Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 351-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__351_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$(E) \qquad 4pqxy - z^2 = 0,$$

montrer qu'il existe ∞^1 *surfaces intégrales de* (E) *qui sont des cônes* (C) *de sommet* O.

2° *Trouver l'équation générale des surfaces* (S) *qui coupent partout à angle droit les cônes* (C).

3° *Montrer que parmi les surfaces* (S) *il en est* ∞^1 *qui sont de révolution autour de* Oz; *soient* (Σ) *ces dernières surfaces.*

4° *Trouver les surfaces qui coupent partout à angle droit les surfaces* (C) *et* (Σ).

5° *Trouver une intégrale complète de* (E), *et en déduire l'équation générale des caractéristiques.*

II. *On considère les surfaces* ($\mathfrak{S}$) *dont l'élément linéaire a la forme*

$$ds^2 = U(u)(du^2 + dv^2).$$

1° *Par un changement de variables* $u_0 = \varphi(u)$, *ramener le* ds^2 *à la forme géodésique polaire.*

2° *Déduire de là la courbure totale de la surface* $\left(\textit{qu'on exprimera au moyen de } U, \dfrac{dU}{du}, \dfrac{d^2U}{du^2}\right)$.

3° *Choisir* U *pour que* ($\mathcal{S}$) *soit à courbure totale constante.*

4° *Déterminer les géodésiques de* ($\mathcal{S}$) *dans le cas où* $\mathrm{U} \equiv u$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $\dfrac{z^2}{xy} = a$ $\left[\text{par } px + qy = z \text{ ou par } z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$.

2° $\mathrm{F}(2x^2 + z^2, 2y^2 + z^2) = \text{const.}$

3° $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$

4° $\dfrac{2x^2 + z^2}{2y^2 + z^2} = \text{const.}$ $\left(\text{ou, si l'on veut, } \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const.}\right)$.

5° $z = \mathrm{A}x^{\frac{a}{2}} y^{\frac{1}{2a}}$ (par séparation des variables).

Si l'on veut intégrer le système différentiel caractéristique de (E), on partira de l'intégrale première $\dfrac{px}{qy} = a^2$. On pourra faire aussi la transformation

$$x = e^{\mathrm{X}}, \qquad y = e^{\mathrm{Y}}, \qquad z = e^{\mathrm{Z}}.$$

II. 1° $du_1 = \sqrt{\mathrm{U}}\, du$.

2° $\mathrm{K} = -\dfrac{\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}} + \dfrac{\mathrm{U}'^2}{2\mathrm{U}^3}$.

3° $\mathrm{U} = \dfrac{c}{4\mathrm{K}\,\mathrm{ch}^2 \dfrac{u'\sqrt{\mathrm{C}}}{2}}$ ou $\mathrm{U} = \dfrac{+\mathrm{C}}{4\mathrm{K}\cos^2 \dfrac{u'\sqrt{\mathrm{C}}}{2}}$,

et

$$\mathrm{U} = -\frac{1}{\mathrm{K}u'^2}$$

(avec $u' = u - u_0$).

4° $v - v_0 = 2a\sqrt{u - a^2}$, et, en général

$$v - v_0 = \int \frac{a\,du}{\sqrt{\mathrm{U} - a^2}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En intégrant une fonction monogène analytique le long d'un contour d'intégration formé de deux segments de droite issus de* O, *et de deux arcs de cercle de centre* O, *calculer, grâce à la théorie des résidus, les intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n}, \quad \int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{1 + x^n},$$

où n est une constante réelle supérieure à 1.

SOLUTION :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{\pi}{n}}, \qquad \mathrm{I}_2 = -\frac{\pi^2}{n^2} \frac{\cos \dfrac{\pi}{n}}{\sin^2 \dfrac{\pi}{n}}.$$

(Poitiers, juin 1926.)