Nouvelles annales de mathématiques

Elie Cartan

Sur le mouvement à deux paramètres

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__33_0>

SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES ;

PAR ELIE CARTAN.

1. M. Raoul Bricard a publié tout récemment [1] un intéressant article sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe O. Il montre que si, à un instant donné de la durée à deux dimensions, on donne au solide mobile (S) les différents déplacements à un paramètre contenus dans le mouvement à deux paramètres considéré, le lieu des axes instantanés de rotation est un plan passant par O ; la *droite polaire instantanée* (perpendiculaire élevée en O à ce plan) définit entre la sphère fixe et la sphère mobile de centre O et de rayon 1 une correspondance ponctuelle ; de plus, cette correspondance ponctuelle conserve les aires. M. Raoul Bricard pose enfin [2] le problème de savoir si réciproquement toute correspondance ponctuelle conservant les aires entre la sphère fixe et la sphère mobile peut être obtenue en partant d'un mouvement à deux paramètres convenablement choisi.

2. Il est facile de retrouver les résultats précédents et de résoudre le problème de M. Bricard en se servant de la méthode du trièdre mobile. Prenons d'abord un mouvement à deux paramètres déterminé ; à chaque instant (u, v) de la durée à deux dimensions construisons un trièdre trirectangle d'origine O dont l'axe des z soit dirigé suivant la droite polaire instantanée correspondante. Nous désignerons par (T_0) ce trièdre en tant qu'on le considère dans l'espace fixe et par (T) ce même trièdre en tant qu'on le considère dans le corps solide.

Le déplacement instantané de (T) par rapport au corps mobile (S) est défini par un vecteur

$$P\,du + P'\,dv, \quad Q\,du + Q'\,dv, \quad R\,du + R'\,dv;$$

(1) *Nouvelles Annales*, juin 1925, p. 328-341.
(2) *Loc. cit.*, n° 6, p. 336.

le déplacement instantané de (T_0) par rapport à l'espace fixe est de même défini par un vecteur

$$P_0\,du + P'_0\,dv,\quad Q_0\,du + Q'_0\,dv,\quad R_0\,du + R'_0\,dv.$$

Le mouvement instantané de (S) par rapport à l'espace fixe étant la somme géométrique du mouvement instantané de (S) par rapport à (T) et du mouvement instantané de (T_0) par rapport à l'espace fixe, ce mouvement instantané est défini par le vecteur

$$(P_0 - P)\,du + (P'_0 - P')\,dv,\quad (Q_0 - Q)\,du + (Q'_0 - Q')\,dv,$$
$$(R_0 - R)\,du + (R'_0 - R')\,dv;$$

l'axe de rotation étant par hypothèse dans le plan commun des xy des deux trièdres, on a

$$(R_0 - R)\,du + (R'_0 - R')\,dv = 0.$$

On en tire évidemment

$$\frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u}. \tag{1}$$

Mais les formules classiques relatives au mouvement à deux paramètres [1] donnent

$$\frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u} = P_0 Q'_0 - Q_0 P'_0,$$
$$\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u} = PQ' - QP';$$

on a donc

$$P_0 Q'_0 - Q_0 P'_0 = PQ' - QP'. \tag{2}$$

Cette égalité est la traduction analytique du théorème de M. Bricard. En effet, le pôle instantané de la sphère mobile, rapporté au trièdre (T), a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Son déplacement élémentaire sur cette sphère a pour projections sur les axes

$$Q\,du + Q'\,dv,\quad -P\,du - P'\,dv,\quad 0;$$

l'aire élémentaire qu'il décrit sur la sphère est donc

$$(PQ' - QP')\,du\,dv;$$

elle est, d'après (2), égale en grandeur et en signe, à l'aire élémentaire décrite par le pôle instantané de la sphère fixe.

---

[1] *Voir* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, Chapitre V, p. 49.

3. La réciproque se démontre facilement. Considérons une variété à deux dimensions (qui jouera tout à l'heure le rôle de la durée); faisons correspondre à chaque point (u, v) de cette variété un point P_0 sur une première sphère et un point P sur une seconde sphère de même centre O que la première, toutes deux étant de rayon 1. Attachons respectivement aux deux sphères deux trièdres trirectangles (T_0) et (T) ayant le point O pour origine, leurs axes des z positifs passant respectivement par le point P_0 et le point P. Cela posé, laissons fixe la première sphère et donnons à la seconde sphère une position telle que P coïncide avec P_0; cela est possible d'une infinité de manières; nous nous donnerons suivant une loi arbitraire l'angle λ dont il faut faire tourner le trièdre (T_0) autour de son axe des z pour l'amener sur (T). La fonction λ étant choisie arbitrairement, on définit ainsi pour la seconde sphère un mouvement à deux paramètres, chaque instant de la durée à deux dimensions correspondant à un point de la variété donnée.

