

R. MARCHAY

Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 270-271

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__270_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2505.

(1927, p. 186.)

x et y désignant deux variables réelles, établir les relations

$$\sum_1^{\infty} \text{Log} \left(\cos^2 \frac{x}{2^n} + \text{sh}^2 \frac{y}{2^n} \right) = \text{Log} \frac{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}{x^2 - y^2},$$

$$\sum_1^{\infty} \text{Arc tang} \left(\text{tang} \frac{x}{2^n} \text{th} \frac{y}{2^n} \right) = \text{Arc tang} \frac{y \text{ tang } x - x \text{ th } y}{x \text{ tang } x - y \text{ th } y}.$$

A. LABROUSSE.

SOLUTION

PAR M. R. MARCHAY.

La démonstration directe des relations annoncées peut s'obtenir de la façon suivante :

Envisageons d'abord la première et soit $f(x, y)$ le second membre, il vient

$$f(2x, 2y) = f(x, y) + \text{Log} \frac{\sin^2 2x - \sin^2 2iy}{4(\sin^2 x - \sin^2 iy)}$$

puis

$$(1) \quad f(2x, 2y) = f(x, y) + \text{Log} (\cos^2 x - \text{sh}^2 y)$$

en remarquant que

$$\begin{aligned}\sin^2 2x - \sin^2 2iy &= \cos^2 2iy - \cos^2 2x \\ &= (\cos 2iy + \cos 2x)(\cos 2iy - \cos 2x) \\ &= 4(\cos^2 iy - \cos^2 x - 1)(\cos^2 iy - \cos^2 x) \\ &= 4(\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y)(\sin^2 x - \sin^2 iy).\end{aligned}$$

La formule (1) conduit immédiatement à

$$\operatorname{Log} \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{x^2 + y^2} = \sum_1^m \operatorname{Log} \left(\cos^2 \frac{x}{2^n} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{2^n} \right) + f\left(\frac{x}{2^m}, \frac{y}{2^m}\right);$$

si m tend vers l'infini, le dernier terme tend vers zéro et l'on obtient la formule de l'énoncé.

La seconde formule s'établit de façon analogue : en désignant par $f(x, y)$ la quantité qui figure au second membre sous le signe arc tang, on vérifie que

$$f(2x, 2y) = \frac{f(x, y) + \operatorname{tang} x \operatorname{th} y}{1 - (\operatorname{tang} x \operatorname{th} y)f(x, y)},$$

d'où

$$(2) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(2x, 2y) = \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(x, y) + \operatorname{arc} \operatorname{tang}(\operatorname{tang} x \operatorname{th} y),$$

les arc tang prenant la valeur zéro pour x et y nuls.

On achèvera comme dans le cas de la formule (1).

Remarque. — On arrive au résultat plus simplement en remarquant que

$$\frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad -\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y \operatorname{tang} x - x \operatorname{th} y}{x \operatorname{tang} x + y \operatorname{th} y}$$

sont respectivement le carré du module et l'argument de $\frac{\sin z}{z}$ lorsque l'on pose $z = x + iy$.

La formule évidente

$$\frac{\sin 2z}{2z} = \frac{\sin z}{z} \cos z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin z}{z} = \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z}{4} \cdots \cos \frac{z}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{z}{2^n}}{\frac{z}{2^n}},$$

donne immédiatement, en passant à la limite pour n infini et prenant les logarithmes dont on égale partie réelle et coefficient de i , les deux formules annoncées.