

R. PUPIER

Petit guide des catégories

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. n° 0, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A2_0>

© Université de Lyon, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



PETIT GUIDE DES CATEGORIES

par R. Pupier

Ce court exposé a pour but de fournir un "référentiel" commode à l'utilisateur débutant. A l'ordre lexicographique près, il devra se consulter comme un dictionnaire. Aucun souci de justification n'est venu alourdir l'énoncé des résultats. On trouvera l'essentiel (sic) de ces justifications, tant logiques que "démonstratives" dans les ouvrages cités en bibliographie.

I. Catégories et foncteurs.

1. CATEGORIE. On appelle CATEGORIE la donnée :

- a) d'une collection (non nécessairement un ensemble) d'objets, notée $\text{Ob}(\mathcal{C})$;
- b) pour chaque couple (M, N) d'objets de $\text{Ob}(\mathcal{C})$, d'un ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ (ou $\text{Hom}(M, N)$ appelé ensemble des morphismes de M dans N ;
- c) d'une application $\mu : \text{Hom}(M, N) \times \text{Hom}(N, P) \longrightarrow \text{Hom}(M, P)$, définie quel que soit le triplet (M, N, P) , et satisfaisant aux propriétés suivantes :
 - (MOR₁) Quels que soient M, N, P, Q dans $\text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Hom}(M, N)$, $g \in \text{Hom}(N, P)$ et $h \in \text{Hom}(P, Q)$, $\mu(\mu(f, g), h) = \mu(f, \mu(g, h))$.
 - (MOR₂) Pour tout objet M de $\mathcal{C}$, il existe dans $\text{Hom}(M, N)$ un morphisme noté 1_M tel que $\mu(1_M, g) = g$ (resp. $\mu(f, 1_M) = f$) pour tout $g \in \text{Hom}(M, X)$ (resp. pour tout $f \in \text{Hom}(X, M)$).

Notation et terminologie : pour alléger les notations, on écrira généralement $g.f$ pour $\mu(f, g)$; le morphisme

1_M , dont $(\text{MOR } 2)$ assure l'existence est unique ; on le nomme morphisme identique de M ; l'application μ s'appelle la composition des morphismes ; enfin, si $f \in \text{Hom}(M, N)$, M s'appelle la source de f , et N le but de f .

2. FONCTEUR COVARIANT. Etant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$,

on appelle foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, la donnée :

a, d'une correspondance F qui à tout objet M de $\mathcal{C}$ associe un unique objet $F(M)$ de $\mathcal{C}'$;

b) pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application $F_{M, N}$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(M), F(N))$, telle que, si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P)$, $F_{M, P}(g \cdot f) = F_{N, P}(g) \cdot F_{M, N}(f)$, et $F_{M, M}(1_M) = 1_{F(M)}$.

Notation : dans la pratique on notera $F(f)$ pour $F_{M, N}(f)$.

3. DUALITE. On appelle catégorie duale, notée $\mathcal{C}^o$, d'une catégorie $\mathcal{C}$ donnée, la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$, et telle que $\text{Hom}_{\mathcal{C}^o}(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$.

4. FONCTEUR CONTRAVARIANT. On appelle foncteur contravariant

de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, un foncteur covariant de $\mathcal{C}^o$ dans $\mathcal{C}'$ (ou de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'^o$). Explicitement, la condition b) de la définition des foncteurs covariants s'écrit pour un foncteur contravariant : "pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, il existe une application $F_{M, N}$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(N), F(M))$, telle que si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P)$, $F_{M, P}(g \cdot f) = F_{M, N}(f) \cdot F_{N, P}(g)$ ".

5. MORPHISME FONCTORIEL. Soient F et G deux foncteurs (covariants) de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. On appelle morphisme fonctoriel de F dans G , la donnée pour tout objet M de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\varphi_M \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(M), G(M))$, tel que $\varphi_N \cdot F(f) = G(f) \cdot \varphi_M$, pour tout

commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F(M) & \xrightarrow{\varphi_M} & G(M) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(N) & \xrightarrow{\varphi_N} & G(N)
 \end{array}$$

6. CATEGORIE PRODUIT. Etant donnée une famille $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ de catégories, on appelle catégorie produit, notée $\prod_{\alpha \in I} C_\alpha$, la catégorie dont les objets sont les familles $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$, et telle que $\text{Hom}_{\prod C_\alpha}((M_\alpha), (N_\alpha)) = \prod_{\alpha \in I} \text{Hom}(M_\alpha, N_\alpha)$.

