NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RENÉ GARNIER

Sur une propriété caractéristique des fonctions de Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 38-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__38_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS DE JACOBI [1];

PAR RENÉ GARNIER.

Dans cette Note, nous allons établir la proposition suivante :

Les fonctions monogènes analytiques

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$ *qui satisfont à l'équation fonctionnelle*

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{X(x)}{Y(y)} \tag{1}$$

se ramènent soit aux fonctions de Jacobi $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, *soit à des combinaisons simples, soit à des dégénérescences de ces fonctions.*

Tout d'abord, nous présenterons une remarque qui allège notablement la discussion : Si $f(z)$ répond à la question, les fonctions qui s'en déduisent par l'une des opérations

(S_1)	$z \mid z + \alpha$	(α, constante quelconque),
(S_2)	$z \mid az$	(a, constante réelle),
(S_3)	$z \mid iz$,	
(S_4)	$f(z) \mid a\,f(z)$,	
(S_5)	$f(z) \mid i\,f(z)$,	
(S_6)	$f(z) \mid \{f(z)\}^{-1}$,	
(S_7)	$f(z) \mid i\{f(iz_0)\}_0$	(u_0, quantité conjuguée de u)

répondront aussi à la question.

---

[1] Cet article s'adresse spécialement aux lecteurs qui veulent se familiariser avec les calculs sur les fonctions de Jacobi : réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Legendre, intégration des fonctions de Jacobi, multiplication par 2, transformation d'ordre 2. Pour plus de détails sur les calculs, on pourra se servir des *Principes de la Théorie des fonctions elliptiques, ...*, par P. Appell et E. Lacour, 2ᵉ édition (Paris, Gauthier-Villars, 1922), Chap. IV, VII, X, XIII.

Cela étant, on déduit de (1) : $P = \lambda X$, $Q = \lambda Y$, λ étant une fonction de x et y à déterminer. Posons $\lambda = e^{\mu}$ et écrivons que P et Q satisfont aux conditions de monogénéité de Cauchy ; il viendra

$$(2) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x} = -X \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = Y \frac{X' - Y'}{X^2 + Y^2},$$

et la condition d'intégrabilité pour μ donne alors :

$$(3) \qquad 2X'^2 - XX'' - (2Y'^2 - YY'') + X^2 \frac{Y''}{Y} - Y^2 \frac{X''}{X} = 0.$$

Or, cette équation est du type

$$(4) \qquad X_1(x) + Y_1(y) + X_2(x) Y_2(y) + X_3(x) Y_3(y) = 0;$$

par différentiations on tire de (4)

$$(5) \qquad X_2' Y_2' + X_3' Y_3' = 0.$$

On peut satisfaire à (5) en posant $X'_2 = 0 = X'_3$ ou $Y'_2 = 0 = Y'_3$; on vérifiera d'ailleurs que l'hypothèse $X'_2 = 0 = Y'_3$ n'introduit aucune solution nouvelle; ces cas écartés, on doit prendre $X'_3 = aX'_2$, $Y'_2 = -aY'_3$, a étant une constante, et l'on en déduit que, quelles que soient les fonctions $X_2(x)$, $Y_3(y)$, l'équation (4) est vérifiée par les formules

$$(6) \qquad \begin{cases} X_1 = -cX_2 - d, & X_3 = aX_2 + b, \\ Y_1 = -bY_3 + d, & Y_2 = -aY_3 + c \end{cases}$$

(a, b, c, d, constantes).

Appliquons ce résultat à (3). Les deux premières solutions fournissent immédiatement la fonction

$$f(z) = e^z,$$

et celles qui s'en déduisent par les opérations (S_1), (S_2), (S_3). Cette solution écartée, on déduit de (6), en prenant $X_2 \equiv X^2$ (ce qui n'introduit aucune restriction)

$$\begin{aligned} -XX'' + 2X'^2 &= -cX^2 - d, & X'' &= aX^3 + bX, \\ YY'' - 2Y'^2 &= bY^2 + d, & Y'' &= aY^3 + cY \end{aligned}$$

(a, b, c, d, constantes réelles).

Ces équations ne sont compatibles que pour $b + c = 0$ et elles peuvent être remplacées alors par les suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} 2X'^2 = aX^4 + 2bX^2 - d, \\ 2Y'^2 = aY^4 - 2bY^2 - d; \end{cases}$$

dès maintenant, on prévoit donc que les fonctions $f(z)$ devront être des fonctions elliptiques ou des dégénérescences de ces fonctions.

