

ILIOVICI

WEILL

**Quelques remarques de géométrie  
élémentaire sur les coniques considérées  
comme enveloppes de droites**

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 65-67

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__65_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

**QUELQUES REMARQUES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE SUR LES CONIQUES  
CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES DE DROITES ;**

PAR ILIOVICI ET WEILL.

---

Nous nous proposons de démontrer par des procédés de géométrie élémentaire que la perspective d'une conique est une conique.

**PROBLÈME PRÉLIMINAIRE.** — *Construire le sommet A d'un triangle ABC connaissant le côté BC, la moyenne géométrique l des côtés AB et AC, et la direction de la bissectrice intérieure de l'angle A.*

Si par le milieu M de BC, on mène la parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A et qu'on y porte une longueur  $MD = l$ , les points A et D sont les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de foyers B et C. Pour construire A, on connaît, dès lors, le côté BC, la direction de la bissectrice de l'angle A et la somme  $AB + AC = DB + DC$  des deux autres côtés. Comme on a  $DB + DC > BC$ , on obtiendra dans tous les cas deux positions du point A symétriques par rapport au point M <sup>(1)</sup>.

**THÉORÈME I.** — *Étant données deux divisions homographiques non semblables portées sur deux axes distincts, il existe toujours deux points réels d'où l'on voit sous un angle constant le segment qui joint les points homologues.*

On sait que les côtés d'un angle constant qui tournent autour du sommet F, déterminent sur deux droites D et D', deux divisions homographiques, que l'on peut aussi définir à l'aide de trois couples d'éléments homologues : 1° le point limite I sur D (auquel

---

<sup>(1)</sup> Le problème comporte quatre solutions mais deux sont toujours réelles et deux toujours imaginaires.



THÉORÈME II <sup>(1)</sup>. — *Lorsque les côtés d'un angle constant tournent autour du sommet F, la droite qui joint les points où chacun des côtés rencontre respectivement deux droites fixes D et D', enveloppe une conique de foyer F et tangente à D et D'.*

En effet, deux points correspondants M et M' sur les deux droites, définissent l'angle MF M'. Or il existe une conique et une seule, ayant pour foyer F, et tangente aux trois droites D, D' et MM'.

Le segment déterminé sur une tangente à cette conique, par les droites D et D' est vu du point F sous un angle constant qui est MF M', ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME III. — *La perspective d'une conique est une conique.*

Considérons une conique et deux tangentes fixes D et D'. Une tangente quelconque à cette conique coupe D et D' en M et M', qui se correspondent homographiquement, puisque le segment MM' est vu du foyer sous un angle constant.

Comme la correspondance homographique est projective, les projections  $\mu$  et  $\mu'$  des points M, M' se correspondent homographiquement sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  (projection de D et D') et, d'après le théorème I, il existe un point  $\varphi$  d'où le segment  $\mu\mu'$  est vu sous un angle constant. En vertu du théorème II, la droite  $\mu\mu'$  enveloppe une conique, qui est évidemment la projection de la première.

Comme toute définition générale des coniques, la définition qui précède permet de mettre en évidence les propriétés qui caractérisent ces courbes. Donnons, à titre d'exemple, après M. Montel <sup>(2)</sup>, la propriété énoncée par le second théorème de Poncelet.

La réciproque de ce théorème est une conséquence du théorème II.

*Étant donnés dans un plan un point F et une courbe C, si la droite FT, qui joint le point F au point de rencontre des tangentes en deux points quelconques P et P' de la courbe, est bissectrice de l'angle PFP', cette courbe est une conique de foyer F.*

---

(1) Réciproque du théorème classique : Le segment déterminé sur une tangente mobile, par deux tangentes fixes d'une conique, est vu de chacun des foyers sous un angle constant.

(2) P. MONTEL, *Sur une transformation géométrique* (Revue de l'Enseignement des Sciences, n<sup>os</sup> 81-82, janvier-février 1915).