Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques (session de 1926)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 366-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__366_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1926).

Composition de Mathématiques élémentaires (Arithmétique).

Nous conviendrons d'appeler cycle d'ordre n *l'ensemble des nombres obtenus en permutant circulairement, de toutes les façons possibles, les chiffres d'un nombre* N.

On caractérise un cycle par la donnée de son ordre et celle du plus petit de ses nombres. Par exemple, le cycle d'ordre 3 *du nombre* 58 *est formé des nombres* 058, 580, 805.

1° *Montrer qu'un diviseur commun à* $10^n - 1$ *et à l'un des nombres d'un cycle d'ordre* n *divise les autres nombres du cycle.*

Énoncer une réciproque de cette proposition.

2° *Déterminer tous les cycles d'ordre* 3 *dont les nombres sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique;*

3° *On considère tous les cycles d'ordre* 6 *dont les nombres sont, à l'ordre près, six termes consécutifs d'une progression arithmétique.*

Établir que les six chiffres composant ces nombres sont distincts, que la raison R *de la progression est un diviseur de* $10^6 - 1$ *et que le plus petit nombre du cycle est un multiple du quotient de* R *par* 9.

On recherchera enfin les limites entre lesquelles R *doit être compris et l'on en déduira la détermination des cycles considérés.*

Solution par M. B. Gambier.

1° Soit $N_1 = a_1 a_2 \ldots a_n$ un nombre du cycle, écrit sous forme décimale : chaque a_i est un entier compris entre 0 et 9 inclus. On écrira de même

$$(1)\quad N_2 = a_2 a_3 \ldots a_n a_1, \quad N_3 = a_3 a_4 \ldots a_n a_1 a_2, \quad \ldots, \quad N_n = a_n a_1 \ldots a_{n-1}.$$

La soustraction de N_2 du nombre $10\,N_1$ ou $a_1 a_2 \ldots a_n\,0$ se fait à vue et donne

$$(2)\qquad \begin{cases} 10N_1 - N_2 = a_1(10^n - 1), \\ 10N_2 - N_3 = a_2(10^n - 1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 10N_n - N_1 = a_n(10^n - 1). \end{cases}$$

La première de ces égalités montre qu'un diviseur D commun à N_1 et $10^n - 1$ divise aussi N_2; mais alors la seconde égalité et les suivantes montrent que D divise aussi $N_3, \ldots, N_n$.

Réciproquement, tout diviseur D commun à $N_1, N_2, \ldots, N_n$ divise tous les nombres $a_i(10^n - 1)$ et l'on doit distinguer deux cas :

A) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, D divise $10^n - 1$; l'ensemble des diviseurs communs à $N_1, \ldots, N_n$ coïncide avec l'ensemble des diviseurs communs à l'un d'eux et $10^n - 1$;

B) $a_1, \ldots, a_n$ ont un plus grand commun diviseur δ; comme $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres d'un chiffre, il en est de même de δ et les nombres entiers

$$\frac{N_1}{\delta} = \left(\frac{a_1}{\delta}\right)\left(\frac{a_2}{\delta}\right)\cdots\left(\frac{a_n}{\delta}\right), \qquad \frac{N_2}{\delta}, \quad \ldots, \quad \frac{N_n}{\delta}$$

forment un cycle d'ordre n qu'il est naturel d'étudier au lieu et place de $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Le diviseur D en question est diviseur de $\delta(10^n - 1)$; on peut donc énoncer une proposition directe plus précise que celle du texte, de sorte qu'il n'y ait plus deux hypothèses à séparer pour la réciproque : *un diviseur commun à l'un quelconque des nombres du cycle d'ordre n et à $\delta(10^n - 1)$ divise tous les autres nombres du cycle; réciproquement tout diviseur commun aux nombres du cycle divise $\delta(10^n - 1)$.*