Ceci posé, des transformations (S_2) et (S_4) permettent de ramener les équations (7) à l'un des types canoniques suivants :

$$(8) \qquad \begin{cases} X'^2 = (1-X^2)(1-k^2X^2), & X'^2 = \varepsilon(1+X^2)(1-l^2X^2), \\ Y'^2 = (1+Y^2)(1+k^2X^2), & Y'^2 = \varepsilon(1-Y^2)(1+l^2Y^2) \\ \qquad (\varepsilon = \pm 1;\ k^2 < 1). \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} X'^2 = (1+X^2)(1+k^2X^2), & X'^2 = \varepsilon(1-X^2)(1+l^2X^2), \\ Y'^2 = (1-Y^2)(1-k^2Y^2), & Y'^2 = \varepsilon(1+Y^2)(1-l^2Y^2) \\ \qquad (\varepsilon = \pm 1); \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} X'^2 = (1+X^2)^2 - 4h^2X^2, & X'^2 = (1-X^2)^2 + 4h^2X^2, \\ Y'^2 = (1-Y^2)^2 + 4h^2Y^2, & Y'^2 = (1+Y^2)^2 - 4h^2Y^2 \\ \qquad (0 < h < 1); \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} X'^2 = 1 + X^2, & X'^2 = 1 - X^2, \\ Y'^2 = 1 - Y^2, & Y'^2 = 1 + Y^2; \end{cases}$$

$$(12) \qquad X' = 1, \qquad Y' = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

$$(13) \qquad X' = 0, \qquad Y' = 0.$$

Les types (8), (9), (10) correspondent au cas où dans (7) on a $a \neq 0$; les types (11) supposent $a = 0 \neq b$, et (12), (13) : $a = 0 = b$.

On vérifiera sans peine que les formes (11) conduisent à

$$f(z) = \operatorname{tang} z$$

et à ses transformées par les opérations (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), (S_5) et leurs produits; quant aux systèmes (12) ou (13), ils donnent

$$f(z) = z,$$

et ses transformées par (S_1), (S_2), (S_3), (S_6), ou $f(z) = \text{const.}$

Examinons maintenant les types restants. La transformation (S_7) fait passer des formes (9) aux formes (8) et échange entre eux les deux systèmes (10); enfin les transformations (S_2) et (S_3) permettent de supposer $\varepsilon = 1$. Nous n'avons donc que trois types de réduction à discuter :

$$(\mathrm{I}) \qquad X'^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), \qquad Y'^2 = (1 + Y^2)(1 + k^2 Y^2).$$

Désignons par $\operatorname{sn} x$ la fonction de Jacobi, de module k^2, de périodes primitives $4\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$ (K et K' *réels*); nous aurons

$$X = \operatorname{sn} x, \qquad Y = \pm \frac{1}{i} \operatorname{sn} iy;$$

ou pourra d'ailleurs se borner au signe $+$, moyennant les transformations $z \mid z + 2\mathrm{K}$, $f(z) \mid -f(z)$. Cela étant, posons $t = iy$; il viendra, d'après (2):

$$\begin{aligned}\mu &= -\int \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t} (\operatorname{sn} x \, dx + \operatorname{sn} t \, dt) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x)\Theta_1(x)\Theta(t)\Theta_1(t)}{\mathrm{H}_1(x+t)\mathrm{H}_1(x-t)} + \text{const. réelle},\end{aligned}$$

les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 étant construites non pas avec des périodes de zéros $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, mais avec des périodes primitives de zéros $4\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$. Moyennant cette notation, on a

$$\operatorname{sn}(x \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{H}(x)\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)\Theta_1(x)} \times \text{const. réelle},$$

et, par suite, on peut prendre

$$f(z) = \frac{\mathrm{H}(x)\mathrm{H}_1(x)\Theta(iy)\Theta_1(iy) + \Theta(x)\Theta_1(x)\mathrm{H}(iy)\mathrm{H}_1(iy)}{\mathrm{H}_1(x+iy)\mathrm{H}_1(x-iy)},$$

soit encore

$$f(z) = \frac{\mathrm{H}(x+iy)}{\mathrm{H}_1(x+iy)},$$

ce qui donne la solution

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$$

et ses diverses transformées; actuellement, le module $\overline{k^2}$ des nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{cn} z$ est encore réel et inférieur à 1. A titre de vérification, on trouve :

