

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 94-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__94_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Surfaces telles que le triangle déterminé dans le plan tangent en M, par les plans coordonnés, ait une aire dont le centre de gravité soit précisément le point M.

Sur l'une quelconque de ces surfaces S, on considère une cloison quelconque et les volumes U_x , U_y , U_z , V_0 attachés à cette cloison. Différences de ces volumes considérés deux à deux.

Lignes asymptotiques des surfaces S.

SOLUTION. — La première phrase de l'énoncé se traduit par les trois équations

$$x = \frac{px + qy - z}{3p}, \quad y = \frac{px + qy - z}{3q}, \quad z = \frac{z - px - qy}{3}.$$

qui se réduisent à deux :

$$px + z = 0, \quad qy + z = 0.$$

Les surfaces S ont pour équation générale

$$xyz = C.$$

Pour plus de détails, voir E. FABRY, *Problèmes d'Analyse*, 1913, problème 247.

On a ensuite

$$U_x - U_y = \int_L xy \, dz,$$

$$U_y - U_z = \int_L yz \, dx,$$

$$U_z - U_x = \int_L xz \, dy,$$

$$U_z - V_0 = \frac{1}{3} \int_L z(x \, dy - y \, dx).$$

Toutes ces intégrales sont nulles pour un contour fermé L tracé sur une S .

[Cf. A. BUHL, *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (*Collection Scientia*, p. 15 et 18).]

Pour les lignes asymptotiques voir dans FABRY (*loc cit.*, problème 159) le cas le plus général de la surface

$$z = x^\alpha y^\beta.$$

(Toulouse, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Surfaces S telles que $TP = \text{const.} = \alpha$, si P est la projection sur le plan Oxy d'un point quelconque M de S et si T est le point où le plan tangent en M coupe Oz .

Section C d'une surface S par un plan passant par Oz .

On construira, en particulier, la courbe C qui rencontre Oz normalement en un point A de cote α .

SOLUTION. — En coordonnées semi-polaires les surfaces S ont pour équation aux dérivées partielles

$$z - r \frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{a^2 - r^2},$$

ce qui peut être considéré comme une équation différentielle ordinaire dans le plan zOr .

La courbe C , à construire, est représentable par les équations paramétriques

$$r = a \sin \lambda, \quad z = a(\lambda' \sin \lambda + \cos \lambda)$$

Marquons le point A et le point A' symétrique par rapport à O ; traçons les droites $r = \pm a$. Sur ces droites, la courbe admet une infinité de points de rebroussement à tangentes passant toutes par O ; elle oscille ainsi d'une droite à l'autre par branches passant toutes par A ou par A' . Aucun point d'inflexion réel.

(Toulouse, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 93. — 1° Trouver les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad p(px + qy - z) = xy$$

qui passent par la parabole $x^2 - 2y = 0 = z$.

2° Déterminer les surfaces intégrales (S) de (E) telles que les courbes caractéristiques de (E) situées sur l'une quelconque des surfaces (S) se projettent sur le plan des xy suivant des cercles (les axes sont supposés rectangulaires).

3° Les surfaces (S) dépendent d'une constante arbitraire; l'une d'elles (S_0), qui passe d'ailleurs par le point $x = 0, y = -1, z = 4$, a une équation de la forme

$$(\Sigma) \quad z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où m est une certaine constante. Écrire l'équation différentielle des lignes asymptotiques de (Σ) en prenant pour paramètres $x = u, \frac{y}{x} = v$, et appliquer le résultat à la détermination des asymptotiques de S_0 .

II. Étant donnée la surface

$$x = u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, \quad y = v + u^2v - \frac{v^3}{3}, \quad z = u^2 - v^2,$$

exprimer que les directions (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$ sont conjuguées et qu'elles se coupent sous l'angle ω (les axes sont supposés rectangulaires). En s'appuyant sur le résultat obtenu, déterminer deux familles conjuguées (C_1) et (C_2) telles que deux courbes C_1 et C_2 se coupent toujours sous un angle constant, ω .

ÉPREUVE PRATIQUE — Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^6 + 1}{\sqrt[6]{1 - x^6}} dx,$$

la détermination initiale du radical se réduisant à 1 et le chemin d'intégration étant un segment de l'axe réel.

Réponse : $I = \frac{7\pi}{18}$.

(Poitiers, novembre 1926.)