7. MULTIFONCTEUR. Etant donnée une catégorie produit

$\mathcal{C} = \prod_{1 \leq i \leq p} C_i \times \prod_{1 \leq j \leq q} C_j^o$, on appelle multifoncteur p fois covariant et q fois contravariant un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}'$.

8. EXEMPLES. a. Catégorie Ens : catégorie où les objets sont des ensembles, les morphismes étant les applications d'un ensemble dans un autre avec leur composition habituelle.

b. Catégorie Mod_A : catégorie où les objets sont des modules à gauche sur un anneau A avec élément unité ; les morphismes sont les applications linéaires ou homomorphismes de modules, avec la composition habituelle.

c. Catégorie Top : catégorie où les objets sont des espaces topologiques, les morphismes les applications continues d'un espace dans un autre.

d. Catégories "d'ordre" : soit I un ensemble ordonné ou préordonné ; on considère la catégorie $\mathbb{I}$, dont les objets sont les éléments de I , et si $\alpha \in I$ et $\beta \in I$, $\text{Hom}(\alpha, \beta) = \{<\}$, si $\alpha < \beta$, $\text{Hom}(\alpha, \beta) = \emptyset$ si $\alpha \not< \beta$; la composition des morphismes résulte de la transitivité de la relation de

e. Foncteur $\text{Hom}(M, \bullet)$: soit M un objet fixe d'une catégorie $\mathcal{C}$; à tout objet X de $\mathcal{C}$, on fait correspondre l'ensemble $\text{Hom}(M, X)$, et à tout morphisme $f \in \text{Hom}(X, Y)$, on fait correspondre l'application $\text{Hom}(M, f)$ de $\text{Hom}(M, X)$ dans $\text{Hom}(M, Y)$ définie par $\text{Hom}(M, f)(u) = f.u$; les données précédentes définissent un foncteur covariant $\text{Hom}(M, \bullet)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$.

f. foncteur $\text{Hom}(\bullet, M)$: sous les hypothèses de e., on fait correspondre à tout objet X de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\text{Hom}(X, M)$, et à tout morphisme $f \in \text{Hom}(X, Y)$, on fait correspondre l'application $\text{Hom}(f, M)$ de $\text{Hom}(Y, M)$ dans $\text{Hom}(X, M)$ définie par $\text{Hom}(f, M)(u) = u.f$; ces données définissent un foncteur contravariant $\text{Hom}(\bullet, M)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$.

g. Bifoncteur $\text{Hom}(\bullet, \bullet)$: à tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$ on associe $\text{Hom}(X, Y)$, et à tout couple de morphismes (f, g) , où $f \in \text{Hom}(X', X)$ et $g \in \text{Hom}(Y, Y')$, on associe l'application $\text{Hom}(f, g)$ de $\text{Hom}(X, Y)$ dans $\text{Hom}(X', Y')$ définie par $\text{Hom}(f, g)(u) = g.u.f$, pour tout $u \in \text{Hom}(X, Y)$; on obtient ainsi un bifoncteur, contravariant par rapport au premier argument, et covariant par rapport au second.

h. Morphisme fonctoriel de $\text{Hom}(M, \bullet)$ dans $\text{Hom}(N, \bullet)$: soient M et N deux objets de $\mathcal{C}$, u un morphisme de M dans N ; pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(u, X)$ est une application de $\text{Hom}(N, X)$ dans $\text{Hom}(M, X)$ qui satisfait aux relations de commutation définissant les morphismes fonctoriels.

II. Morphismes, sous-objets, objets quotients.

On va définir ici quelques notions deux à deux duales, pour lesquelles, en toute rigueur, il suffirait de caractériser

l'une pour obtenir l'autre dans la catégorie duale. L'importance de ces notions nécessite cependant la redondance.

