

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 48-50

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__48_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit la surface S, définie par l'équation

$$z = \frac{x^4 + 64y^2 - 8x^2}{y^3(y+1)}.$$

1° Trouver le lieu des asymptotes de ses sections par les plans parallèles au plan des xy . Montrer que ce lieu est un cône droit.

2° On considère, en particulier, la section C par xOy . On pose

$$\cos \varphi = 2\sqrt{2}\frac{y}{x}.$$

Calculer x et y en fonction de φ , ainsi que l'arc s de la courbe, son rayon de courbure et les coordonnées de son centre de courbure. Vérifier que le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure s'expriment rationnellement en fonction de x . Vérifier également la relation

$$2y = \sin(s - y).$$

II. Déterminer toutes les courbes planes qui satisfont à la relation

$$(\rho + 1) \sin V = 1,$$

où ρ désigne le rayon vecteur et V l'angle de ce rayon vecteur avec la tangente. Construire l'une de ces courbes.

III. Un fil élastique, de longueur naturelle $2a$, est fixé par ses deux extrémités en deux points A et B d'un plan horizontal H. La distance $AB = 2a$. On coupe le fil en son milieu et l'on attache les deux bouts obtenus à un même point matériel M. Quand on amène M en A, la tension du fil BM égale le poids de M. En outre, le coefficient de frottement de M sur le plan H est 0,2. Étudier le mouvement de M, abandonné en A, sans vitesse initiale. Construire le diagramme des espaces.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — I. 1° La section par le plan $z = h$ a des directions asymptotiques données par $x^4 - hy^4 = 0$; aucune n'est réelle pour $h < 0$. Pour h positif on trouve les directions asymptotiques réelles $x \pm \sqrt[4]{h}y = 0$ et les asymptotes correspondantes, obtenues par les procédés ordinaires, sont

$$x \pm \sqrt[4]{h}\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Elles s'appuient sur la droite $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}$ et engendrent donc un conoïde droit dont l'équation est évidemment

$$z = \frac{256x^4}{(4y+1)^4}.$$

2° On trouve

$$x = 2\sqrt{2} \sin \varphi, \quad y = \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$s = 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} = 2\varphi + y;$$

d'où immédiatement

$$\sin(s - y) = \sin 2\varphi = 2y.$$

Le rayon de courbure et l'abscisse du centre de courbure sont respectivement

$$\frac{(12 - x^2)^2}{16|x|} \quad \text{et} \quad \frac{48 + x^4}{16x}.$$

II. En remplaçant $\sin V$ par $\frac{|\rho|}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, l'équation proposée donne

$$\rho'^2 = \rho^2(\rho^2 + 2\rho),$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 + 2\rho}} = -d\sqrt{1 + \frac{2}{\rho}}$$

et enfin

$$\rho = \frac{2}{(\omega - \omega_0)^2 - 1};$$

toutes les courbes se déduisent de l'une d'elles, par simple rotation autour du pôle.

III. L'origine étant le milieu de AB, on a l'équation différentielle

$$x'' = -g \frac{x}{a} \mp \frac{g}{5},$$

où l'on doit prendre, devant le dernier terme, le signe opposé à celui de la vitesse. Le mouvement consiste donc en demi-oscillations sinusoïdales, ayant pour centres les points $x = \pm \frac{a}{5}$ qui limitent la région d'équilibre.

Dans le cas de l'énoncé, les élongations successives seront $-\alpha$ (point A), $\frac{3\alpha}{5}$, $-\frac{\alpha}{5}$ (où le mobile s'arrête).

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire la courbe Γ .

$$y = \frac{\text{sh } x}{x}.$$

2° Développer en série de puissances de x , l'aire ABCD = S, limitée par la courbe Γ , l'axe des x , et les parallèles AB et CD à Oy d'abscisses x et $-x$.

3° L'aire ABCD, en tournant autour de Ox, engendre un volume V que l'on développera de même en série.

4° Le volume précédent étant rempli d'une matière de densité UN, calculer au moyen d'une série, son moment d'inertie M, par rapport à Ox.

5° Dans le cas où $x = 1$, calculer S, V, M, à 10^{-3} près.

On donne

$$\pi = 3,141592653,$$

à 10^{-9} près par défaut.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. LOUVET. — On trouve :

$$S = 2 \left[\frac{x}{1.1!} + \frac{x^3}{3.3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots \right];$$

$$V = 2\pi \int_0^x y^2 dx;$$

$$y^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4x^2} = 2 \left[\frac{1}{2!} + \frac{2^2 x^2}{4!} + \dots \right];$$

$$V = 4\pi \left[\frac{x}{1.2!} + \frac{2^2 x^3}{3.4!} + \dots + \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)!} + \dots \right];$$

$$M = 2\pi \left[\frac{2^2(2^2-1)}{1.4!} x + \frac{2^4(2^4-1)}{3.6!} x^3 + \dots + \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)}{(2n+1)(2n+4)!} x^{2n+1} + \dots \right].$$

Pour $x = 1$, on a :

a. En prenant quatre termes de la série,

$$S = 2,114,$$

à un demi-millième près par excès;

b. En prenant cinq termes de la série,

$$V = 7,040,$$

à un demi-millième près par défaut;

c. En prenant cinq termes de la série,

$$M = 3,891,$$

à un demi-millième près par défaut.

(Clermont, juin 1922.)