$ le S -morphisme $f : T \rightarrow X \times_S Y$ tel que $p_1 \cdot f = g$ et $p_2 \cdot f = h$.

Corollaire. Avec les notations ci-dessus et celles de la proposition 5, l'isomorphisme de X sur $X \times_S S$ (resp. sur $S \times_S X$) est $(1_X, \varphi)_S$ (resp. $(\varphi, 1_X)_S$).

3. Changement d'objet de base.

Soient S et S' deux objets de $\mathcal{C}$, φ un morphisme de S' dans S qui fait de S' un S -objet. Pour tout S -objet X , considérons le produit $X \times_S S'$, et soient p et π' ses projections dans X et S' respectivement. Muni de π' ce produit est un S' -objet. Quand on le considère comme tel, on le désigne par $X_{(S')}$ ou $X_{(\varphi)}$. On dit que c'est l'objet obtenu par extension de l'objet de base de S à S' , au moyen du morphisme φ , ou l'image réciproque de X par φ .

Si π est le morphisme structural de X , θ le morphisme structural de $X \times_S S'$, considéré comme S -objet, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{p} & X_{(S')} \\
 \pi \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \pi' \\
 S & \xleftarrow{\varphi} & S'
 \end{array}$$

est commutatif.

Si X et Y sont deux S -objets, pour tout S -morphisme f de X dans Y , on note $f_{(S')}$ le S' -morphisme $f \times_S 1_{S'} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$. On dit que $f_{(S')}$ est l'image réciproque du morphisme f par φ . $X \rightsquigarrow X_{(S')}$ est ainsi un foncteur covariant en X de la catégorie

des S -objets dans celle des S' -objets.

Proposition 6. Soient S'' un objet de $\mathcal{C}$, φ' un morphisme de S'' dans S' , alors pour tout S -objet X , il existe un isomorphisme fonctoriel canonique du S'' -objet $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}$ sur le S'' -objet $X_{(\varphi, \varphi')}$.

Remarquons d'abord que si T est un S' -objet (donc aussi un S -objet au moyen de φ), tout S -morphisme $g : T \rightarrow X$ s'écrit d'une seule manière $g = p.f$, où f est un S' -morphisme $T \rightarrow X_{(S')}$; $X_{(S')}$ peut donc être considéré comme solution d'un problème d'application universelle (cf. [5]).

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{p} & X_{(\varphi)} & \xleftarrow{p'} & (X_{(\varphi)})_{(\varphi')} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi'' \\
 S & \xleftarrow{\varphi} & S' & \xleftarrow{\varphi'} & S''
 \end{array}$$

et soit T un S'' -objet, ψ son morphisme structural, g un S -morphisme de T dans X (T étant considéré comme S -objet de morphisme structural φ, φ', ψ). Comme T est aussi un S' -objet de morphisme structural φ', ψ on peut écrire $g = p.g'$, où g' est un S' -morphisme de T dans $X_{(\varphi)}$, puis $g' = p'.g''$, où g'' est un S'' -morphisme de T dans $(X_{(\varphi)})_{(\varphi')}$, ce qui démontre la proposition en raison de l'unicité de la solution d'un problème d'application universelle.

On pourra exprimer ce résultat en écrivant par exemple :

$$(X_{(S')})_{(S'')} = X_{(S'')}$$

ou pour éviter les confusions :

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' = X \times_S S''$$

(à un isomorphisme canonique près).

On a qualifié de fonctoriel cet isomorphisme; en effet, on a la même formule de transitivité sur les morphismes :

$$(f_{(S')})_{(S'')} = f_{(S'')} \text{ pour tout } S\text{-morphisme } f : X \rightarrow Y.$$

Corollaire 1. Si X et Y sont deux S -objets, il existe un isomorphisme fonctoriel canonique du S' -objet $X_{(S')} \times_{S'} Y_{(S')}$ sur le S' -objet $(X \times_S Y)_{(S')}$.

On peut en effet écrire, à des isomorphismes canoniques près $(X \times_S S') \times_{S'} (Y \times_S S') = X \times_S (Y \times_S S') = (X \times_S Y) \times_S S'$; pour les morphismes on a les formules analogues :

$$(u_{(S')}, v_{(S')})_{S'} = ((u, v)_S)_{(S')}$$

pour tout couple de S -morphisms $u : T \rightarrow X$ et $v : T \rightarrow Y$.

Ceci revient à dire que le foncteur image réciproque $X_{(S')}$ commute à la formation des produits.

Corollaire 2. Soient Y un S -objet, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme qui fait de X un Y -objet (et donc un S -objet). L'objet $X_{(S')}$ s'identifie alors au produit $X \times_Y Y_{(S')}$, la projection de $X \times_Y Y_{(S')}$ sur $Y_{(S')}$ s'identifiant à $f_{(S')}$.

En effet, si ψ est le morphisme structural de Y on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 S' & \xleftarrow{\psi_{(S')}} & Y_{(S')} & \xleftarrow{f_{(S')}} & X_{(S')} \\
 \downarrow \psi & & \downarrow p & & \downarrow p' \\
 S & \xleftarrow{\psi} & Y & \xleftarrow{f} & X
 \end{array}$$

Proposition 7. Soient $f : X \rightarrow X'$, $g : Y \rightarrow Y'$ deux S -morphisms qui sont des monomorphismes, alors $f \times_S g$ est un monomorphisme.

