

## Solutions de questions de licence

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 374-378

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_374\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__374_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

---

### Question C. 59.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en avril 1926, p. 224.*]

#### SOLUTION

Par M. R. WEINZAEFFEL.

On demandait d'abord d'évaluer, en exprimant  $r$  et  $\theta$  en fonction d'un paramètre, l'intégrale

$$(1) \quad \theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \frac{dr}{2r}.$$

En posant

$$u = \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}},$$

on trouve, après des calculs faciles,

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} u - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u}{2}$$

et

$$(3) \quad r = a \sqrt{\frac{4 + u^2}{1 + u^2}}$$

Les formules (2) et (3) définissent  $r$  et  $\theta$  en fonctions du paramètre  $u$  et, par suite,  $\theta$  en fonction de  $r$ .

On envisageait ensuite, sur le cercle  $x^2 + y^2 = a^2$ , deux points M et M'

---

(1) 1 volume de 183 pages; prix 25<sup>fr.</sup>

ayant des vitesses angulaires respectives + 3 et - 1 et partant simultanément du point  $x = a, y = 0$  et l'on demandait l'enveloppe de la droite  $MM'$ . On trouve pour équation de cette droite

$$x \cos t + y \sin t - a \cos 2t = 0,$$

et l'enveloppe est définie par le système

$$\begin{aligned} x &= a \cos t(1 + 2 \sin^2 t), \\ y &= -a \sin t(1 + 2 \cos^2 t). \end{aligned}$$

La construction de cette courbe est immédiate; c'est, comme il est connu, une astroïde ou hypocycloïde à quatre rebroussements ayant ses rebroussements sur les bissectrices des axes. Pour le voir géométriquement soient A et B les points où  $MM'$  rencontre respectivement les bissectrices  $y = x$  et  $y = -x$ . L'angle  $M'OA$  vaut  $t + \frac{\pi}{4}$ . Il en est de même de l'angle  $M'AO$  parce que, si l'on abaisse de O la perpendiculaire OH sur  $MM'$ , on a

$$\widehat{xOH} = t,$$

donc

$$\widehat{M'AO} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HOA} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{\pi}{4} + t.$$

Le triangle  $M'OA$  est donc isocèle et l'on a

$$M'A = M'O = a;$$

de même on a

$$M'B = M'O = a;$$

d'où

$$AB = 2a.$$

L'enveloppe en question est donc celle d'un segment de droite de longueur  $2a$  dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires; c'est un astroïde que l'on placera sans peine sur la figure.

Enfin si  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires d'un point de l'enveloppe, on a

$$\operatorname{tang} \theta = - \frac{\sin t}{\cos t} \frac{1 + 2 \cos^2 t}{1 + 2 \sin^2 t}, \quad r^2 = a^2(1 + 3 \sin^2 2t),$$

d'où par différentiation

$$d\theta = \frac{3(\sin^2 2t - 1)}{1 + 3 \sin^2 2t} dt = \frac{r^2 - 4a^2}{r^2} dt$$

et

$$dt = \frac{r dr}{2\sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{4a^2 - r^2}},$$

d'où, entre  $r$  et  $\theta$ , la relation précédente (1) qu'indiquait l'énoncé.

Autres solutions par MM. J. DEVISME et PARIS.

**Question C. 71.**

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en juillet 1926, p. 315.*]

**SOLUTION**

Par M<sup>lle</sup> Odette DEVISME.