1. MONOMORPHISME. On dit qu'un morphisme $u \in \text{Hom}(M, N)$ est un monomorphisme, si l'application $\text{Hom}(X, u)$ de $\text{Hom}(X, M)$ dans $\text{Hom}(X, N)$ est une injection, quel que soit l'objet X de $\mathcal{C}$; i.e. l'égalité $u.f = u.g$ entraîne $f = g$.

2. EPIMORPHISME. On dit qu'un morphisme $u \in \text{Hom}(M, N)$ est un épimorphisme, si l'application $\text{Hom}(u, X)$ de $\text{Hom}(N, X)$ dans $\text{Hom}(M, X)$ est une injection, quel que soit l'objet X de $\mathcal{C}$; i.e. l'égalité $f.u = g.u$ entraîne $f = g$.

3. BISMORPHISME. Un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme s'appelle un bimorphisme.

4. MORPHISME RETRACTABLE - RETRACTION. Soit $u \in \text{Hom}(M, N)$; on dit que u est rétractable s'il existe un morphisme $r \in \text{Hom}(N, M)$, tel que $r.u = 1_M$; r est appelé une rétraction de u ; tout morphisme rétractable est un monomorphisme.

5. MORPHISME SECTIONNABLE - SECTION. Sous les mêmes hypothèses, u est sectionnable s'il existe un morphisme $s \in \text{Hom}(N, M)$ tel que $u.s = 1_N$; s est appelé une section de u ; tout morphisme sectionnable est un épimorphisme.

6. ISOMORPHISME. Si un morphisme u est à la fois rétractable et sectionnable, $r = s$; on dit que u est un isomorphisme. r est alors un isomorphisme appelé inverse de u .

7. Remarque: un monomorphisme (resp. un épimorphisme, un bimorphisme) n'est pas nécessairement rétractable (resp. sectionnable, un iso-

morphisme); on a cependant le résultat suivant : un monomorphisme sectionnable (resp. un épimorphisme rétractable) est un isomorphisme.

8. SOUS-OBJETS. Soient $u \in \text{Hom}(M, N)$ et $u' \in \text{Hom}(M', N)$ deux monomorphismes ; s'il existe un morphisme $v \in \text{Hom}(M', M)$ tel que $u' = u.v$, on dit que u factorise u' , et on écrit $u > u'$ ou $u' < u$; on définit ainsi une relation de préordre entre les monomorphismes de but N . Si la situation précédente est réalisée, v est unique et c'est un monomorphisme; de plus, s'il existe $v' \in \text{Hom}(M, M')$ tel que $u = u'.v'$, alors v et v' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Dans ce cas, u et u' sont équivalents pour la relation d'équivalence associée à la relation de préordre : parmi les monomorphismes de but N équivalents à u , on en choisit un, τ_u , bien déterminé, qu'on appellera un sous-objet de N . On remarquera que les sous-objets d'un objet N sont ordonnés par la relation d'ordre obtenue par "passage au quotient".

9. OBJETS QUOTIENTS. Dualément, si $u \in \text{Hom}(M, N)$ et $u' \in \text{Hom}(M, N')$ sont des épimorphismes, on définit une relation de préordre " u factorise u' " si et seulement si il existe un morphisme $v \in \text{Hom}(N, N')$ tel que $u' = v.u$; on notera encore $u > u'$ ou $u' < u$; comme précédemment v est unique et c'est un épimorphisme, et s'il existe $v' \in \text{Hom}(N', N)$ tel que $u = v'.u'$, v et v' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. On appellera objet quotient de M , un épimorphisme bien déterminé

choisi parmi ceux équivalents à u .

10. SOUS-CATEGORIE PLEINE. Dans une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ une catégorie $\mathcal{D}$ dont les objets sont des objets de $\mathcal{C}$, et qui satisfait aux propriétés suivantes :
- (SCP 1) Si M est un objet de $\mathcal{D}$, tout objet de $\mathcal{C}$ isomorphe à M est un objet de $\mathcal{D}$.
 - (SCP 2) Si M et N sont deux objets de $\mathcal{D}$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N)$ est égal à $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$.
 - (SCP 3) La composition des morphismes dans $\mathcal{D}$ est induite par la composition des morphismes dans $\mathcal{C}$.

