Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 64
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__64_0>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2474.

(1924, p. 351.)

Étant donnée l'équation

$$x^n + x + 1 = 0$$

dans laquelle n *est un entier plus grand que* 2, *la somme des* $(n^2 + n - 1)^{ièmes}$ *puissances des racines de cette équation est nulle.*

L. TITS.

SOLUTION.

Par M. J. DE CAUMONT.

On a

$$x^{n^2+n-1} = \frac{(x^n)^{n+1}}{x},$$

et, en tenant compte de l'équation donnée,

$$(1) \qquad x^{n^2+n-1} = (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{x}$$
$$= (-1)^{n+1}\left[x^n + (n+1)x^{n-1} + \ldots + (n+1) + \frac{1}{x}\right].$$

Or les formules classiques qui donnent les sommes S_1, S_2, ... des puissances d'exposants 1, 2, ... des racines d'une équation entière montrent qu'ici :

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_{n-2} = 0,$$
$$S_{n-1} = -(n-1).$$

La somme des inverses des racines de l'équation proposée est évidemment -1; enfin remplaçons dans le crochet de la formule (1) x^n par $-x-1$ et nous voyons que la somme des puissances d'exposants $n^2 + n - 1$ est

$$(-1)^{n+1}[-n - (n-1)(n+1) + n(n+1) - 1] = 0.$$

Autre solution par MM. R. MARCHAY et G. MÉTROD.