

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 378-381

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__378_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.77. — On considère la fonction

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(tx) dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

1° Montrer que $J(x)$ est holomorphe pour toute valeur réelle ou imaginaire de x .

2° Montrer que $J(x)$ satisfait à l'équation différentielle

(1)
$$xy'' + y' + xy = 0.$$

3° Trouver le développement de $J(x)$ suivant les puissances croissantes de x .

4° Montrer que

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u^2 - x) du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}};$$

prouver que, si x est réel et positif,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos u^2 du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}} = \int_0^{\infty} \cos u^2 du,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin u^2 du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2x}}} = \int_0^{\infty} \sin u^2 du;$$

en conclure la valeur de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{x + 2k\pi} J(x + 2k\pi),$$

k étant un entier positif.

5° Trouver la solution générale de l'équation

$$xy'' + \gamma y' + xy = 0,$$

où γ est une constante non entière, et en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) par un passage à la limite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.78. — Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-a)^5 \sqrt{x^2(1-x)^3}},$$

a étant une constante réelle (méthode des résidus).

(Clermont, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Les surfaces S d'équation

$$y(z+b) = x(x+a),$$

où a et b sont des constantes, vérifient, quelles que soient a et b , une équation E aux dérivées partielles du premier ordre que l'on formera.

2° Trouver la surface Σ intégrale générale de cette équation E . Montrer que Σ est réglée; que sont les génératrices de Σ vis-à-vis de E ?

3° Le long de chaque caractéristique de E , x, y, z, p, q satisfont à un système différentiel D que l'on intégrera complètement en exprimant y, z, p, q , au moyen de x et de trois constantes arbitraires.

4° On considère la surface réglée définie paramétriquement par les équations

$$x = tz + \varphi(t), \quad y = t^2z + t\varphi(t).$$

Former l'équation des asymptotiques, déterminer φ de sorte que $z=0$ donne une asymptotique particulière et intégrer l'équation correspondante.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° L'équation E est linéaire :

$$pxy + qy^2 = x^2.$$

2° La surface Σ a pour équation

$$x = \frac{y}{x} \left[z - f\left(\frac{y}{x}\right) \right].$$

En posant $y = tx$, on a des équations de la forme

$$\begin{cases} x = tz + \varphi(t), \\ y = t^2z + t\varphi(t). \end{cases}$$

Les courbes $t = \text{const.}$ sont les caractéristiques, ce sont des droites.

3° Les équations demandées sont

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{x^2} = \frac{-dp}{-2z + py} = \frac{-dq}{2qy + px}.$$

On a deux intégrales premières

$$\frac{y}{x} = C, \quad z - \frac{x}{C} = C_1;$$

puis

$$\frac{dp}{-2 + pC} + \frac{dx}{Cx} = 0,$$

d'où

$$p = \frac{C_2}{x} + \frac{2}{C},$$

q est tiré de l'équation même

$$q = -\frac{1}{C^2} - \frac{C_2}{Cx}.$$

4° L'équation des asymptotiques s'écrit

$$2(t\varphi' - \varphi) \frac{dz}{dt} + 2(z - \varphi')^2 - \varphi''(tz + \varphi) = 0.$$

La courbe $z = 0$ est asymptotique, si l'on a

$$2\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{A}{t+B}.$$

Dans ce cas particulier, l'équation devient linéaire en $u = \frac{1}{z}$ et s'intègre sans difficulté.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Quelle est la section de la surface

$$a^2y^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - z^2)$$

par un plan horizontal? Calculer l'aire $S(z_1)$ de cette section par le plan $z = z_1$, puis le volume limité par la surface et les deux plans $z = -a$ et $z = +a$. Calculer l'intégrale

$$\int_0^a S(z)z^2 dz.$$

II. Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle C de rayon 1 ayant pour centre l'origine, a et b étant des constantes telles que

$$|a| < 1, \quad |b| < 1$$

et n un entier positif.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'aire S est celle d'une ellipse

$$S = \pi a \sqrt{a^2 - z_1^2}.$$

Le volume demandé a pour valeur $\pi^2 a^3$, l'intégrale $\frac{\pi^2 a^5}{8}$.

II. La somme des résidus est évidemment nulle, donc l'intégrale est nulle.

(Lille, juin 1926.)