11. EXEMPLES. a. Catégorie Ens : les monomorphismes (resp. les épimorphismes) sont les applications injectives (resp. surjectives) ; les sous-objets correspondent aux injections canoniques d'un sous-ensemble dans un ensemble ; les objets quotients aux surjections canoniques d'un sous-ensemble sur un ensemble quotient.

b. Catégorie Top : les monomorphismes sont les injections continues ; par contre les épimorphismes ne sont pas nécessairement surjectifs.

III. Objets particuliers dans une catégorie.

1. OBJET INITIAL. Un objet A d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit initial, si pour tout objet M de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(A, M)$ est réduit à un unique morphisme, qu'on notera souvent η_M .
2. OBJET FINAL. Un objet Ω d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit final, si pour tout objet M de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(M, \Omega)$ est réduit à un unique morphisme, qu'on notera ϵ_M .
3. OBJET NUL. On appelle ainsi un objet à la fois initial et final.

On vérifie aisément que deux objets initiaux (resp. finaux, nuls) sont isomorphes.

On note $0_{N,M}$ ou 0 le morphisme $\eta_N \circ \epsilon_M \in \text{Hom}(M, N)$.

4. GENERATEUR. On appelle générateur dans une catégorie $\mathcal{C}$, un objet U tel que, pour tout objet M et pour tout sous-objet M' de M , la relation " $\text{Hom}(U, M) = \text{Hom}(U, M')$ " voir ci-dessus entraîne $M = M'$.

Plus généralement, on dit qu'une famille $(U_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de la catégorie $\mathcal{C}$, si pour tout objet M , et pour tout sous-objet M' de M , la relation " $\text{Hom}(U_i, M) = \text{Hom}(U_i, M')$ quel que soit $i \in I$ " entraîne $M = M'$; on peut exprimer encore cette définition en disant que pour tout sous-objet M' distinct de M , il existe un $i \in I$ et un morphisme $u_i \in \text{Hom}(U_i, M)$, qui ne se factorise pas à travers M' .

5. COGENERATEUR. On appelle cogénérateur, dans une catégorie $\mathcal{C}$, un objet T tel que pour tout objet M et tout objet quotient M'' de M , la relation " $\text{Hom}(M, T) = \text{Hom}(M'', T)$ " entraîne $M = M''$.

6. EXEMPLES. a. Catégorie Ens : l'ensemble vide est un objet initial, un ensemble réduit à un point est un objet final, il n'existe pas d'objet nul.

b. Catégorie Mod_A : le module $\{0\}$ est un objet nul ; le A -module A_s est un générateur.

IV. Produits et sommes directs ; produits et sommes fibrés.

1. PRODUIT DIRECT. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$; on dit qu'une famille de morphismes $(p_i)_{i \in I}$, $p_i \in \text{Hom}(P, M_i)$, représente P comme produit direct des

M_i , si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $u \rightarrow (p_i \cdot u)_{i \in I}$ est une bijection de $\text{Hom}(X, P)$ sur $\prod_{i \in I} \text{Hom}(X, M_i)$.

Pour tout morphisme $u \in \text{Hom}(X, P)$, les morphismes $p_i \cdot u$ s'appellent les composantes de u .

2. PRODUIT DIRECT DE MORPHISMES. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i, N_i)$ une famille de morphismes ; si $(p_i)_{i \in I}$ (resp. $(q_i)_{i \in I}$) représente l'objet P (resp. Q) comme produit direct de la famille $(M_i)_{i \in I}$ (resp. $(N_i)_{i \in I}$), il existe un unique morphisme $u \in \text{Hom}(P, Q)$, tel que $q_i \cdot u = u_i \cdot p_i$, quel que soit $i \in I$. En particulier, si P et P' sont représentés par les morphismes $(p_i)_{i \in I}$ et $(p'_i)_{i \in I}$ comme produits directs de la famille $(M_i)_{i \in I}$, P et P' sont isomorphes. On peut alors choisir (!), s'il en existe, parmi les objets représentés comme produit direct d'une famille $(M_i)_{i \in I}$, un objet particulier, noté $\prod_{i \in I} M_i$, qu'on appelle le produit direct de la famille $(M_i)_{i \in I}$. Alors à toute famille $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i, N_i)$, on fera correspondre l'unique morphisme $\prod_{i \in I} u_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow \prod_{i \in I} N_i$, qu'on appellera le produit direct de la famille $(u_i)_{i \in I}$.