$$\frac{\operatorname{sn}(x+t)}{\operatorname{cn}(x+t)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} t + \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} x}{1 - \operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t + \overline{k^2} \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t};$$

on peut donc prendre $X \equiv \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{sn}\left(x \mid \frac{K}{2}, iK'\right)$, $2K$ et $2iK'$ étant les périodes de zéros des nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$:

$$\text{(II)} \qquad X'^2 = (1 + X^2)(1 - l^2 X^2), \qquad Y'^2 = (1 - Y^2)(1 + l^2 Y^2).$$

On posera $l^2 X^2 = 1 - \xi^2$, ce qui donnera, par une transformation (S_2), $X = \operatorname{cn} x$ $\left(\text{le module étant } \frac{1}{1 + l^2}\right)$ et l'on aura de même, moyennant (S_1) :

$$Y = \frac{1}{i} \operatorname{cn}(iy + b);$$

la constante réelle b doit d'ailleurs être choisie de manière que $Y(y)$ soit réelle; on prendra donc $b = K$, et en posant $t = iy + K$ on aura [1] :

$$\begin{aligned} \mu &= \int \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{\operatorname{cn}^2 x - \operatorname{cn}^2 t} (\operatorname{cn} x \, dx + \operatorname{cn} t \, dt) \\ &= \operatorname{Log} \frac{\Theta(x+K)\Theta_1(x+K)\Theta(t+K)\Theta_1(t+K)}{H(x+t)\, H_1(x-t)} + \frac{\pi i}{4} + \text{const. réelle}, \end{aligned}$$

les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 étant construites avec les périodes primitives de zéros $4K$, $2K + 2iK'$; on aura ainsi [2] :

$$\operatorname{cn}(x \mid K, iK') = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{H(x+K)\, H_1(x+K)}{\Theta(x+K)\, \Theta_1(x+K)} \times \text{const. réelle},$$

et, comme tout à l'heure, on trouvera la fonction

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z},$$

et ses transformées. Mais actuellement, les périodes primitives des zéros de $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{cn} z$ sont $4K$ et $2K + 2iK'$; le module k^2

---

(1) On observera que μ doit être réel pour $x = 0 = y$; or soit

$$H(K) H_1(K) = \lambda q^{\frac{1}{2}};$$

actuellement q^2 est un nombre négatif compris entre 0 et -1; on en déduit que λ est positif comme, d'ailleurs, $\Theta(K)$, $\Theta_1(K)$ et $\Theta(2K)\, \Theta_1(2K)$; l'argument du produit sous le signe Log est donc $-\frac{\pi}{4}$.

(2) Voir la note précédente.

des deux fonctions précédentes est donc de la forme ([1]) $1+e^{i\theta}$ (θ, angle réel).

On peut obtenir un résultat plus expressif en revenant aux modules réels (que nous avions abandonnés pour la commodité de l'intégration).

En effet, la fonction précédente $f(z)$, construite avec les périodes de zéros sus-indiquées, est encore égale à

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z},$$

les fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 correspondant aux nouvelles fonctions $\operatorname{sn} z$ et $\operatorname{dn} z$ admettant $4\mathrm{K}$ et $4\mathrm{K}+4i\mathrm{K}'$ comme périodes primitives de zéros, c'est-à-dire encore à

$$f(z) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z},$$

les périodes primitives étant $4\mathrm{K}$ et $4i\mathrm{K}'$ pour les nouvelles fonctions : le module k^2 est devenu réel.

On vérifie d'ailleurs que l'on a actuellement :

$$f(a+b) = \frac{scd(1-2k^2 s_1^2 + k^2 s_1^4) + s_1 c_1 d_1 (1 - 2k^2 s^2 + k^2 s^4)}{(1 - k^2 s^2 s_1^2)(1 - s^2 - s_1^2 + k^2 s^2 s_1^2)}$$

avec

$$s = \operatorname{sn} a, \quad c = \operatorname{cn} a, \quad d = \operatorname{dn} a; \quad s_1 = \operatorname{sn} b, \quad c_1 = \operatorname{cn} b, \quad d_1 = \operatorname{dn} b.$$

On peut donc prendre

$$\mathrm{X}(x) = \frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 x + k^2 \operatorname{sn}^4 x} = \frac{\operatorname{sn} 2x}{\operatorname{dn} 2x} = \frac{1}{k'} \operatorname{cn}(2x - 2\mathrm{K}),$$

ce qui est bien conforme au début du calcul.

