

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 53-59

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__53_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

EPREUVE THÉORIQUE. — C.9. — I. On désigne par a, b, c trois quantités réelles ($a < b < c$) et par α, β, γ trois quantités positives telles que

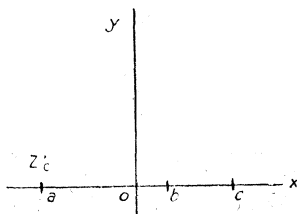
$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Soit encore z_0 une quantité complexe dans laquelle le coefficient de i est positif. On considère dans le plan de la variable complexe z le demi-plan situé au-dessus de Ox et l'on forme l'intégrale

$$Z = \int_{z_0}^{z_1} (z - a)^{\alpha-1} (z - b)^{\beta-1} (z - c)^{\gamma-1} dz.$$

L'intégration est faite en restant dans le demi-plan et, quand on intègre le long de l'axe réel, on évite les points a, b, c par des demi-

circonférences infiniment petites situées au-dessus de Ox . On demande de caractériser la portion du plan Z correspondant au demi-plan de la variable complexe z .



II. Étant considérée l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y) u = 0,$$

où $c(x, y)$ est une fonction réelle et holomorphe dans le voisinage de $x = 0, y = 0$, montrer qu'il existe des intégrales de cette équation susceptibles, dans le voisinage de l'origine, d'être mises sous la forme

$$\frac{P(x, y)}{x^2 + y^2} + Q(x, y) \log(x^2 + y^2),$$

où P et Q sont réelles et holomorphes autour de l'origine. Dans le développement de $P(x, y)$ qui est supposée s'annuler à l'origine,

$$P(x, y) = \alpha x + \beta y + \dots,$$

les coefficients α et β des termes du premier degré sont donnés, et la valeur de $Q(x, y)$ à l'origine, $Q(0, 0)$, a la valeur g , qui est également donnée.

III. Dans l'équation de Fredholm

$$\varphi(x, y) + \lambda \iint f(x, y; u, v) \varphi(u, v) du dv = \psi(x, y)$$

on suppose que le noyau $f(x, y; u, v)$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}}$.

On demande si le premier noyau itéré $f_1(x, y; u, v)$ devient encore infini, et, dans le cas de l'affirmative, à quelle fonction il est comparable.

IV. Démontrer que les valeurs singulières de λ relatives à une certaine aire et à l'équation

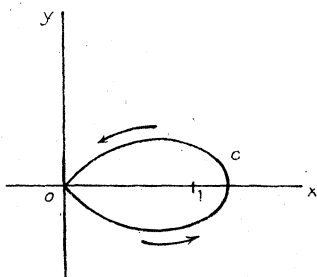
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda c(x, y) u,$$

où $c(x, y)$ est positive dans l'aire considérée, ne peuvent être que réelles et négatives.

C.10. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^3}}$$

prise le long du contour c marqué sur la figure, partant de l'origine et entourant une fois le point critique $z=1$ du radical cubique.



On partira de l'origine avec la valeur $+1$ du radical.

N. B. — On désignera dans le calcul par α la racine cubique imaginaire de l'unité, pour laquelle le coefficient de i est positif.

(Paris, juin, 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit, pour une équation de Fredholm $k(x, y)$ un noyau principal de la forme

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_m(x)\psi_m(y).$$

Expliquer la réduction de ce noyau à la forme canonique et montrer qu'il est la somme d'un certain nombre de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux. (On admettra le théorème fondamental sur la réduction d'une substitution linéaire à la forme canonique.)

C.11. — II. Déterminer la fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation intégrale :

$$\int_0^y \frac{f(x) dx}{(y-x)^{\frac{1}{3}}} = \cos y.$$

C.12. — ÉPREUVE PRATIQUE. — L'élément linéaire d'une surface S est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{1+u^2}{u^2(1-u^2)^3} du^2 + \frac{2du dv}{u(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dv^2}{1-u^2}.$$

Montrer que cette surface peut être appliquée sur une surface de révolution Σ engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (c'est-à-dire sur une surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est de la forme $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$).

Calculer la torsion en valeur absolue d'une ligne asymptotique de S en un point u, v .

(Bordeaux, 4 juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Théorie de l'équation intégrale de première espèce

$$\int_0^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

donner un exemple.

II. — Pour une surface (S) , on a (notations classiques)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Une courbe (C) est définie sur cette surface par les équations paramétriques

$$u = f(t), \quad v = \varphi(t).$$

Soient, en un point M de (C) , R son rayon de courbure et θ l'angle de sa binormale avec la normale à la surface (S) au même point. Calculer le quotient

$$\frac{\cos \theta}{R}$$

à l'aide des fonctions $E, F, G, f(t), \varphi(t)$ et de leurs dérivées en considérant ces fonctions comme données.

C. 13. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer les valeurs singulières de λ pour l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{3}{2} xy + \frac{5}{2} x^2 y^2 \right) \varphi(y) dy.$$

Dans le cas où $\lambda = 1$ et $f(x) = \frac{\operatorname{arc tang} x}{x}$, résoudre l'équation.