3. SOMME DIRECTE. C'est la notion duale de celle de produit direct.

Explicitement, une famille de morphismes $(e_i)_{i \in I}$, $e_i \in \text{Hom}(M_i; S)$ représente S comme somme directe de M_i , si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $u \rightarrow (u \cdot e_i)_{i \in I}$ est une bijection de $\text{Hom}(S, X)$ sur $\prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i, X)$.

Pour tout morphisme $u \in \text{Hom}(S, X)$, les $u \cdot e_i$ s'appellent les composantes de u .

4. SOMME DIRECTE DE MORPHISMES. On peut reproduire intégralement la section 2 précédente pour les sommes directes.

Disons seulement que si deux objets sont représentés comme somme directe d'une même famille d'objets, ils sont isomorphes; on choisit alors l'un d'entre eux qu'on appelle la somme directe de la famille $(M_i)_{i \in I}$, qu'on note $\bigoplus_{i \in I} M_i$; on notera de même $\bigoplus_{i \in I} u_i$ la somme directe d'une famille de morphismes.

5. MORPHISME DIAGONAL. Si les objets d'une famille indexée par I sont tous égaux à un objet M , on notera M^I le produit direct, s'il existe, de cette famille. Il existe alors un morphisme Δ_M de M dans M^I , dont les composantes sont le morphisme 1_M , pour tout indice $i \in I$. Ce morphisme s'appelle le morphisme diagonal. Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets quelconques, et $(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(M, M_i)$; si le produit direct $\prod_{i \in I} M_i$ existe il correspond aux u_i un unique morphisme $u \in \text{Hom}(M, \prod_{i \in I} M_i)$; on peut alors écrire ce morphisme sous la forme $u = \prod_{i \in I} u_i \cdot \Delta_M$, où $\prod_{i \in I} u_i$ est le produit des morphismes u_i .

6. MORPHISME CODIAGONAL. Sous les hypothèses précédentes, et sous les réserves habituelles d'existence, on notera $M^{(I)}$ la somme directe d'une famille où les objets sont égaux. Il existe un morphisme Σ_M de $M^{(I)}$ dans M ayant pour composantes le morphisme 1_M pour tout indice $i \in I$. Ce morphisme s'appelle morphisme codiagonal. Le lecteur décomposera comme il se doit le morphisme correspondant à

$$(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}(M_i, M).$$

7. MORPHISMES CANONIQUES. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets, $p = \prod_{i \in I} M_i$ le produit direct, qu'on suppose exister, et p_i les morphismes canoniques de P dans M_i ; le morphisme p_i s'appelle la projection d'indice i ; on remarquera qu'en général les projections ne sont pas des épimorphismes ! Pour un indice i donné, p_i est sectionnable si et seulement si $\text{Hom}(M_i, M_j) \neq \emptyset$ pour tout $j \in I$.
 Duallement, les morphismes canoniques e_i de M_i dans $S = \bigoplus_{i \in I} M_i$, qui restent pour l'instant anonymes, ne sont pas en général des monomorphismes. Pour un indice i donné, e_i est rétractable si et seulement si $\text{Hom}(M_j, M_i) \neq \emptyset$, pour tout $j \in I$.