2° Dans cette question et la suivante, désignons par N_1 le plus petit nombre du cycle, de sorte que chaque a_i est au moins égal à a_1. On aura donc ici

$$(3)\qquad N_2 = N_1 + R, \qquad N_3 = N_1 + 2R, \qquad R > 0;$$

$$(4)\qquad \begin{cases} 10N_1 - N_2 = 9N_1 - R = 999a_1, \\ 10N_2 - N_3 = 9N_1 + 8R = 999a_2, \\ 10N_3 - N_1 = 9N_1 + 20R = 999a_3. \end{cases}$$

On voit que R est divisible par 9; on écrira $R = 9\rho$ puis

(5) $N_1 - \rho = 111 a_1, \quad N_1 + 8\rho = 111 a_2, \quad N_1 + 20\rho = 111 a_3;$

(6) $9\rho = 111(a_2 - a_1), \quad 21\rho = 111(a_3 - a_1).$

Les égalités (6) divisées par 3 donnent

(7) $\rho = 37\rho', \quad a_2 = a_1 + 3\rho', \quad a_3 = a_1 + 7\rho'.$

Comme $a_3 \leqq 9$, on a $\rho' = 1$ et $a_1 = 0$, 1 ou 2.

On obtient ainsi trois cycles ($R = 333$)

037	148	259
370	481	592
703	814	925

Si l'on supposait, comme au n° 3, que les nombres du cycle donnent une progression, à l'ordre près, il y aurait lieu d'envisager l'hypothèse

$$N_2 = N_1 + 2R, \qquad N_3 = N_1 + R$$

qui conduit par le même procédé aux trois cycles ($R = 333$)

074	185	296
740	851	962
407	518	629

3° On a, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris dans un ordre inconnu

(8) $N_{i+1} = N_1 + \lambda_i R \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$

On écrit, par la même méthode que plus haut,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} 9N_1 - \qquad\qquad \lambda_1 R &= 999999 a_1, \\ 9N_1 + (10\lambda_1 - \lambda_2) R &= 999999 a_2, \\ 9N_1 + (10\lambda_2 - \lambda_3) R &= 999999 a_3, \\ 9N_1 + (10\lambda_3 - \lambda_4) R &= 999999 a_4, \\ 9N_1 + (10\lambda_4 - \lambda_5) R &= 999999 a_5, \\ 9N_1 + \ 10\lambda_5 \qquad\quad R &= 999999 a_6. \end{aligned} \right.$$

L'égalité de $a_\alpha = a_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) entraînerait

$$10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_\alpha = 10\lambda_{\beta-1} - \lambda_\beta$$

(en posant $\lambda_0 = \lambda_6 = 0$), ce qui revient à l'égalité

$$\lambda_{\alpha-1}\lambda_\beta = \lambda_{\beta-1}\lambda_\alpha, \tag{10}$$

où les deux membres doivent être lus comme nombres du système décimal; or $\lambda_{\alpha-1} \neq \lambda_{\beta-1}$ et $\lambda_\beta \neq \lambda_\alpha$ de sorte que l'égalité est impossible, *les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sont donc distincts.*

D'autre part les nombres λ_1, $10\lambda_1 - \lambda_2$, $10\lambda_2 - \lambda_3$, $10\lambda_3 - \lambda_4$, $10\lambda_4 - \lambda_5$, λ_5 ne peuvent être tous divisibles par 3, sinon λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 le seraient tous, ce qui est absurde puisqu'à l'ordre près ce sont 1, 2, 3, 4, 5. Donc *l'une des égalités* (9) *donne* $R = 9\rho$ *où ρ est un entier* (les deux conclusions qui précèdent valent quelle que soit la valeur de n comprise entre 2 et 10 inclus). On remplace donc les égalités (9) par les égalités plus simples

$$(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6):$$

$$N_1 + (10\lambda_{\alpha-1} - \lambda_\alpha)\rho = 111111 a_\alpha. \tag{9'}$$

Par soustraction on a

$$[10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)]\rho = 111111(a_\beta - a_\alpha). \tag{11}$$

Or les nombres $a_1, \ldots, a_\alpha, a_\beta, \ldots, a_\gamma$ étant supposés rangés en ordre croissant, on a cinq intervalles qui ne peuvent être tous égaux ou supérieurs à 2, car $a_1 \geqq 0$, $a_\gamma \leqq 9$; donc l'un au moins des intervalles est égal à 1, et si, dans (11), on suppose $a_\beta - a_\alpha = 1$ on voit que ρ *divise* 111111 *et* R *divise* 999999.