(Bordeaux, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère une transformation de contact à une équation directrice :

$$F(xyz, XYZ) = 0.$$

On supposera les espaces xyz , XYZ rapportés aux mêmes axes.

1° Établir les équations qui permettent de trouver l'élément de contact XYZ , PQ correspondant à un élément donné xyz , pq . Quelle est l'interprétation géométrique?

2° A quelle condition les normales aux éléments correspondants se rencontrent-elles? Montrer que la fonction F doit satisfaire à une certaine équation aux dérivées partielles. On pourra désigner dans cette équation par abc , ABC les dérivées de F par rapport à xyz , XYZ .

3° Former les équations différentielles des caractéristiques. Elles présentent de nombreuses combinaisons intégrables, les interpréter géométriquement. Montrer en particulier que les points abc , ABC décrivent deux cercles dont l'axe commun passe par l'origine.

Montrer qu'on peut achever l'intégration des équations différentielles en plaçant convenablement ces cercles par rapport aux axes. Interpréter le résultat obtenu, démontrer que pour une caractéristique donnée :

- a. Les points xyz , XYZ décrivent deux cercles de même axe ;
- b. Les directions abc , ABC passant par ces points se coupent en un point fixe de cet axe.

En déduire les équations finies des caractéristiques.

4° Comment alors peut-on intégrer l'équation aux dérivées partielles.

INDICATIONS. — 2° L'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ X-x & Y-y & Z-z \end{vmatrix} = 0;$$

$$3^{\circ} \quad \frac{dx}{\begin{vmatrix} b & c \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = - \frac{dX}{\begin{vmatrix} B & C \\ Y-y & Z-z \end{vmatrix}} = - \frac{da}{\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}} = \frac{dA}{\begin{vmatrix} B & C \\ b & c \end{vmatrix}}.$$

On trouve que $A + a$, $B + b$, $C + c$, $A^2 + B^2 + C^2$, $a^2 + b^2 + c^2$ sont des constantes.

Le reste est indiqué dans l'énoncé. Il suffit de placer les cercles perpendiculaires à Oz .

4° Méthode classique de Cauchy.

(Nancy, octobre 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère un plan rapporté à deux coordonnées rectangulaires xy .

Un point P est placé au hasard dans ce plan, la probabilité pour qu'il tombe entre les abscisses x , $x + \Delta x$, entre les ordonnées y , $y + \Delta y$,

est

$$kk' e^{-k^2 x^2 - k'^2 y^2} \Delta x \Delta y.$$

1° Un rectangle compris entre les abscisses x_1, x_2 , entre les ordonnées y_1, y_2 étant donné, quelle est la probabilité pour que ce rectangle soit atteint par un point P, la probabilité pour qu'il soit atteint au moins une fois dans n épreuves successives?

2° Chaque point P est entouré d'un rectangle efficace, parallèle aux axes, de centre P, de longueur $2l$, de hauteur $2l'$. Probabilité pour que le rectangle de la première partie soit atteint par une portion du rectangle efficace.

3° On jette au hasard deux points P avec leurs rectangles. Quelle est la probabilité pour que ces rectangles soient extérieurs l'un à l'autre, la probabilité pour qu'ils se recouvrent partiellement?

On jette au hasard n points P. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous extérieurs l'un à l'autre?

4° On jette au hasard deux points P avec leurs rectangles. Comment calculera-t-on la valeur probable de la surface recouverte?

INDICATIONS. — La probabilité $p = \iint kk' e^{-k^2 x^2 - k'^2 y^2} dx dy$ étendue au rectangle x_1, x_2, y_1, y_2 .

Elle se calcule à l'aide de la fonction bien connue θ .

L'autre probabilité est $1 - (1 - p)^n$.

2° Il suffit de border le rectangle de chaque côté de $2l$ en x , de $2l'$ en y .

3° Les centres étant $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, la probabilité de recouvrement est

$$\iiint \iint k^2 k'^2 e^{-k^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - k'^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)} d\xi_1 d\xi_2, d\eta_1 d\eta_2$$

étendue au domaine

$$|\xi_1 - \xi_2| < 2l, \quad |\eta_1 - \eta_2| < 2l'.$$

Elle se calcule à l'aide de la fonction θ .

4° Dans le cas de recouvrement, l'aire est $[2l - (\xi_1 - \xi_2)][2l' - (\eta_1 - \eta_2)]$.

Il suffit de multiplier par la probabilité et d'intégrer.

(Nancy, juin 1923.)

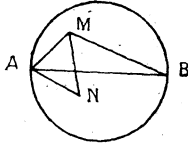
C. 14. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère dans un plan un cercle de rayon R. Un point M est pris au hasard dans le cercle. La probabilité pour qu'il soit dans une aire infiniment petite est proportionnelle à cette aire.

Définir et calculer les valeurs probables :

1° De l'aire du triangle AMB, AB étant un diamètre du cercle.

2° De l'aire du triangle AMN, A étant pris sur le cercle M et N étant pris au hasard (on pourra adopter des coordonnées polaires).

3° M étant supposé fixe, quelle est la probabilité pour que MN soit inférieure à une longueur donnée a ?



4° Quelle est cette probabilité quand MN sont quelconques dans le cercle ?

(Nancy, octobre 1923.)