

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 94-96

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__94_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 25 — *Intégrer le système*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}(1+z+zx^2).$$

Trouver l'expression la plus générale de la fonction $F(x, y, z)$ telle que la solution du système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y, z)$$

dépende d'une constante arbitraire.

C. 26. — z désignant une variable complexe, déterminer les points singuliers de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2)^2(z^2 + z + 1)}.$$

Calculer la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$ le long des cercles de centre O ne passant par aucun point singulier.

ÉPREUVE PRATIQUE. C. 27. — *Déterminer les lignes de courbure de la surface représentée par les équations*

$$x = (au + bv - 2a)\sqrt{u},$$

$$y = (au + bv - 2b)\sqrt{v},$$

$$z = (au + bv)\sqrt{1 - u - v},$$

où a et b désignent deux constantes données.

C. 28. — On considère le quadrilatère curviligne A limité par les courbes

$$\begin{aligned} y &= ae^x, & y &= a'e^x, \\ y &= be^{-x}, & y &= b'e^{-x}. \end{aligned}$$

Indiquer un changement de variables permettant de simplifier le calcul de l'intégrale double I qui représente l'aire de A, et calculer I à l'aide de ce changement de variables. (Caen, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. I. — Déterminer la fonction z des deux variables x, y de manière que l'expression

$$\frac{z dx - dy}{zy - x}$$

soit une différentielle totale exacte. Donner l'expression de la fonction z qui se réduit pour $y = 0$ à $\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

II. — Quels sont les points singuliers de la fonction $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$. Nature de ces points singuliers. Périodes de l'intégrale

$$\int_{M_0}^{M_1} f(z) dz,$$

le chemin d'intégration $M_0 M_1$ ne passant par aucun point singulier.

III. — En remarquant que $y = \tan x$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' \cos^2 x - 2y = 0,$$

trouver l'intégrale générale de cette équation.

Intégrer l'équation

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

SOLUTION. I. — z doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 - 1 = 0,$$

dont la solution générale est donnée par la formule

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = (x+y)f(x^2-y^2),$$

où f est une fonction arbitraire.

La fonction z qui se réduit pour $y = 0$ à $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ est $\frac{1+(x-y)^2}{1-(x-y)^2}$.

II. — La fonction $f(z)$ admet $z = 0$ pour point singulier essentiel et

$z = 1$ pour *pôle double*. Les périodes relatives à ces points sont respectivement

$$2\pi ei, \quad -2\pi ei,$$

III. — La solution générale de l'équation $y'' \cos^2 x - 2y = 0$ est

$$y = a \operatorname{tang} x + b (1 + x \operatorname{tang} x),$$

où a et b sont deux constantes arbitraires. On en déduit la solution générale de l'équation

$$z' \cos x + z^2 + z \sin x - 2 = 0.$$

Cette solution est donnée par la formule

$$z = \frac{y'}{y} \cos x = \frac{1 + C (\sin x \cos x + x)}{\sin x + C (\cos x + x \sin x)}$$

où C est une constante arbitraire.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la surface définie par les expressions suivantes des coordonnées x, y, z en fonction de deux paramètres u, v :

$$x = \frac{v}{\operatorname{ch} u}, \quad y = \frac{uv}{\operatorname{ch} u}, \quad z = \operatorname{arc} \operatorname{tang} v.$$

1° Donner les expressions des dérivées partielles p, q de z par rapport à x, y en fonction des paramètres u, v .

2° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface.

SOLUTION. — 1° En formant les expressions de $\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, dz$ et éliminant du, dv entre les trois équations obtenues, on obtient

$$dz = \frac{\operatorname{ch} u - u \operatorname{sh} u}{1 + v^2} dx + \frac{\operatorname{sh} u}{1 + v^2} dy,$$

ce qui met en évidence les expressions cherchées de p, q .

2° Les lignes asymptotiques sont données par l'équation différentielle

$$dp \, dx + dq \, dy = 0$$

qui se réduit à

$$du^2 - \frac{2}{1 + v^2} dv^2 = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est donnée par la formule

$$v = \operatorname{sh} \left(\pm \frac{u}{\sqrt{2}} + C \right),$$

où C est une constante arbitraire.

(Caen, novembre 1925.)

