Certificat de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 51-53
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__51_0>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide de révolution homogène est suspendu par son centre de gravité et un point* P, *marqué sur son axe* Gz, *est repoussé proportionnellement à la distance par le plan fixe* Gx_1y_1.

1° *Montrer que, parmi les mouvements du solide, il y en a certains* ($\mathfrak{M}$) *dans lesquels tout point de l'axe fixe* Gz_1 *a, pour un observateur attaché au solide, une vitesse constante. Quelles conditions doivent remplir les constantes d'intégration pour donner ces mouvements* ($\mathfrak{M}$)?

2° *Étudier complètement les mouvements* ($\mathfrak{M}$) *qui donnent une trajectoire sphérique de* P *passant par un point donné* P_0. *Il y a deux formes* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ *de trajectoires de* P *et, pour* P_0, *deux régions sphériques* R *et* R′, *la région* R *ne donnant que des trajectoires* $\mathfrak{T}$ *et la région* R′ *donnant à la fois des trajectoires* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$. *Déterminer ces deux régions et montrer* a priori *que les trajectoires du genre* $\mathfrak{T}'$ *ne sortent jamais de la région* R′.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les équations du mouvement général sont :

$$A^2 \sin^2\theta\theta'^2 = (h + K^2\cos^2\theta)A\sin^2\theta - (\lambda - C\mu\cos\theta)^2,$$
$$A\psi'\sin^2\theta = \lambda - C\mu\cos\theta,$$
$$\psi'\cos\theta + \varphi' = \mu.$$

La condition imposée s'écrit

$$\varphi'^2\sin^2\theta + \theta'^2 = \text{const.}$$

et, exprimée en θ, conduit à écrire qu'une certaine fonction de θ est constante. Comme $K \neq 0$, on obtient finalement

$$A - C \neq 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \mu^2 = \frac{K^2 A}{(A-C)^2}$$

et l'étude des mouvements $\mathfrak{M}$ se fait sans difficulté, c'est la discussion d'un trinome bicarré en $\cos\theta$. Elle donne :

Si $h > 0$, une trajectoire $\mathfrak{T}$ à boucles avec deux parallèles limites symétriques par rapport à l'équateur ;

Si $h < 0$, une trajectoire $\mathfrak{T}'$ sinusoïdale avec deux parallèles limites d'un même côté de l'équateur.

L'inégalité fondamentale

$$(h + K^2 \cos^2 \theta_0) A \sin^2 \theta_0 - \frac{C^2 K^2 A}{(A - C)^2} \cos^2 \theta_0 \geqq 0 .$$

détermine le minimum $H(\theta_0)$ de h.

La région R est définie par

$$H(\theta_0) > 0,$$

et la région R′ est le reste de la sphère.

Un point quelconque d'une trajectoire $\mathcal{C}'$ quelconque peut être considéré comme point initial de cette trajectoire $\mathcal{C}'$; il ne peut donc se trouver dans R, il est forcément dans R′.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne la position initiale* ABCD, A′B′C′D′ *d'un parallélépipède rectangle solide, mais non homogène, dans lequel la densité en chaque point est égale à la distance de ce point au plan de la base* ABCD.

On considère les deux droites fixes D *et* Δ *avec lesquelles sont confondues, à l'instant initial, les deux droites* AB *et* C′B′ *et le plan fixe* P *mené par la droite* D *perpendiculairement à la droite* Δ.

Le solide est lancé, à partir de la position initiale considérée, de façon que A *décrive la droite* D, *que* C′ *décrive la droite* Δ *et que* B *reste dans le plan* P.

On a

$$AB = 1, \qquad AD = 2, \qquad AA' = 3,$$

et la vitesse initiale de A *est l'unité.*

Calculer numériquement les éléments de réduction au centre de gravité de la quantité de mouvement du solide à l'instant initial.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — On prend comme axes ceux de la base ABCD et l'axe perpendiculaire et l'on détermine facilement le centre de gravité G et l'éllipsoïde d'inertie relatif à l'origine, duquel on déduit immédiatement l'ellipsoïde central rapporté aux axes parallèles menés par G, soit $F(x, y, z) = 1$.

Si $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ sont les éléments de réduction en G de la vitesse du solide, le point A donne trois conditions, le point C′ deux et le point B une, de sorte que l'on a six équations qui déterminent $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$. Les éléments de réduction demandés sont alors :

$$M\xi, \quad M\eta, \quad M\zeta; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

(Bordeaux, jnin 1924.)

C.7. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux solides de révolution homogène pesants et identiques ont même axe de révolution et sont suspendus par un point* O *de cet axe commun* O*z*.

Par des liaisons convenables, les plans $z\,\mathrm{O}\,x$, $z\,\mathrm{O}\,x'$ *des deux trièdres* $\mathrm{O}xyz$, $\mathrm{O}x'y'z'$ *attachés à ces deux solides sont assujettis à toujours être symétriques par rapport au plan de* $\mathrm{O}z$ *avec la verticale descendante* $\mathrm{O}z_1$.

1° *Discuter complètement le mouvement quand les deux centres de gravité* G, G′ *sont symétriques par rapport à* O.

2° *Les deux points* G, G′ *étant quelconques, sous la seule hypothèse que les distances* OG, OG′ *sont très grandes, former les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les données initiales pour que, dans le mouvement,* $\mathrm{O}z$ *dirigé vers le centre de gravité du système total tende asymptotiquement vers la verticale ascendante. Montrer que les conditions trouvées sont compatibles.*

C.8. — ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un tétraèdre homogène, pesant* OABC, *a ses trois arêtes* OA, OB, OC *rectangulaires et égales à l'unité. Sa densité est égale à l'unité.*

Le sommet O *est fixe et le solide ne peut que tourner autour de la bissectrice intérieure de l'angle* BOA, *bissectrice qui est fixe faisant l'angle* $\frac{\pi}{4}$ *avec la verticale descendante.*

Calculer la durée des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

(Bordeaux, novembre 1924.)