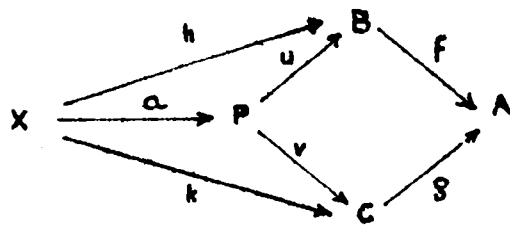
8. EXEMPLES. a. Catégorie Ens : la notion de produit (resp. de somme) d'une famille d'ensemble est identique à celle de produit direct (resp. somme directe) que nous venons de définir. Si dans une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'ensembles l'un des M_i est vide, le produit $\prod_{i \in I} M_i$ est vide, et nous donne un exemple de projections non surjectives.

b. Catégorie Mod_A : étant donné une famille $(E_i)_{i \in I}$ de A -modules à gauche, on sait définir sur le produit $\prod_{i \in I} E_i$ des ensembles E_i une structure de A -module à gauche qui fait de ce produit un produit direct au sens ci-dessus ; soit E l'ensemble des $x \in F = \prod_{i \in I} E_i$, tels que $p_i(x) = 0$, sauf pour un nombre fini d'indices i ; E est un sous-module de F qui satisfait à la définition précédente de la somme directe.

c. Catégorie "d'ordre" : le produit direct (resp. la somme directe) d'une famille d'éléments d'un ensemble ordonné est leur borne inférieure (resp. supérieure), si elle existe.

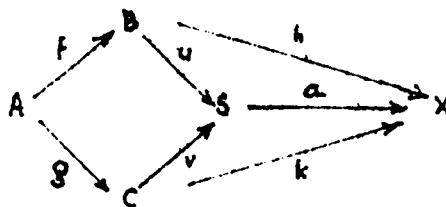
9. CATEGORIES A PRODUIT OU A SOMME. Si dans une catégorie $\mathcal{C}$, le produit direct (resp. la somme directe) de deux objets existe quel que soit le couple (M, N) d'objets considérés, on dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie à produit (resp. à somme). Dans une telle catégorie, le produit direct (resp. la somme directe) existe pour toute famille finie d'objets. Si le produit direct (resp. la somme directe) existe pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$, on dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie à produit (resp. somme) quelconque (ou infini). Un treillis achevé définit une catégorie "d'ordre" à produit et somme quelconques. Mod_A est également une catégorie du même type.

10. PRODUIT FIBRE. Nous limiterons les définitions qui vont suivre au cas de deux morphismes d'une catégorie ; on peut cependant les étendre au cas d'une famille quelconque de morphismes. Soient f et g deux morphismes de même but A ; On appelle produit fibré de f et g au-dessus de A , un triplet (P, u, v) tel que $f \cdot u = g \cdot v \in \text{Hom}(P, A)$, et que pour tout couple (h, k) de morphismes satisfaisant à $f \cdot h = g \cdot k$, il existe un unique morphisme a de but P , vérifiant $h = u \cdot a$ et $k = v \cdot a$. On se servira constamment du diagramme suivant (commutatif) :



Deux produits fibrés de f et g au-dessus de A sont isomorphes. S'il en existe on en choisira un (!) qu'on désignera par $f\pi_A g$, ou par abus d'écriture $B\pi_A C$.

11. SOMME FIBRÉE. La définition est évidemment duale de la précédente : si f et g sont deux morphismes de même source A , on appelle somme fibrée de f et g au-dessus de A , un triplet (S, u, v) tel que $u.f = v.g \in \text{Hom}(A, S)$, et que pour tout couple (h, k) de morphismes satisfaisant à $h.f = k.g$, il existe un unique morphisme a de source A , vérifiant $h = a.u$ et $k = a.v$. On obtient bien entendu le diagramme dual du précédent :



Deux sommes fibrées sont encore isomorphes, et s'il en existe on note l'une d'entre elles $f \oplus_A g$ ou $B \oplus_A C$.

12. EXEMPLE. Catégorie Ens ; soient f et g deux applications de but A , B et C leurs sources respectives ; soit $\varphi = f \times g$ l'application produit de $B \times C$ dans $A \times A$; alors $\varphi^*(A_A)$ est un produit fibré de f et g au-dessus de A . Duale, soient f et g deux applications de source A , B et C leurs buts respectifs ; sur $B \times C$, soit R la plus petite relation d'équivalence dont le graphe contienne les couples $(e_B.f(x), e_C.g(x))$ pour tout $x \in A$, alors $B \times C / R$ est la somme fibrée de f et g au-dessus de A .

