

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__57_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équation linéaire différentielle du premier ordre : 1° intégration; 2° connaissant deux intégrales particulières, écrire la solution générale; interprétation géométrique; 3° intégrer, comme exemple : $(x^2 - x)y' - (2x - 1)y + x^2 = 0$.*

II. *On donne la parabole $y^2 = 4x$ et le point $P(\lambda, 0)$. De P on abaisse les perpendiculaires sur les diverses tangentes à la parabole.*

1° *Lieu Γ du pied de ces perpendiculaires. Asymptote et point double de Γ . Construire Γ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$.*

2° *Enveloppe des Γ quand λ varie. Étudier la réalité des points de contact de Γ avec son enveloppe.*

3° *De O, on mène les tangentes aux Γ . Déterminer les coordonnées du point de contact; construire le lieu de ces points.*

(1) L'auteur de la question n'ignore pas que la propriété ici énoncée est connue en ce qui concerne les triangles formés dans (ABC) par AA' , mais il a estimé qu'il convenait de ne pas la séparer de celle qui regarde les triangles formés par (BB_0) et (CC_0) .

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.85. — Calculer les longueurs des pendules simples synchrones des pendules composés suivants, constitués de ligne, aires et volume homogène, les axes de rotation étant horizontaux.

1° La courbe plane $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2}$ limitée aux valeurs de t comprises entre 0 et $+\sqrt{3}$; l'axe de rotation est Ox .

2° L'aire comprise entre la parabole $y^2 = 2x$ et la corde focale perpendiculaire à l'axe; l'axe de rotation étant cette corde.

3° La surface latérale d'un cône droit de révolution de hauteur h , demi-angle au sommet α ; l'axe de rotation étant une génératrice.

4° Le volume du tétraèdre trirectangle $OABC$, où $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$; l'axe de rotation étant OC .

(Bordeaux, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. — On considère la surface (S) représentée par $z\sqrt{x^2+y^2} = xy$ et le cylindre (C) d'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0 \quad (a > 0).$$

1° Indiquer la nature et ensuite la disposition de (S).

2° Trouver les courbes tracées sur (S) qui coupent à angle droit les sections de (S) par des plans variables $z = h$. Construire leurs projections sur xOy .

3° Aire de la portion de (C) située au-dessus de $z = 0$, limitée par $z = 0$, $y = 0$ et (S).

4° Volume intérieur à (C) situé au-dessus de $z = 0$, limité par $z = 0$, $y = 0$ et (S).

5° Trouver et construire la projection sur le plan yOz de l'intersection de (S) et de (C).

6° Aire de l'une des boucles de cette courbe.

II. Étudier la variation de la fonction

$$y = L \frac{1+x^2}{x^2} - 3x \operatorname{arc} \operatorname{tang} x.$$

Asymptotes de la courbe représentative.

(On cherchera si l'équation $y' = 0$ admet des racines. On suppose

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \operatorname{tang} x < \frac{\pi}{2},$$

Lu = logarithme népérien.)

INDICATION SUR LA SOLUTION. — I. 1° Cône dont on construit aisément la section par $z = h$.

2° On a pour les sections $z = h$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0,$$

et les trajectoires orthogonales sont

$$y^4 - x^4 = \text{const.} = \pm c^4, \quad \rho^4 \cos 2\theta = \pm c^4.$$

3° ρ, θ, z étant les coordonnées semi-polaires d'un point de l'intersection de (S) et (C), on a

$$\rho = 2a \cos \theta, \quad ds = 2a d\theta, \quad z = 2a \cos^2 \theta \sin \theta,$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z ds = \frac{4a^2}{3}.$$

4° V étant le volume demandé et Γ le demi-cercle de la base du cylindre situé du côté des y positifs, on a

$$\begin{aligned} V &= \int \int_{\Gamma} z dx dy = \int \int_{\Gamma} \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho = \frac{8a^3}{15}. \end{aligned}$$

5° La courbe cherchée a pour équation

$$y^6 + 4a^2 z^2 (z^2 - y^2) = 0$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 \cos^6 \omega = 4a^2 \sin^2 \omega (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega).$$

La courbe se déduit par deux symétries de la boucle obtenue en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

$$6^\circ S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \omega}{\cos^6 \omega} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) d\omega = \frac{4a^2}{15} \text{ (en posant } \tan \omega = t).$$

$$1. \quad y' = -\left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x} + 3 \arctan x\right), \quad y'' = \frac{2}{x^2(1+x^2)^2};$$

la courbe représentative admet Oy pour axe de symétrie.

Les asymptotes sont

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y \pm \frac{3\pi x}{2} = 3.$$

EPREUVE PRATIQUE. — I. x étant exprimé en radians, montrer que l'équation

$$2x - \sin 2x - 3 \cos x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine.