Il s'agit de déterminer les constantes  $r$  et  $a$  pour que l'on ait la relation

$$(e^{rx} \cos x)' = a e^{rx} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$$

ou, en effectuant et divisant par  $e^{rx}$ ,

$$r \cos x - \sin x = a \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x),$$

d'où l'on tire

$$a = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad r = 1.$$

Dans ces conditions, la dérivée  $m^{\text{ième}}$  de l'expression

$$f(x) = e^{rx} \cos x$$

sera égale à

$$a^m e^{rx} \cos \left( x + m \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^m e^x \cos \left( x + m \frac{\pi}{4} \right)$$

et l'application de la formule de Mac Laurin conduit au développement de  $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{ax}{1} \cos \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{a^m x^m}{m!} \cos m \frac{\pi}{4} + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \dots \end{aligned}$$

ou enfin, en groupant les termes qui correspondent à  $8k \leq m < 8k + 8$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^8 2^{4k} x^{8k} \left[ \frac{1}{(8k)!} + \frac{x}{(8k+1)!} - \frac{2x^3}{(8k+3)!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4x^4}{(8k+4)!} - \frac{4x^5}{(8k+5)!} + \frac{8x^7}{(8k+7)!} \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre bien que, pour  $x$  négatif, le développement de  $f(x)$  (où l'on néglige les termes nuls) est une série alternée.

**Question C. 49.**

[*Physique Mathématique; épreuve pratique; énoncé publié en février 1926, p. 153.*]

SOLUTION.

par un ANONYME.

On considère dans un plan vertical un point pesant attiré par un point O du plan (origine des coordonnées, axe Oy vertical) avec une force égale à  $\frac{k}{r^2}$  ( $OM = r$ ,  $k > 0$ ). On demande d'étudier son mouvement en utilisant les paramètres

$$2\lambda = r + y,$$

$$2\mu = r - y.$$

Les courbes  $\lambda = \text{const.}$  et  $\mu = \text{const.}$  forment évidemment un faisceau de paraboles homofocales; la force vive sera

$$2T = \left( \frac{\lambda'^2}{\lambda} + \frac{\mu'^2}{\mu} \right) (\lambda + \mu)$$

et la fonction des forces

$$U = \frac{k - g(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda + \mu}.$$

Le calcul classique conduit à l'équation de Jacobi suivante :

$$\frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left[ \lambda \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^2 \right] - \frac{k}{\lambda + \mu} + g(\lambda - \mu) = h,$$

qui permet (après multiplication par  $\lambda + \mu$ ) de séparer les variables et donne

$$W = \int \sqrt{\frac{L(\lambda)}{\lambda}} d\lambda + \int \sqrt{\frac{M(\mu)}{\mu}} d\mu,$$

en posant

$$L(\lambda) = -2g\lambda^2 + 2h\lambda + k + \alpha,$$

$$M(\mu) = +2g\mu^2 + 2h\mu + k - \alpha,$$

d'où les équations du mouvement sous la forme

$$\int \sqrt{\frac{\lambda}{L(\lambda)}} d\lambda + \int \sqrt{\frac{\mu}{M(\mu)}} d\mu = t + \beta_1,$$

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda L(\lambda)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu M(\mu)}} = \beta_2.$$

*Application.* — Avec les conditions initiales données on a :

1°

$$L(\lambda) = -2g(\lambda - b)^2,$$

$$M(\mu) = +2g(\mu - b)^2 + 2k,$$

$\lambda$  reste égal à  $b$  pendant tout le mouvement et  $\mu$  varie dans le même sens. La trajectoire est la parabole  $\lambda = b$ , tournant sa concavité vers le bas. Le

mouvement est stable parce que des données initiales voisines donneront, pour  $\lambda L(\lambda)$ , un polynome ayant deux racines très voisines de  $b$  et positif entre ces racines.

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \qquad \qquad \qquad L(\lambda) &= -2g(\lambda + b)^2 + 2k, \\ M(\mu) &= +2g(\mu + b)^2, \end{aligned}$$

$\mu$  reste égal  $-b$  pendant tout le mouvement et  $\lambda$  oscille entre 0 et  $b + \sqrt{\frac{k}{g}}$ , la trajectoire est un arc de la parabole  $\mu = -b$  (tournant sa concavité vers le haut) décrit d'un mouvement oscillatoire. Le mouvement est stable, pour la même raison que plus haut.

Autres solutions par MM. J. DEVISME, A. MONJALLON.