V. Catégories additives, catégories abéliennes.

1. CATEGORIE ADDITIVE. On appelle catégorie additive une catégorie

$\mathcal{C}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(CA 1) Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(M, N)$ est un groupe abélien.

(CA 2) La composition des morphismes est bilinéaire.

(CA 3) $\mathcal{C}$ est une catégorie "à produit".

(CA 4) Il existe un objet O dans $\mathcal{C}$, tel que 1_O soit l'élément neutre du groupe $\text{Hom}(O, O)$.

L'objet O défini dans (CA 4) est un objet nul.

Une catégorie additive est une catégorie à somme :

de plus pour tout couple d'objets (M, N) , $M \oplus N$ est isomorphe à $M \oplus N$. Enfin si le produit direct (resp. la somme directe) d'une famille quelconque existe les morphismes p_i (resp. e_i) sont sectionnables (resp. rétractables).

On peut construire canoniquement la loi de groupe abélien sur $\text{Hom}(M, N)$ dans une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

(CA' 1) $\mathcal{C}$ possède un objet nul O .

(CA' 2) Pour tout couple d'objets (M, N) , le produit direct et la somme directe existent et sont isomorphes.

(CA' 3) Il existe un morphisme $c(M)$ de M dans M tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\quad 0 \quad} & M \\
 \Delta_M \downarrow & & \uparrow \Sigma_M \\
 M \oplus M & \xrightarrow{\quad 1_M \oplus c(M) \quad} & M \oplus M
 \end{array}$$

Les groupes d'axiomes (CA 1,2,3,4) et (CA' 1,2,3) sont équivalents.

2. NOYAU, CONOYAU. Soit $f \in \text{Hom}(M, N)$; s'il existe un monomorphisme $i \in \text{Hom}(K, M)$ tel que pour tout morphisme $u \in \text{Hom}(X, M)$ les relations " $f \cdot u = 0$ " et " u est factorisé par i " soient équivalentes, on dit que i est un noyau généralisé de f . Tous les noyaux généralisés de f (s'il en existe) sont équivalents au sens de la relation d'équivalence associée au préordre sur les monomorphismes de but M ; il en existe donc un seul au plus, qui soit un sous-objet de M ; on l'appelle le noyau de f et on le note $\text{Ker}(f)$.

Dualement, s'il existe un épimorphisme $p \in \text{Hom}(N, Q)$ tel que pour tout morphisme $v \in \text{Hom}(N, X)$ les relations " $v \cdot f = 0$ " et " v est factorisé par p " soient équivalentes, on dit que p est un conoyau généralisé de f ; tous les conoyaux généralisés sont équivalents, et il en existe un au plus qui soit un objet quotient de N , qu'on appelle le conoyau de f et qu'on note $\text{Coker}(f)$.

3. IMAGE, COIMAGE. Si le sous-objet $\text{Ker}(\text{Coker}(f))$ existe on l'appelle l'image de f , et on le note $\text{Im}(f)$; si l'objet quotient $\text{Coker}(\text{Ker}(f))$ existe on l'appelle la coimage de f et on le note $\text{Coim}(f)$.

Si $\text{Im}(f)$ et $\text{Coim}(f)$ existent, il existe un unique morphisme $\tilde{f}$, tel que $f = \text{Im}(f) \cdot \tilde{f} \cdot \text{Coim}(f)$.

4. CATEGORIE ABELIENNE. Une catégorie additive est dite abélienne si elle vérifie les axiomes :
(AB 1) Le noyau et le conoyau existent pour tout morphisme f .

(AB 2) Pour tout morphisme f , le morphisme canonique $\tilde{f}$ est un isomorphisme.

Si $f \in \text{Hom}(M, N)$ est un monomorphisme, M est isomorphe à $\text{Im}(f)$; d'ailleurs, si f est un épimorphisme, N est isomorphe à $\text{Coim}(f)$.

5. EXEMPLE. La catégorie Mod_A est une catégorie abélienne. Pour un homomorphisme f du A -module M dans le A -module N , on a : $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$, $\text{Im}(f) = f(M)$, $\text{Coim}(f) = M/f^{-1}(\{0\})$ et $\text{Coker}(f) = N/f(M)$.

