NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

NIELS NIELSEN

Sur une série de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 68-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__68_0>

SUR UNE SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR NIELS NIELSEN.

Soit r, plus grand que zéro, le rayon de convergence de la série de puissances

$$F(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots, \tag{1}$$

la frontière du domaine de convergence de la série de Lagrange

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s [\log(1+x)]^s \tag{2}$$

est représentée par la courbe

$$|\log(1+x)| = r, \tag{3}$$

courbe que nous désignons, dans ce qui suit, par $C(r)$, tandis que le nombre positif r est désigné comme la constante de convergence de la série (2).

Posons maintenant

$$x = u + iv, \qquad x + 1 = \rho e^{i\theta}, \tag{4}$$

où u et v, ρ et θ sont des variables réelles, nous aurons

$$u + 1 = \rho \cos\theta, \qquad v = \rho \sin\theta, \tag{5}$$

tandis que l'équation de $C(r)$ deviendra, en coordonnées polaires,

$$(\log\rho)^2 + \theta^2 = r^2. \tag{6}$$

Cela posé, il est évident que $C(r)$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et que la valeur maximum de $|\log\rho|$ correspond à $\theta = 0$, de sorte que nous aurons

$$e^{-r} \leqq \rho \leqq e^r,$$

ce qui donnera, en vertu de (5),

$$e^{-r} - 1 \leqq u \leqq e^r - 1, \tag{7}$$

quel que soit θ.

Dans ce qui suit, nous désignons par A et B les deux points de l'axe réel, dont les abscisses sont les valeurs maximum et minimum de u.

De plus, il est évident que les deux lignes

$$\theta = \pm r$$

sont tangentes à $C(r)$, et que les deux points de contact sont situés sur le cercle $\rho = 1$, savoir, en coordonnées rectangulaires,

$$(8) \qquad (u+1)^2 + v^2 = 1.$$

Quant à ces deux points de contact, ils ont la même projection C sur l'axe réel, et ce point C a l'abscisse

$$\cos r - 1;$$

c'est-à-dire que C est situé entre A et B, pourvu que

$$\cos r > e^{-r}.$$

Or, l'équation transcendante

$$(9) \qquad \varphi(x) = \cos x - e^{-x} = 0,$$

savoir

$$(10) \qquad x - x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{2x^6}{6!} + \ldots = 0,$$

a, dans chacun des intervalles $(2p\pi, 2p\pi + 2\pi)$, deux racines simples α_p et β_p qui satisfont aux inégalités

$$(11) \qquad \begin{cases} 2p\pi + \dfrac{\pi}{2} > \alpha_p > 2p\pi + \dfrac{\pi}{4}, \\ 2p\pi + 2\pi - \dfrac{\pi}{2} < \beta_p < 2p\pi + 2\pi - \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$$

car nous aurons

$$\varphi'(x) = e^{-x} - \sin x$$

de sorte qu'une racine multiple de (10) satisfait nécessairement aussi à l'équation

$$\cos x = \sin x,$$

ce qui est impossible parce qu'aucune racine de cette dernière équation ne satisfait aux conditions (11).

Étudions maintenant la courbe $C(r)$; cette courbe est, pour des valeurs suffisamment petites de r, un ovale qui entoure l'origine, mais, pour des valeurs plus grandes de r, la courbe susdite aura deux cornes qui se prolongent de plus en plus, selon que r se rapproche de la valeur π, et qui sont finalement, pour $r=\pi$, en contact dans le point $u=-2$, situé sur le cercle (8).

De plus, soit $r<\frac{\pi}{2}$, les deux cornes de $C(r)$ sont situées entre les tangentes $\theta=\pm r$, tangentes qui coïncident pour $r=\frac{\pi}{2}$; et, pour $r>\frac{\pi}{2}$, les deux tangentes sont situées entre les cornes.

Supposons ensuite $r>\pi$, la courbe $C(r)$ est toujours composée de plusieurs branches fermées.

