

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 208-212

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__208_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 115. — 1° Soient une courbe plane C, P la projection orthogonale d'un point donné O du plan sur la tangente au point courant M. Déterminer les courbes C telles que l'on ait $\overline{OM}^2 = a \cdot OP$, a étant une longueur donnée.

2° Soient une surface S, P la projection orthogonale d'un point donné O sur le plan tangent au point courant M. Former l'équation aux dérivées partielles qui caractérise les surfaces S telles que l'on ait $\overline{OM}^2 = a \cdot OP$, a longueur donnée.

3° Montrer géométriquement qu'il existe une intégrale complète formée de sphères. La déterminer ainsi que l'intégrale singulière.

A défaut de cette solution géométrique, déterminer analytiquement une intégrale complète soit en employant les coordonnées polaires de l'espace, soit en effectuant une inversion de pôle O.

4° Indiquer la nature géométrique des caractéristiques et montrer que ce sont des lignes de courbure des surfaces intégrales. Donner une définition géométrique simple de l'autre famille de lignes de courbure.

II. C. 116. — 1° On considère les intégrales

$$F(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad G(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

où t est réel et positif et $z = x + iy$ complexe. Dans quelles conditions ont-elles un sens ?

2° Montrer que $F(z)$ est holomorphe dans tout domaine borné dans

lequel x est positif et que, dans ces conditions,

$$(1) \quad F(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \dots$$

Établir que la série du second membre de (1) converge uniformément dans tout domaine borné ne contenant pas les points $0, -1, -2, \dots$. En déduire que $F(z)$ est prolongeable analytiquement dans tout le plan et est méromorphe.

3° On pose

$$G_m(z) = \int_1^m e^{-t} t^{z-1} dt \quad (m \text{ entier positif}).$$

Montrer que $G_m(z)$ est holomorphe dans tout domaine borné. En déduire que $G(z)$ est une fonction holomorphe en tout point à distance finie.

4° Montrer que, pour $y = 0$ et $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} < F(x) < \frac{1}{x}$$

et que, quel que soit z ,

$$|G(z)| < \Gamma(|z|+1),$$

$\Gamma(u)$ étant la fonction eulérienne. En déduire que $G(z)$ est de genre 1 et est décomposable en facteurs sous la forme

$$G(z) = A e^{bz} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}},$$

la série $\sum \frac{1}{|a_n|}$ étant divergente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les axes $Oxyz$ sont rectangulaires. Une droite MP se déplace de telle façon que le point M décrive le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$, que le point P décrive le cercle $y = 0, x^2 + z^2 = b^2$ et que les angles de OM et OP avec Ox soient égaux (ces angles sont comptés dans le sens de Ox vers Oy et dans le sens de Ox vers Oz respectivement). On appellera θ l'angle (Ox, OM) . Soit S la surface engendrée par la droite MP .

1° Calculer le volume compris entre la surface S et les plans de coordonnées dans la portion de l'espace où $x > 0, y > 0, z > 0$. Quel est le maximum de ce volume lorsque a et b varient de telle façon que $a^2 + b^2 = R^2$, R étant donné?

2° Trouver les lignes asymptotiques de la surface S . On donnera notamment l'équation cartésienne de leurs projections sur le plan YOz .

Nota. — Dans la première question on pourra, par exemple, remarquer.
Ann. de Mathém. et., 6^e série, t. II. (Juillet 1927.)

quer qu'un point du volume considéré a pour coordonnées

$$\begin{aligned}x &= u[a + v(a - b)] \cos \theta, \\y &= ua(1 + v) \sin \theta, \\z &= -uvb \sin \theta,\end{aligned}$$

u et v étant deux paramètres variant entre certaines limites et θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$. (Strasbourg, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 117. — Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)},$$

où λ, μ sont deux coordonnées rectangulaires dans le plan $O\lambda\mu$, K une constante réelle positive. On pose

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{2K\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2}.$$

Vérifier que l'équation (1) est équivalente à

$$(3) \quad d\varphi + \frac{d\mu}{K} = 0.$$

II. On suppose la fonction φ des deux variables indépendantes λ, μ définie par la formule (2).

a. Pour $K = 1$, donner l'interprétation géométrique de $\tan \varphi$, point critique, quand (λ, μ) tourne autour de l'origine et revient au point de départ quel changement subit φ .

b. Pour $0 < K < 1$, la fonction $\varphi(\lambda, \mu)$ est uniforme.

c. Pour $1 < K$, la fonction φ admet les points critiques $(\sqrt{K^2 - 1}, 0)$ et $(-\sqrt{K^2 - 1}, 0)$. On suppose que (λ, μ) suive une courbe continue partant de l'origine et allant en un point M donné; la valeur initiale de φ est prise égale à 0; classer les déterminations de φ à l'arrivée en M ; influence d'une circulation autour d'un point critique.

III. L'expression

$$dU = 2K \left[\frac{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2) d\mu - 2\lambda\mu d\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)^2 + 4K^2\mu^2} \right]$$

est une différentielle totale exacte; calculer la valeur de l'intégrale $\int dU$ prise le long d'un circuit fermé de dimensions suffisamment petites entourant l'un des points $(\sqrt{K^2 - 1}, 0)$ ou $(-\sqrt{K^2 - 1}, 0)$ en supposant $K > 1$.

IV. En changeant λ en μ , μ en λ , K en iK , montrer que l'intégrale générale de

$$(4) \quad \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{-4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)}$$

est donnée par

$$\frac{1}{2} \log \frac{\lambda^2 + \mu^2 + 2K\lambda + 1 + K^2}{\lambda^2 + \mu^2 - 2K\lambda + 1 + K^2} - \frac{\lambda}{K} = \text{const.}$$

V. Par un point du plan passe une intégrale de (1), une de (4) : elles sont orthogonales.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 118. — 1° Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + 2bx + c},$$

où a, b, c désignent des constantes réelles.

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de a, b, c ;

2° Écrire l'intégrale générale en distinguant les trois cas suivants :

$$b^2 - ac > 0,$$

$$b^2 - ac = 0,$$

$$b^2 - ac < 0;$$

3° Pour que l'intégrale générale soit rationnelle il faut et il suffit que

$$\frac{1}{b^2 - ac}$$

soit le carré d'un entier.

L'intégrale générale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle ? Trouver dans ce cas les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence.

(Lille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de Cours. — Existence des solutions de l'équation en y

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

f étant une fonction donnée de variable réelle non nécessairement analytique, satisfaisant à des hypothèses que l'on précisera.

II. Problème. — C. 119. — *En s'appuyant sur les expressions de $\Gamma(1+x)$ et de $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ en produit infini, prouver que*

$$\log \Gamma(1+x) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1},$$

le second membre étant une série entière dont on donnera le rayon de convergence et dont on exprimera les coefficients à l'aide de séries.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 120. — $z = x + iy$ étant une variable complexe, calculer l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z-2+\sqrt{1-z^2}}$$

prise : 1° Le long du cercle

$$x^2 + y^2 - 3x = 0$$

dans le sens direct, le point z partant de l'origine et le radical partant de la valeur 1.

2° Le long du même cercle, dans le même sens, avec le même point de départ, le radical partant de la valeur -1 .

3° et 4° Mêmes questions pour le cercle

$$x^2 + y^2 - 3y = 0$$

le point de départ étant encore 0.

(Clermont, juin 1927.)