6. SUITES EXACTES. On dit qu'une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de morphismes composables est exacte, si $\text{Ker}(u_{i+1}) = \text{Im}(u_i)$. La suite $(0, \text{Ker}(f), f, \text{Coker}(f), 0)$ est exacte, ce qu'on écrit souvent (par abus d'écriture) sous la forme :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0 \quad \text{est exacte.}$$

7. CARACTERISATION DES NOYAUX ET CONOYAUX. Soient $f \in \text{Hom}(M, N)$ et $i \in \text{Hom}(K, M)$ tels que la suite de groupes abéliens $0 \rightarrow \text{Hom}(X, K) \xrightarrow{\text{Hom}(X, i)} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{\text{Hom}(X, f)} \text{Hom}(X, N)$ soit exacte pour tout objet X de $\mathcal{C}$; alors i est un noyau généralisé de f . Duallement, si $p \in \text{Hom}(N, Q)$ est tel que la suite de groupes abéliens $0 \rightarrow \text{Hom}(Q, X) \xrightarrow{\text{Hom}(p, X)} \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{\text{Hom}(f, X)} \text{Hom}(M, X)$ soit exacte pour tout objet X de $\mathcal{C}$; alors p est un conoyau généralisé de f .

Pour que la suite $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ soit exacte, il faut et il suffit que f soit isomorphe au noyau de g , et g isomorphe au conoyau de f .

INDEX

Abélienne (catégorie)	V.4	Factorisation	II. 8,9
Additive (catégorie)	V.1	Fibré (produit)	IV.10
Bifoncteur	I.8g	Fibrée (somme)	IV.11
Bimorphisme	II.3	Final (objet)	III.2
But	I/1	Foncteur	
Catégorie	I.1	contravariant	I.4
" abélienne	V.4	covariant	I.2
" additive	V.1	Fonctoriel (morphisme)	I.7
" duale	I.3	Générateur	III.4
" produit	I.5	Identique (morphisme)	I.1
" à produit	IV.9	Image	V.3
" d'ordre	I.8.d	Initial (objet)	III.1
" à somme	IV.9	Isomorphisme	II.6
Caractérisation des		Monomorphisme	II.1
noyaux et conoyaux	V.7	Morphisme	I.1
Codiagonal (morphisme)	IV.6	" codiagonal	IV.6
Cogénérateur	III.5	" diagonal	IV.5
Coimage	V.3	" fonctoriel	I.7
Composantes	IV.1,3	" identique	I.1
Composition des		" rétractable	II.4
morphismes	I.1	" sectionnable	II.5
Conoyau	V.2	Morphismes (composition)	I.1
Conoyau généralisé	V.2	Multifoncteur	I.8
Contravariant (foncteur)	I.4	Noyau	V.2
Covariant (foncteur)	I.2	Noyau généralisé	V.2
Diagonal		Nul (objet)	III.3
(morphisme)	IV.5	Objet	I.1
Direct (produit)	IV.1,2	" final	III.2
Directe (somme)	IV.3,4	" initial	III.1
Dualité	I.3	" nul	III.3
Duale (catégorie)	I.3	" quotient	II.9
Epimorphisme	II.2	pleine (sous-catégorie)	II.10

Produit (catégorie)	I.5	Sectionnable (morphisme)	II.5
" direct	IV.1,2	Somme directe	IV.3,4
" fibré	IV.10	fibrée	IV.11
rétractable		Source	I.1
(morphisme)	II.4	Sous-objet	II.8
rétraction	II.4	Sous-catégorie (pleine)	II.10
Section	II.5	Suite exacte	V.6
		Système de générateurs	III.4

BIBLIOGRAPHIE.

1. H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956
2. D.A. Buchsbaum, Exact Categories and duality, Transactions of the Am. Math. Soc. 80 (1955) n° 1, p.1-34
3. P. Gabriel, Des Catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. de France, 90 (1962), p.322-448.
4. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Journal 9 (1957) p.119-221
5. A.G. Kurosh, A.H. Livshits, E.G. Shulgeifer, Foundations of the theory of Categories, Russian Math. Surveys, 15 (1960) p. 1-46 (Londres).