(III) $\qquad \mathrm{X}'^2 = (1+\mathrm{X}^2)^2 - 4h^2\mathrm{X}^2, \qquad \mathrm{Y}'^2 = (1-\mathrm{Y}^2)^2 + 4h^2\mathrm{Y}^2.$

On pose $\mathrm{X} = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, ce qui donne

$$\xi'^2 = [1 - h + (1+h)\xi^2][1 + h + (1-h)\xi^2];$$

([1]) *Cf.* APPELL et LACOUR, *op. cit.*, p. 446, exercice 12.

ainsi, C étant choisi de manière que X soit réel, on trouvera :

$$X = \frac{\operatorname{sn}\frac{iK'}{2} - \operatorname{sn} i(x+C)}{\operatorname{sn}\frac{iK'}{2} + \operatorname{sn} i(x+C)},$$

en se rappelant que $\operatorname{sn}\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}$, et en adoptant le module

$$k^2 = \left(\frac{1-h}{1+h}\right)^2 < 1.$$

On pourra écrire encore :

$$X = \frac{\operatorname{dn}\left(i\frac{x+C}{2} - i\frac{K'}{4}\right)}{\operatorname{dn}\left(i\frac{x+C}{2} + i\frac{K'}{4}\right)},$$

la fonction $\operatorname{dn} u$ admettant les périodes primitives de zéros $2K$ et iK'. Moyennant des transformations (S_1) et (S_5) on pourra prendre $C = K'$ et, avec un nouveau module compris entre 0 et 1 :

$$X = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x},$$

d'où, en vertu de (S_3) et (S_5) : $Y = \pm i \frac{\operatorname{cn} iy}{\operatorname{sn} iy \operatorname{dn} iy}$; on peut d'ailleurs se borner au signe supérieur moyennant (S_6). On trouve ainsi, en posant $iy = t$:

$$\frac{X' - Y'}{X^2 - Y^2} = \frac{\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{sn}^2 t - 2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 t}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t},$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{i \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t}{k(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 t)},$$

et par suite

$$f(z) = \operatorname{cn} z + iK'$$

et ses transformées.

Résultat définitif. — Les fonctions $f(z)$ répondant au problème sont donc les fonctions $\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}$, $\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}$, $\operatorname{cn} z$ (construites avec un module k^2 réel), leurs dégénérescences (obtenues pour $k^2 = 0$ ou 1), ainsi que e^z, z, 1 et que toutes les fonctions qui s'en déduisent par les opérations (S_1), ..., (S_7).

On vérifiera que parmi ces fonctions se trouvent les suivantes :

$$\mathrm{sn}\,z,\quad \mathrm{cn}\,z,\quad \mathrm{dn}\,z,$$

$$\mathrm{ns}\,z\left(=\frac{1}{\mathrm{sn}\,z}\right),\quad \mathrm{nc}\,z\left(=\frac{1}{\mathrm{cn}\,z}\right),\quad \mathrm{nd}\,z\left(=\frac{1}{\mathrm{dn}\,z}\right),$$

$$\mathrm{cd}\,z\left(=\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z}\right),\quad \mathrm{ds}\,z\left(=\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}\right),\quad \mathrm{sc}\,z\left(=\frac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}\right),$$

$$\mathrm{dc}\,z\left(=\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}\right),\quad \mathrm{sd}\,z\left(=\frac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{dn}\,z}\right),\quad \mathrm{cs}\,z\left(=\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}\right)\text{(1)},$$

$$\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z},\quad \frac{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z},\quad \frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z},$$

$$\frac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z},\quad \frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{sn}\,z},\quad \frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z},$$

$$\sin z,\quad \cos z,\quad \mathrm{tang}\,z,\quad \mathrm{coséc}\,z,\quad \mathrm{séc}\,z,\quad \mathrm{cotg}\,z,$$

$$\mathrm{sh}\,z,\quad \mathrm{ch}\,z,\quad \mathrm{th}\,z,\quad \mathrm{coséch}\,z,\quad \mathrm{séch}\,z,\quad \mathrm{coth}\,z,$$

$$e^z,\quad z,\quad \frac{1}{z}\quad \text{et}\quad 1.$$