NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'agrégation en 1926

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 346-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__346_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1926

Mathématiques élémentaires.

(DEUXIÈME QUESTION.)

On donne, dans un plan, trois points O, A, ω. *Après une rotation d'angle* α *et de centre* ω, *les points* O *et* A *prennent respectivement les positions* O_α *et* A_α.

La droite AA_α *coupe la circonférence de centre* O_α *et qui passe en* A_α *aux points* A_α *et* M_α.

1° *Étudier comment varie, avec* α, *le vecteur* $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$.

2° *Déterminer l'amplitude et le centre de la rotation qui permet, en général, de faire coïncider les vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{O_\alpha M_\alpha}$. *Lieu du centre de cette rotation quand* α *varie.*

3° *Montrer que la perpendiculaire menée de* O_α *à* AA_α *passe par un point fixe* I. *Lieu de ce point* I *quand,* O *et* A *restant fixes,* ω *décrit une circonférence donnée, passant par* A, *ou une circonférence donnée dont le centre est le milieu de* AO.

4° *Les points* O *et* A *étant donnés, ainsi qu'une droite* D, *construire les points* ω *et* I *sachant qu'ils sont sur la droite* D. *Discuter.*

SOLUTION PAR M. O.

1° De ce que $O_\alpha M_\alpha = O_\alpha A_\alpha = OA$, résulte que le vecteur $O_\alpha M_\alpha$ conserve la même grandeur.

Si l'on appelle $\hat{O}$, $\hat{A}$, $\hat{\omega}$ les angles du triangle $OA\omega$, on a $\widehat{O_\alpha A_\alpha \omega} = \hat{A}$. Mais, dans le triangle isoscèle ωAA_α, $\widehat{AA_\alpha\omega} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Donc $\widehat{O_\alpha A_\alpha A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \hat{A}$. Par suite, dans le triangle isoscèle $O_\alpha A_\alpha M_\alpha$, $\widehat{A_\alpha O_\alpha M_\alpha} = \alpha + 2A$ et, en désignant par P et N les points où $O_\alpha A_\alpha$ et $O_\alpha M_\alpha$ rencontrent la droite OA, $\widehat{PO_\alpha N} = \pi - \alpha - 2\hat{A}$; et, comme $\widehat{NPO_\alpha} = \alpha$, il vient

$$\widehat{ONM_\alpha} = \pi - 2A.$$

Ainsi, l'angle du vecteur $O_\alpha M_\alpha$ avec la direction fixe OA est constant; donc, *la direction de ce vecteur, de même que sa grandeur, est invariable.*

2° On amène le vecteur OA à coïncider avec $O_\alpha M_\alpha$ par deux rotations, l'une d'amplitude α autour de ω qui amène OA en $O_\alpha A_\alpha$, l'autre d'amplitude $-(\alpha + 2\hat{A})$ autour de O_α. D'après la règle connue de la composition des rotations, ces deux rotations peuvent être remplacées par une seule d'amplitude égale à la somme algébrique de leurs amplitudes, c'est-à-dire à $-2\hat{A}$ autour d'un centre C. Ce centre C se trouve d'abord sur la bissectrice de l'angle $O\omega O_\alpha$. De plus, puisque l'angle OCO_α doit être égal à $2\hat{A}$, l'angle $O\omega C$ est égal à $\hat{A}$, et, par suite, *le centre* C *doit se trouver sur le cercle circonscrit au triangle* $OA\omega$, *qui constitue le lieu de ce centre* C *lorsque* α *varie.*

3° La droite $O_\alpha H$ perpendiculaire à $A_\alpha M_\alpha$ coupant ωC en J, on a

$$\widehat{IO_\alpha\omega} = \pi - \left(\widehat{\omega O_\alpha A_\alpha} + \widehat{HO_\alpha A_\alpha}\right) = \pi - \left(\hat{O} + \frac{\alpha}{2} + \hat{A}\right)$$
$$= \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \pi - \hat{\omega}\right) = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2}.$$

Il en résulte que

$$\widehat{IJ\omega} = \widehat{IO_\alpha\omega} + \widehat{J\omega O_\alpha} = \hat{\omega} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \hat{\omega},$$

et

$$\widehat{\omega JO} = \pi - \hat{\omega}.$$

Donc, le lieu de J est un cercle passant par O et ω, et, puisque $\widehat{IJ\omega}$ est aussi constant, IJ *coupe ce cercle en un point* I *fixe.*

Mais, si $\alpha = 0$, O_α vient en O, A_α en A, et $O_\alpha H$ se confond avec la perpendiculaire menée par O à la tangente en A au cercle de centre ω, ou, ce qui revient au même, avec la parallèle à ωA menée par O. Donc, l'angle $IO\omega$ est égal à $\hat{\omega}$, et le triangle $O\omega I$ est isoscèle.

Ainsi, *le point* I *est le symétrique de* O *par rapport au pied* K *de la perpendiculaire abaissée de* ω *sur la parallèle à* ωA *menée par* O.

Si, O et A étant fixes, le point ω décrit un cercle passant par I, la perpendiculaire ωK à Aω passe par le point B, diamétralement opposé à A dans ce cercle. Dès lors, le point K décrit le cercle décrit sur OB comme diamètre, et *le lieu du point* I *est le c*[illegible] *de centre* B *passant par* O.

De plus, la perpendiculaire élevée à ωK en son milieu passant par le milieu de OA, ce dernier point est à égale distan[illegible] et K. Si donc ω décrit un cercle autour de ce point, [illegible] décrit le même cercle, et *le point* I *un cercle homo*[illegible]*ue d*[illegible] *précédent par rapport à* O, *avec le rapport d'ho*[illegible]*tie*[illegible] *cercle qui a son centre en* A.

4° Abaissons de O sur Aω la perpendiculaire OL. On a

$$\omega L = KO = IK.$$

Le point L se trouve donc sur la droite D′ menée par [illegible]ment à la droite D sur laquelle se trouvent I et ω, c'est-à-d[illegible]ur la droite homothétique de D par rapport à O, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$.

Si la droite D est donnée, il en est de même de D′ sur laquelle doit se trouver L; mais, de plus, l'angle OLA étant droit, le point L est sur le cercle décrit sur OA comme diamètre. *Le point* L *est donc donné par la rencontre de ce cercle et de la droite* D′; *la droite* AL *donne ensuite le point* ω *sur* D, *et la parallèle à* AL *menée par* O, *le point* I.

Suivant que la droite D′ et le cercle de diamètre OA ont en commun deux points réels ou imaginaires, il y a, ou non, deux solutions réelles qui se réduisent à une lorsque la droite D′ est tangente à ce cercle.