En effet, soient u et v deux S -morphisms d'un S -objet T dans $X \times_S Y$, p et q (resp. p' et q') les projections de $X \times_S Y$ sur X et Y (resp. de $X' \times_S Y'$ sur X' et Y'); $(f \times_S g).u = (f \times_S g).v$ entraîne $p'.(f \times_S g).u = p'.(f \times_S g).v$, soit $f.p.u = f.p.v$, et comme f est un monomorphisme $p.u = p.v$; de même q étant un monomorphisme $q.u = q.v$, donc $u = v$ (par définition du produit direct).

Corollaire. Si f est un monomorphisme de X dans Y (S -objets), alors pour toute extension $\psi : S' \rightarrow S$ de l'objet de base, $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est un monomorphisme.

En effet, $f_{(S')} = f \times_S 1_{S'}$, par définition.

Remarque : Plus généralement, soit P une propriété des morphismes de la catégorie $\mathcal{C}_S$; considérons les deux propositions suivantes :

a) si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont deux S -morphisms possédant la propriété P , $f \times_S g$ possède la propriété P .

b) si $f : X \rightarrow Y$ est un S -morphisme possédant la propriété P , tout S' -morphisme $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ déduit de f par extension de l'objet de base, possède la propriété P .

Alors, si pour tout S -objet X le morphisme identique possède la propriété P (ce qui est en général facile à vérifier), a) entraîne b), car $f_{(S')} = f \times_S 1_{S'}$.

Si le composé de deux S -morphisms possédant la propriété P , possède la propriété P (ce qui est aussi facile à vérifier), alors b) entraîne a), car $f \times_S g = (1_X \times_S g) \cdot (f \times_S 1_Y)$

$$X \times_S Y \xrightarrow{f \times_S 1_Y} X' \times_S Y \xrightarrow{1_X \times_S g} X' \times_S Y'$$

4. Diagonale.

Soit X un S -objet. On appelle morphisme diagonal de X dans $X \times_S X$, et on note Δ_X (ou $\Delta_{X/S}$) le S -morphisme $(1_X, 1_X)_S$, c'est à dire l'unique S -morphisme Δ_X tel que $p_1 \cdot \Delta_X = p_2 \cdot \Delta_X = 1_X$, où p_1 et p_2 désignent les projections de $X \times_S X$.

Si $f : T \rightarrow X$ et $g : T \rightarrow Y$ sont deux S -morphisms, on a de façon évidente : $(f, g)_S = (f \times_S g) \cdot \Delta_T$.

Proposition 8. Soient X et Y deux S -objets; si on identifie canoniquement $(X \times_S Y) \times_S (X \times_S Y)$ à $(X \times_S X) \times_S (Y \times_S Y)$, le morphisme $\Delta_{X \times_S Y}$ s'identifie à $\Delta_X \times_S \Delta_Y$.

Pour toute extension $S' \rightarrow S$ de l'objet de base, $\Delta_{X(S')}$ s'identifie canoniquement à $(\Delta_X)_{(S')}$.

Soient en effet, p_1 et q_1 les premières projections de $X \times_S X$ sur X et $Y \times_S Y$ sur Y ; la première projection de $(X \times_S Y) \times_S (X \times_S Y)$ sur

$X \times_S Y$ s'identifie canoniquement à $p_1 \times_S q_1$, et on a :

$$(p_1 \times_S q_1) \cdot (\Delta_X \times_S \Delta_Y) = (p_1 \cdot \Delta_X) \times_S (q_1 \cdot \Delta_Y) = 1_{X \times_S Y}$$

et de même pour les secondes projections, donc $\Delta_{X \times_S Y} = \Delta_X \times_S \Delta_Y$.

D'autre part on a vu que $(X \times_S X)_{(S')}$ s'identifie canoniquement à $X_{(S')} \times_{S'} X_{(S')}$ d'où la fin de la proposition.

Proposition 9. Soient X et Y deux S -objets, $\varphi : S \rightarrow T$ un morphisme, $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ les morphismes structuraux de X et Y , p et q les projections de $X \times_S Y$, $\pi = f \cdot p = g \cdot q$ le morphisme structural de $X \times_S Y \rightarrow S$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{(p,q)_T} & X \times_T Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow f \times_T g \\ S & \xrightarrow{\Delta_{S/T}} & S \times_T S \end{array} \quad \text{est commutatif.}$$

Bibliographie.

- [1]. R. Godement, Théorie des faisceaux, Acta. Scient. et Ind. n°1252, Paris (Herman)
- [2]. A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math de l'I.H.E.S, n°4, Paris (P.U.F.)
- [3]. R. Pupier, Petit guide des Catégories, Séminaire d'Algèbre Lyon, 1963-64, exposé 0.
- [4]. A. Roux, Catégories à produits fibrés, Séminaire d'Algèbre Lyon, 1963-64, exposé 1, à paraître.
- [5]. N. Bourbaki, Théorie des Ensembles, ch.4.
- [6]. A. Grothendieck, Technique de descente et Théorème d'existence en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki 1959-1960, exposé 190
- [7]. J. Giraud, Analysis Situs, Séminaire Bourbaki 1962 1963 exposé 256