Le déplacement instantané de la sphère mobile est la somme géométrique de son déplacement par rapport au trièdre (T), du déplacement de (T) par rapport à (T_0) et du déplacement de (T_0) par rapport à la sphère fixe. En conservant les mêmes notations que dans le numéro précédent, nous voyons que la composante suivant OP du déplacement instantané absolu de la sphère mobile est

$$d\lambda + (R_0 - R)\,du + (R'_0 - R')\,dv.$$

La droite OP sera la droite polaire instantanée si cette composante est nulle quels que soient du et dv, c'est-à-dire si la fonction λ satisfait à l'équation aux différentielles totales

$$d\lambda = (R - R_0)\,du + (R' - R'_0)\,dv. \tag{3}$$

La condition d'intégrabilité est manifestement

$$\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R'}{\partial u} = \frac{\partial R_0}{\partial v} - \frac{\partial R'_0}{\partial u},$$

ou

$$PQ' - QP' = P_0 Q'_0 - Q_0 P'_0.$$

La réciproque est donc démontrée et l'on voit qu'il y a une infinité de mouvements à deux paramètres fournissant la correspondance ponctuelle considérée, supposée avec conservation des aires.

La conclusion n'est cependant rigoureusement exacte que si la variété à deux dimensions donnée est *simplement connexe*. En réalité il faut et il suffit que, le long de tout cycle tracé dans la variété, on ait

$$\int \mathrm{R}\,du + \mathrm{R}'\,dv = \int \mathrm{R}_0\,du + \mathrm{R}'_0\,dv. \tag{4}$$

Si la correspondance conserve les aires élémentaires, cette égalité n'est assurée que pour les cycles réductibles à un point par déformation continue.

4. On peut donner de la condition (4) une interprétation qui se rattache du reste facilement à la démonstration donnée de son théorème par M. Bricard. Prenons sur la sphère mobile le *grand cercle des pôles* situé dans le plan des xy du trièdre (T) et sur ce grand cercle le point A qui appartient à l'axe des x positifs. Le déplacement élémentaire de ce point est

$$0, \quad \mathrm{R}\,du + \mathrm{R}'\,dv, \quad -\mathrm{Q}\,du - \mathrm{Q}'\,dv\,;$$

en désignant la grandeur de ce déplacement par ds et par φ l'angle que fait ce déplacement avec le grand cercle orienté positivement autour de l'axe des z, on a

$$\mathrm{R}\,du + \mathrm{R}'\,dv = \cos\varphi\,ds.$$

Or, si l'on considère une suite linéaire fermée de grands cercles orientés et qu'on prenne suivant une loi arbitraire un point A sur chacun des grands cercles de la suite, l'intégrale $\int \cos\varphi\,ds$ est indépendante du choix de ce point A et ne dépend que des grands cercles eux-mêmes de la suite. Ce théorème classique est du reste vrai pour toute suite linéaire fermée de géodésiques orientées d'une surface quelconque et résulte immédiatement de la formule qui donne la variation élémentaire de la longueur d'un arc AB de géodésique, à savoir

$$d(\mathrm{AB}) = ds_{\mathrm{B}}\cos(ds_{\mathrm{B}}, \mathrm{BA}) + ds_{\mathrm{A}}\cos(ds_{\mathrm{A}}, \mathrm{AB}).$$

La formule (4) exprime donc qu'étant donné un cycle quelconque tracé dans la durée à deux dimensions, et les deux suites linéaires fermées de grands cercles orientés qui lui correspondent sur les deux sphères, l'intégrale $\int \cos\varphi\, ds$ a la même valeur pour ces deux suites. Or cela est évident géométriquement; au cycle considéré dans la durée correspond un mouvement fermé à un paramètre de la sphère mobile; il suffit de prendre à chaque instant pour point A sur chaque grand cercle des pôles l'un des deux pôles instantanés de rotation pour voir que l'élément $\cos\varphi\, ds$ possède à chaque instant la même valeur sur les deux sphères.

5. On pourrait se demander quel est l'analogue du théorème de M. Bricard dans le mouvement à deux paramètres d'un plan mobile sur un plan fixe ([1]). A chaque instant de la durée à deux dimensions on a dans chacun des plans un axe des centres instantanés et, par suite, une correspondance des deux plans *droite orientée à droite orientée*. Cette correspondance conserve la valeur de l'invariant intégral $\int \cos\varphi\, ds$. Rapportons l'axe des centres à son équation normale

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

Si nous prenons sur cet axe pour point A le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine, donné par suite par l'équation

$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0,$$

nous aurons par différentiation

$$\cos\varphi\, ds = -dx \sin\alpha + dy \cos\alpha = p\, d\alpha.$$

La condition qui remplace la formule (4) est donc ici

$$\int p\, d\alpha = \int p_0\, d\alpha_0.$$

On peut remarquer que l'intégrale $\int p\, d\alpha$ étendue aux droites orientées tangentes à une courbe fermée orientée est égale au périmètre de cette courbe ([2]).

([1]) *Cf.* R. Bricard, *N. A.*, 1913, p. 302. [*N. de la R.*]

([2]) *Voir* sur cette question, *Bull. Soc. math.*, t. 24, 1896, p. 140-176, et aussi H. Lebesgue, *N. A.*, 1912, p. 481 (Exposition d'un mémoire de W. Crofton).