Soit par exemple

$$\pi<r<2\pi,$$

$C(r)$ est composée de deux branches différentes, savoir un ovale symétrique par rapport à l'axe réel et contenant les deux points de cet axe

$$u=e^{r}-1, \qquad u=e^{-\sqrt{r^2-\pi^2}}-1,$$

et une courbe fermée, analogue à $C(r)$ pour $r<\pi$, et contenant les deux autres points de l'axe réel

$$u=-e^{-r}-1, \qquad u=e^{\sqrt{r^2-\pi^2}}-1.$$

Soit donc $r>\pi$, il est toujours possible de tracer une courbe fermée entièrement située dans le domaine limité par $C(r)$ et entourant le point $x=-1$.

Désignons ensuite par

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{12}$$

une fonction holomorphe aux environs de l'origine, il existe toujours un développement de la forme (2), et les coefficients A_n sont à déterminer par les expressions

$$A_0=a_0,$$

$$A_n=\frac{1}{n!}D_x^{n-1}\left[\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n f'(x)\right]_{x=0},$$

ce qui donnera, pour $n \geqq 1$,

$$(13) \qquad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} \times (s+1)!\, a_{s+1}\, D_x^{n-s-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)} \right)^n \right]_{x=0}$$

Quant au coefficient général A_n, posons, dans (2),

$$x = e^y - 1,$$

il résulte, en vertu de (12),

$$(14) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s (e^y - 1)^s = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s y^s.$$

Posons ensuite

$$(15) \qquad K_{n+1}^r = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{n+r},$$

nous aurons la série de puissances, toujours convergente,

$$\frac{(e^y - 1)^s}{s!} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{K_{s+1}^m \cdot y^{m+s}}{(m+s)!},$$

ce qui donnera, en vertu de (14),

$$(16) \qquad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{s=n-1} (s+1)!\, a_{s+1}\, K_{s+2}^{n-s-1}.$$

Or les coefficients a_s étant quelconques, il résulte, en vertu de (13) et (14),

$$(17) \qquad \binom{n-1}{s} D_x^{n-s-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)} \right)^n \right]_{x=0} = K_{s+2}^{n-s-1},$$

formule qui est parfaitement analogue à celle de Schlömilch

$$(18) \qquad (-1)^s D_x^s \left[\left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n \right]_{x=0} = C_n^s,$$

où les C_n^s sont les coefficients de factorielles, définis par l'identité

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x.$$

Quant à la série (2), partons de la formule eulérienne

$$\frac{2}{e^x+1} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(2^{2s}-1)B_s}{(2s)!} x^{2s-1},$$

où il faut supposer $|x| < \pi$, tandis que les B_s sont les nombres de Bernoulli, il résulte la série de Lagrange

(19) $$\frac{x}{x+2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}(2^{2s}-1)B_s}{(2s)!} [\log(1+x)]^s,$$

dont le domaine de convergence a la frontière $C(\pi)$.

De même, cette autre formule eulérienne

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!} x^{2s}$$

applicable, pourvu que $|x| < 2\pi$, conduira à la série de Lagrange

(20) $$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{\log(1+x)}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!} [\log(1+x)]^{2s},$$

dont le domaine de convergence a la frontière $C(2\pi)$.

Remarquons, en passant, que la formule (20) donnera immédiatement cet autre développement

(21) $$\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s B^s}{(2s)!} [\log(1+x)]^{2s-1}$$

qui a le même domaine de convergence que (20).

Quant à la série (2), supposons uniforme la fonction $f(x)$, puis supposons plus grande que π la constante de convergence de cette série, la fonction $F(y)$, définie par la formule (1), admet nécessairement la période $2\pi i$, savoir

(22) $$F(y+2\pi i) = F(y),$$

car il est possible de tracer, dans le domaine de convergence de la série (2), une courbe fermée qui entoure le point $x = -1$.

Cela posé, il est évident que la constante de convergence d'une série de la forme (2), qui représente une fonction uniforme, est généralement au plus égale à π, ce qui s'accorde bien avec notre remarque sur la série (19).

Mais il résulte de (20), que cette condition (22) n'est pas nécessaire, pourvu que $f(x)$ soit multiforme.