Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 348-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__348_1>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère 2 tiges rectilignes rigides homogènes pesantes* OP *et* OQ, *de même longueur* l *et de même masse* m, *dont l'extrémité commune* O *est fixe. Le point* P *décrit un cercle hori-*

z[illegible]tal γ *de centre* O *(on admettra que* OQ *est imperceptiblement plus court que* OP *pour éviter tout choc de* OQ *et de* γ*). En outre, par une liaison* (λ), *les extrémités* P *et* Q *sont maintenues à une distance cons-*[illegible]*e* $l\sqrt{2}$ *l'une de l'autre. On néglige le frottement.*

[illegible]*écrire les aspects divers du mouvement en supposant que la* [illegible]*son* (λ) *soit bilatérale. On prendra pour origine le point* O, *pour* [illegible] OY *deux rayons rectangulaires du cercle* γ, *pour axe* OZ *la* [illegible] *descendante de* O. *On posera* $\widehat{\mathrm{OX}, \mathrm{OP}} = \psi$ *et*

$$[\text{illegible}]\ \vec{\mathrm{OQ}} = \vec{i}\, l \cos\omega \sin\theta + \vec{j}\, l \sin\omega \sin\theta + \vec{k}\, l \cos\theta,$$

[illegible] $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *les vecteurs unitaires de* OX, OY, OZ *et* ω *un angle* [illegible]*rime simplement en fonction de* ψ *lorsque la liaison* (λ) *est réa*[illegible]*e.*

[illegible]*dère une position initiale du système respectant la liai-*[illegible]*spondant aux valeurs* $\psi = 0$ *et* $\theta = \theta_0$. *On imprime au* [illegible]*cette position, des vitesses initiales compatibles avec* (λ) [illegible]*t aux valeurs* ψ'_0, θ'_0 *des dérivées de* ψ *et* θ, *par rapport à* [illegible]*pposant que la liaison* (λ) *soit réalisée par un fil flexible, inexte*[illegible]*ible et sans masse, trouver la condition pour que ce fil demeure tendu, au moins au début du mouvement.*

3° *Dans le cas où l'inégalité obtenue n'est pas vérifiée, quel sera le mouvement pris au début par le système ? Quel sera le sens initial de variation de la distance* PQ ?

4° *On considère un mouvement dans lequel le fil n'est pas initialement tendu, mais tel que la distance* PQ *ayant atteint en croissant la valeur* $l\sqrt{2}$, *le fil se tende brusquement. Déterminer en général l'état des vitesses du système qui succède à cette tension. Approfondir le cas où* $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, *et où l'on donne à* ω'_0 *une valeur telle que le mouvement de* OQ *antérieur au choc soit une rotation uniforme autour de* OZ, *à* ψ'_0 *une valeur telle que le moment cinétique du système par rapport à* OZ *soit nul.*

Solution. — Si (λ) n'est pas réalisée, on obtient la force vive

$$2\mathrm{T} = \frac{ml^2}{3}(\psi'^2 + \theta'^2 + \omega'^2 \sin^2\theta);$$

si (λ) est réalisée, on peut poser $\omega = \psi + \frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$2\mathrm{T} = \frac{ml^2}{3}[\psi'^2(1 + \sin^2\theta) + \theta'^2].$$

La fonction de forces est $U = mg\frac{l}{2}\cos\theta$.

1° On a les intégrales premières

$$\psi'^2(1+\sin^2\theta)+\theta'^2 = \frac{3g}{l}\cos\theta + h,$$

$$\psi'(1+\sin^2\theta) = K,$$

d'où

$$\theta'^2 = h + \frac{3g}{l}\cos\theta - \frac{K^2}{1+\sin^2\theta}.$$

La discussion conduit à trois aspects principaux du mouvement suivant que θ est une fonction monotone du temps ou oscille, soit symétriquement par rapport à $\theta = 0$, soit entre deux valeurs θ_1 et θ_2 de même signe; sans détriment des cas limites.

2° On pourra désigner par τ la tension du fil, et écrire que OP se meut dans le plan horizontal sous l'action de cette force. En appliquant le moment cinétique par rapport à OZ, on obtiendra aisément la valeur de τ. Tant que cette valeur demeurera positive, le fil restera tendu. On trouve qu'initialement, le signe de cette tension est celui de $-\theta'_0\psi'_0\cos\theta_0$.

3° Si (λ) n'est pas réalisée, OP est animé d'un mouvement de rotation uniforme, le mouvement de OQ est celui du pendule sphérique. L'inégalité du 2° n'étant pas satisfaite, PQ est initialement décroissant.

4° En appliquant l'équation générale de la théorie des percussions, on trouve aisément

$$\psi'_1 = \frac{\psi'_0 + \omega'_0\sin'\theta}{1+\sin'\theta}, \qquad \theta'_1 = \theta'_0.$$

Dans le cas particulier demandé, les vitesses finales sont nulles.

Épreuve pratique. — *Soient trois axes rectangulaires fixes* $O_1x_1y_1z_1$. *Une sphère de centre* O *et de rayon* R, *à laquelle sont liés trois axes rectangulaires* $Oxyz$, *de même disposition que les précédents, est astreinte à rouler sans glisser le long de* O_1z_1 : 1° *écrire les équations différentielles, entre les coordonnées cylindriques* R, ω, ζ *du centre* O *de la sphère et les angles d'Euler* ψ, θ, φ, *qui traduisent le non-glissement;* 2° *on étudie le cas particulier où* Ox *reste parallèle au plan* $O_1x_1y_1$. *Trouver alors la trajectoire* (λ) *décrite sur la sphère par la molécule au contact. Montrer que chaque point invariablement lié à la sphère décrit une surface. Déterminer cette surface :*

a. Pour un point de la ligne (λ);
b. Pour un point quelconque de la sphère.

Solution. — En écrivant que la vitesse de la molécule au contact est nulle, on trouve les conditions cherchées

$$d\omega = d\varphi \cos\theta + d\psi,$$

$$\frac{d\zeta}{R} = d\varphi \sin\theta \cos(\psi - \omega) - d\theta \sin(\psi - \omega),$$

si $\varphi = 0$, $\psi - \omega$ conserve une valeur constante. On en déduit que la trajectoire de la molécule au contact sur la sphère est un cercle (ce qu'on pourra aussi établir géométriquement en traduisant la condition qu'un diamètre Ox invariablement lié à la sphère reste orthogonal à la droite $O_1 z_1$ au contact de laquelle la sphère roule sans glissement).

La surface a est une surface de révolution engendrée par la rotation autour de $O_1 z_1$ d'une cycloïde dont la base est $O_1 z_1$. La surface b est engendrée par la rotation autour de $O_1 z_1$ d'une cycloïde allongée ou raccourcie contenue dans un plan parallèle à $O_1 z_1$.

(Poitiers, juin 1926.)