

Certificat de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 182-184

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__182_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On donne la surface de révolution Σ qui a pour équations paramétriques

$$x = \sin t \cos \omega, \quad y = \sin t \sin \omega, \quad z = \cos t + \log \tan \frac{t}{2}.$$

1° Calculer les cosinus directeurs de la normale à Σ , les rayons de courbure principaux, l'angle sous lequel les lignes asymptotiques coupent les méridiens, la courbure géodésique des parallèles et la courbure totale. Déterminer les lignes asymptotiques.

2° Déterminer les lignes géodésiques de Σ .

3° Par chaque point $M(t, \omega)$ de Σ on mène les deux tangentes à Σ qui font avec le méridien de M un angle θ tel que

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0,$$

t_0 étant une constante donnée. Montrer que ces droites forment une congruence de normales.

Parmi les arêtes de rebroussement des développables de cette congruence, il y en a qui sont sur Σ , que peut-on en dire?

4° Calculer la courbure totale de la surface Σ_1 d'équations paramétriques

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v + f(u).$$

Former une équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $f(u)$ pour que Σ_1 soit applicable sur Σ . Suffit-il que $f(u)$ soit une intégrale de cette équation différentielle pour que Σ_1 soit applicable sur Σ ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Par chaque point $P(t)$ de l'hélice circulaire (C)

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t,$$

on mène dans le plan rectifiant de C une droite Δ faisant un angle constant avec Oz . On suppose Δ orientée de manière que, dans le plan rectifiant de C, la demi-droite positive Δ et la demi-tangente à C dans le sens des t croissants, soient du même côté de la parallèle à Oz menée par P, et l'on désignera par φ l'angle constant, compris entre O et π , des directions positives de Δ et de Oz . On fixe la position d'un point M quelconque de Δ par $\overline{PM} = \varphi$. Soit S la surface lieu des droites Δ .

Calculer les cosinus directeurs de Δ . Calculer les coordonnées de M en fonction de t , ρ et φ .

Calculer les coefficients du plan tangent à S au point M(t, ρ). Déterminer pour chaque droite Δ le plan asymptote, le plan central, le point central et le paramètre de distribution. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables enveloppées par les plans asymptotes et les plans centraux.

Déterminer les trajectoires orthogonales des droites Δ . Par chaque point (t, ρ) de S il passe une de ces trajectoires orthogonales; déterminer son centre de courbure géodésique en ce point.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, PAR A. MONJALLON. — I. La surface Σ proposée est la pseudosphère, la méridienne est une tractrice. On obtient facilement par un calcul classique les cosinus directeurs de la normale à Σ ,

$$\lambda = \cos t \cos \omega, \quad \mu = \cos t \sin \omega, \quad \nu = -\sin t,$$

les rayons de courbure principaux sont, calculés d'après les formules d'Olinde Rodrigues,

$$R_1 = -\cot t, \quad R_2 = \tan t,$$

ce sont R_1 rayon de courbure de la méridienne, R_2 rayon de courbure correspondant au parallèle.

On trouve ensuite que les angles des asymptotiques avec les méridiens sont $+t$ et $-t$. La courbure géodésique des parallèles est 1, longueur de la tangente au méridien et la courbure totale est $\frac{1}{R_1 R_2} = -1$, elle est constante et négative.

Les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle $d\omega = \pm \frac{dt}{\sin t}$, d'où en intégrant,

$$\tan \frac{t}{2} = e^{\pm \omega + c}.$$

2° Les lignes géodésiques de Σ se déterminent facilement au moyen de l'équation de Clairaut $r \sin \theta = \text{const.}$, r rayon du parallèle, θ angle avec le méridien, ce sont les courbes satisfaisant à

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0 \quad (t_0 \text{ constante arbitraire}).$$

3° Les lignes envisagées étant des géodésiques de Σ , leurs tangentes forment une congruence de normales, les arêtes de rebroussement des développables de cette congruence sont géodésiques de Σ .

4° La courbure totale de la surface Σ_1 est

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{u^3 f' f'' - 1}{[u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2}.$$

Pour que Σ_1 soit applicable sur Σ , il faut qu'elle ait même courbure

totale

$$u^3 f' f'' - 1 = - [u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2$$

ou

$$u^3 f' f'' + u^4 f'^4 + 2 u^2 (u^2 + 1) f'^2 + u^2 (u^2 + 2) = 0,$$

condition d'ailleurs suffisante.

II. Le plan rectifiant de l'hélice étant tangent au cylindre, les cosinus directeurs de Δ sont $-\sin t \sin \varphi$, $\cos t \sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et les coordonnées de M sont

$$x = -\rho \sin t \sin \varphi + \cos t, \quad y = \rho \cos t \sin \varphi + \sin t, \quad z = \rho \cos \varphi + t.$$

Les coefficients du plan tangent à S en M (t, ρ) sont

$$\begin{aligned} & \cos t (\sin \varphi - \cos \varphi) + \rho \sin t \sin \varphi \cos \varphi, \\ & \sin t (\sin \varphi - \cos \varphi) - \rho \cos t \sin \varphi \cos \varphi, \\ & \rho \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Les coefficients du plan asymptote sont alors

$$\sin t \sin \varphi \cos \varphi, \quad -\cos t \sin \varphi \cos \varphi, \quad \sin^2 \varphi.$$

Le point central correspond à $\rho = 0$, les coefficients du plan central sont alors $\cos t (\sin \varphi - \cos \varphi)$, $\sin t (\sin \varphi - \cos \varphi)$, 0. Le paramètre de distribution est $K = \cot \varphi - 1$. L'hélice donnée est la ligne de striction de la surface S. L'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans asymptotes est l'hélice circulaire

$$x = \tan \varphi \cos t, \quad y = \tan \varphi \sin t, \quad z = t.$$

L'enveloppe des plans centraux étant le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, l'arête de rebroussement est rejetée à l'infini vers OZ. Les trajectoires orthogonales des génératrices sont définies par $\rho = (\sin \varphi + \cos \varphi)t$. Le centre de courbure géodésique est le point défini par $\rho \times \rho' = -K^2$. K paramètre de distribution.

(Rennes, novembre 1926.)