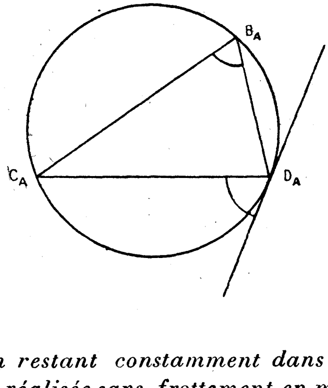
Certificat de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 92-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__92_1>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.23. — *Une circonférence* (Γ) *de rayon* R *tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un diamètre vertical fixe* Ox; *un cerceau* (C) (*circonférence matérielle homogène*) *de masse* M *et de rayon* r ($r < R$) *est assujetti à rouler sans glisser à*



l'intérieur de (Γ) *en restant constamment dans le plan de* (Γ); *cette dernière liaison est réalisée sans frottement en matérialisant le plan de* (Γ) *par deux feuillets plans, infiniment rapprochés, entre lesquels le cerceau est inséré.*

On pose $(\widehat{Ox, OJ}) = \theta, (\widehat{GJ, GA}) = \varphi$, *G étant le centre du cerceau, J son point de contact avec* (Γ), *A un point fixe du cerceau. On prendra comme paramètre* θ.

1° *Déterminer les positions d'équilibre relatif du cerceau en indiquant celles qui sont stables;*

2° *Calculer la force vive absolue* $2T$ *du cerceau en fonction de* θ *et de* θ';

3° *Écrire l'équation du mouvement du cerceau et en déterminer une intégrale première;*

4° *Écrire cette intégrale première en supposant que pour* $t = 0$, $\theta_0 = 0$, θ'_0 *étant donnée, poser* $\cos\theta = u$ *et montrer que* u *se détermine par une quadrature. Discuter l'allure du mouvement selon la valeur de* θ'_0, *en préciser les diverses circonstances (le mouvement est-il périodique? le cerceau peut-il boucler la boucle? etc.;*

5° *Calculer en fonction de* $\theta, \theta', \theta''$:

α. *La réaction que* (Γ) *exerce au point J sur le cerceau, en donnant sa composante normale (selon JO) et sa composante tangentielle (selon JT);*

β. *La résultante des réactions normales du plan de* (Γ) *sur le cerceau.*

ÉPREUVE PRATIQUE. C.24. — *On considère deux sphères identiques, très petites, qu'on assimile à des points* M *et* M_1 *de même masse* m; *ces sphères sont pesantes et sont soumises à la résistance de l'air, qu'on suppose proportionnelle à leur vitesse* $\vec{v}$:

$$\vec{R} = -mg\frac{1}{k}\vec{v},$$

le coefficient positif k *ayant la même valeur pour les deux sphères. Soit* Ox *une verticale descendante.*

1° *On abandonne en O l'une des sphères sans vitesse initiale; on constate, qu'au bout d'un temps assez long, sa vitesse tend vers une limite* $w (w > 0)$; *calculer* k *en fonction de* w.

2° *A l'instant* $t = 0$, *on lance la sphère M, du point O avec une vitesse ascendante* $v_0 (v_0 < 0)$; *puis à un instant* $t = \tau$ $(\tau > 0)$, *on lance la sphère* M_1 *du même point O avec la même vitesse* v_0. *Donner l'expression explicite des abscisses* x, x_1 *et des vitesses* v, v_1 *des sphères M et* M_1 *en fonction du temps;*

3° *A quelle condition doit satisfaire* τ *pour qu'il y ait un choc entre les deux sphères?*

4° *En supposant que* τ *est l'instant précis où la première sphère est parvenue à son maximum d'altitude, montrer qu'il y aura choc;*

calculer l'instant θ *du choc. En supposant les deux sphères parfaitement élastiques, calculer leurs vitesses* v, v_1 *et* v', v'_1 *immédiatement avant et immédiatement après le choc.*

Application numérique. — 1° *En supposant* $w = 10$ m : sec, *calculer* k (*en C. G. S.*); *en déduire la valeur de la résistance* (*en kilogrammes force*) *pour* $v = 5$ m : sec, *en supposant que* $m = 200^g$; *on prendra* $g = 980$ *C. G. S.*

2° *En supposant* $v_0 = -5$m : sec, *calculer les quantités* τ, θ, v, v_1, v', v'_1 *définies au paragraphe* 4.

On donnera trois chiffres exacts. (Lille, juin 1925)