II. Mécanique. — Un point M de masse m mobile dans un plan vertical est soumis à l'action de son poids et à une force constante λmg dirigée de M vers un point fixe O. 1° Montrer que la résultante de ces forces dérive d'une fonction de forces, indiquer la nature des courbes de niveau. 2° Trouver les lignes de force ainsi que leur forme générale. 3° On suppose M mobile sans frottement sur un cercle de diamètre OA; OA = $2a$ est vertical et situé au-dessous de O. Positions d'équilibre du point. Stabilité de l'équilibre. 4° Équation différentielle du premier ordre donnant le mouvement du point sur le cercle. 5° Montrer comment on peut intégrer cette équation, si l'on suppose que le point possède en A une vitesse v_0 donnée par $v_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$.

On prendra Ox vertical dirigé vers le bas. Si l'on détermine la position de M par un angle, on prendra $\widehat{xOM} = \theta$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. On trouve $x = 62^{\circ}40'$.

II. On pose $\widehat{xOM} = \theta$, OM = ρ .

$$1^{\circ} \quad d\mathfrak{E} = -mg(\lambda \rho - x),$$

la fonction des forces est $-mg(\lambda \rho - x)$ et les courbes de niveau

$$\lambda \rho = x + b$$

(avec $\rho > 0$) sont des coniques de foyer O dont la directrice $x + b = 0$ est au-dessus de M. Dans le cas d'hyperboles ($\lambda < 1$), la branche inférieure convient donc seule.

2° Les lignes de forces sont données par

$$\frac{dx}{\lambda x - \rho} = \frac{dy}{\lambda y};$$

d'où

$$\rho = c \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\lambda-1}}{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\lambda+1}};$$

elles ont trois formes différentes suivant que $\lambda > 1$, $= 1$, < 1 .

3° Équilibre :

$$\frac{d\mathfrak{E}}{d\theta} = -2mg a \sin \theta (2 \cos \theta - \lambda).$$

a. $\lambda > 2$, pour $\theta = 0$, équilibre instable;

b. $\lambda < 2$, pour $\theta = 0$, équilibre stable; pour $\theta = \alpha \left(\cos \alpha = \frac{\lambda}{2} \right)$, équilibre instable.

$$4^{\circ} \quad v^2 = 4ga(\cos^2 \theta - \lambda \cos \theta) + h,$$

d'où

$$a \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g(\cos^2 \theta - \lambda \cos \theta) + h.$$

5° Pour $v_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$, on a

$$v^2 = ga(2 \cos \theta - \lambda)^2,$$

$$\frac{2 d\theta}{2 \cos \theta - \lambda} = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{a}} dt \quad [\text{avec } \varepsilon(2 - \lambda) > 0, \varepsilon = \pm 1].$$

On intègre facilement en posant $\tan \frac{\theta}{2} = u$.

(Lyon, juillet 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Construire les courbes représentées par l'équation

$$(1) \quad y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x},$$

a étant une constante. Asymptotes. Lieu des points de ces courbes où la tangente est parallèle aux axes. 2° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) et traiter pour ces trajectoires les questions posées dans 1° pour les courbes (1).

II. 1° Nature et forme de la surface représentée par l'équation $z = \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y)^3$. 2° Volume compris entre cette surface, les plans $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. 3° Aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan xOy à l'intérieur du triangle dont les côtés sont $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Construction immédiate en considérant y comme fonction de x ou en passant en coordonnées polaires.

2° Les trajectoires orthogonales sont

$$y(y^2 - 3x^2) = c^3 \quad \text{ou} \quad \varphi^3 \sin 3\theta = -c^3$$

et se déduisent des courbes (1) par une symétrie d'axe $y = x$.

II. 1° La surface est un cylindre dont la section droite a pour équation dans son plan

$$z^2 = \frac{4}{9} \sqrt{2} x^3.$$

$$2^\circ \quad V = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{3-y} (x+y)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{18\sqrt{6}}{7}.$$

$$3^\circ \quad S = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \sqrt{1+x+y} dx = \frac{116}{15}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x.$$

2° Indiquer la forme dans le voisinage du point O de la courbe intégrale tangente en ce point à Ox.

II. Un point M de masse égale à l'unité situé dans le plan xOy et dont on désigne les coordonnées par x et y est soumis à l'action d'une force dont les projections sur les axes sont

$$X = y^2 - x^2, \quad Y = 2xy.$$

1° Calculer le travail de cette force lorsque le point passe d'une position M_0 de coordonnées x_0, y_0 à une position M_1 de coordonnées x_1, y_1 .

2° Le point M est mobile sans frottement sur la droite d'équation

$$y\sqrt{3} = x - 4.$$

Y a-t-il une position d'équilibre stable? Déterminer le mouvement du point, en supposant qu'on le lance avec une vitesse v_0 du point A de la droite qui est sur Oy . Trouver les valeurs de v_0 pour que dans ce mouvement le point M reste toujours au-dessous de Ox .

(Lyon, 6 novembre 1926.)