(Le raisonnement est valable pour $n = 6, 7, 8, 9, 10$: R est multiple de 9 et divise $10^n - 1$.) Écrivons donc

$$111111 = \rho\rho', \tag{12}$$

puis, quels que soient α et β, distincts, compris entre 1 et 6

$$\rho' = \frac{10(\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1}) - (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}{a_\beta - a_\alpha}. \tag{13}$$

Cherchons le minimum de ρ' : utilisons encore une différence $a_\beta - a_\alpha$ égale à l'unité, on a

$$\lambda_{\beta-1} - \lambda_{\alpha-1} \geqq 1, \qquad \lambda_\beta - \lambda_\alpha \leqq 5, \qquad \rho' \geqq 5. \tag{14}$$

Pour avoir le maximum de ρ', remarquons que la plus grande différence $a_\beta - a_\alpha$ s'obtient en prenant $\alpha = 1$, et choisissant pour a_β le plus grand des a.

La différence $a_\beta - a_1$ est au moins égale à 5; N_β est le plus grand nombre, donc $\lambda_{\beta-1} = 5$

$$\rho' = \frac{10\lambda_{\beta-1} + \lambda_1 - \lambda_\beta}{a_\beta - a_1} \leqq \frac{50 + 4 - 0}{5},$$

d'où

$$\rho' \leqq 10. \tag{15}$$

La décomposition de 111 111 en facteurs premiers, à savoir 3. 7. 11. 13. 37 montre que ρ' est égal à 7, ρ à 15873, R à 142857. On a

$$N_1 = \lambda_1 \rho + a_1\, 111\,111; \tag{16}$$

donc N_1 est multiple de ρ ou $\frac{R}{9}$ (d'ailleurs $N_2, \ldots, N_6$ aussi). Dans la formule (16), on ne peut donner à λ_1 que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et à a_1 que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; cela réduit donc les essais à un total de 25. J'écris les nombres en question, entre lesquels on doit choisir N_1 :

	0.	1.	2.	3.	4.
1.	015873	126984	238095	349206	460317
2.	031746	142857	253968	365079	476190
3.	047619	158730	269841	380952	492063
4.	063492	174603	285714	396825	5.....
5.	079365	190476	3.....	4.....	5.....

Le chiffre marqué à gauche est la valeur de λ_1; le chiffre placé en haut est la valeur de a_1 et doit coïncider avec le premier chiffre du nombre, ce qui dispense d'écrire certains nombres; la première colonne exige seule un calcul, les autres s'obtenant par l'addition de 111111.

Dans N_1 le chiffre de gauche doit être le plus petit : ce critérium oblige à ne garder que le tableau T :

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} 015873 & 126984 & \\ 031746 & 142857 & 253968 \\ 047619 & & \\ 063492 & & \\ 079365 & & \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on essaie pour N_1 le nombre 031746 qui se termine par 6, puisque R se termine par 7, les chiffres terminaux de N_1, N_1+R, ..., N_1+5R seront respectivement 6, 3, 0, 7, 4, 1 *et doivent coïncider (à l'ordre près) avec les chiffres de* N_1, ce critérium réussit pour 031746, 142857, 253968 et échoue pour les autres comme le montre le tableau

296307	630741
307418	741852
418529	852963
529630	963074

borné aux seuls chiffres 2, 3, ..., 9 terminaux des divers nombres du tableau T.

Les trois nombres cités réussissent, on vérifie que pour eux

$$N_2 = N_1 + 2R, \quad N_3 = N_1 + R, \quad N_4 = N_1 + 5R,$$
$$N_5 = N_1 + 3R, \quad N_6 = N_1 + 4R$$

(vérification nécessaire uniquement pour 031746, nombre dont tous les chiffres sont au plus égaux à 7, de sorte que l'addition de 111111 ou 222222 à un nombre quelconque du cycle se fait sans retenue).