Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 311-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__311_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Déterminer les courbes* $y = f(x)$ *telles que le segment* TN *intercepté sur* Ox *entre* T *pied de la tangente sur* Ox, N *pied de la normale sur* Ox, *soit constant, égal à* $2a$, *où* a *est une longueur donnée;*

2° *Construire la courbe* C *d'équation*

$$x = t + \mathrm{L}(1 - t), \qquad y = \sqrt{1 - t^2}.$$

Calculer le segment TN. *La courbe rencontre l'axe* Ox *en* A, *l'axe* Oy *en* B. *Donner* sans calcul *la valeur numérique du rayon de courbure en* A. *Calculer avec les tables de logarithmes le segment* OA;

3° *Calculer l'intégrale* $\int y\,dx$, *où* y *et* x *sont les fonctions du numéro précédent. Calculer l'aire limitée par* OA, *l'arc* AB *et* BO. *Calculer l'aire comprise entre* Ox, Oy *et l'arc infini issu de* B (*valeurs numériques à calculer avec les tables*).

4° *Calculer le volume engendré en tournant autour de* Ox *par un arc de la courbe* C; *valeur numérique correspondant à l'arc* AB *où à l'arc infini issu de* B.

5° *Calculer, en fonction de* t, *l'arc* s *de la courbe* C *compté à partir de* B *pour origine. Valeur numérique de l'arc* AB.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La famille de courbes de l'énoncé est définie par l'équation différentielle

$$y = \frac{2ay'}{1 + y'^2}.$$

Posant $y' = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$, on l'intègre sous la forme

$$y = a \sin\varphi, \qquad x = a[\cos\varphi + L(1 - \cos\varphi)] + K.$$

2° La courbe C est une courbe de cette famille, pour $a = 1$, $K = 0$. Elle présente sur Oy un point de rebroussement B d'où partent, à 45° sur les axes, une branche infinie asymptote à Ox et un arc AB rencontrant normalement Ox en A. Le segment TN vaut $2a = 2$; le rayon de courbure en A est 2;

$$\overline{OA} = L2 - 1 = -0{,}30685\ldots.$$

3° $$\int y\,dx = \int \cos\varphi(1 + \cos\varphi)\,d\varphi = \sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

L'aire limitée par OA, l'arc AB, BO a pour valeur

$$\left[\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

L'aire comprise entre Ox, Oy et l'arc infini issu de B a pour valeur

$$\left[\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

4° Le volume engendré par cette aire dans sa rotation autour de Ox a pour valeur

$$\int \pi y^2\,dx = -\pi\left[\frac{\cos^2\varphi}{2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6}.$$

5° La différentielle de l'arc est définie par

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2} = \frac{dx}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

L'arc s compté à partir de B a pour valeur

$$s = \left[4\cos\frac{\varphi}{2} + 2L\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}.$$

L'arc AB s'obtient en faisant $\varphi = \pi$.

Épreuve pratique. — 1° *Les séries*

$$C(x) \equiv 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2!} + \ldots + \frac{\cos nx}{n!} + \ldots,$$

$$S(x) \equiv \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2!} + \ldots + \frac{\sin nx}{n!} + \ldots$$

sont-elles convergentes? Trouver leur somme pour $x = \frac{\pi}{2}$. Calculer

$$\arccos\left[C\left(\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad \arcsin\left[S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

2° *La série*

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + \ldots + \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n} + \ldots$$

est-elle convergente?

3° *La série*

$$\sin^2 x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + n\sin^2\left(\frac{x}{n}\right) + \ldots$$

est-elle convergente?

Indications sur la solution. — 1° Les séries $\frac{\cos nx}{n!}$ et $\frac{\sin nx}{n!}$ sont convergentes, car le terme général de chacune d'elles est inférieur en valeur absolue au terme général de la série e.

On a

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 1; \qquad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 1.$$

2° La série $\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ est convergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

3° La série $n\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$ est divergente, son terme général étant équivalent à $\frac{x^2}{n}$, terme général d'une série divergente.

(Lille, juin 1925.)

Épreuve théorique. — I. *Construire la courbe* C *définie par les équations*

$$\begin{cases} x = 4\cos u - \cos 4u, \\ y = 4\sin u - \sin 4u. \end{cases}$$

On prend sur C, *pour origine des arcs, le point* A *fourni par* $u = 0$, *pour sens positif, celui des* u *croissants. Soit* MT *la demi-tangente positive en un point* M *de* C. *Calculer en fonction de* u : *l'abscisse curviligne* $\overset{\frown}{AM} = s$, *l'angle* $(\widehat{Ox, MT}) = \alpha$, *le rayon de courbure.*

Construire la développée de C.

II. *On pose* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. *Déterminer deux fonctions* $f(r)$

et $\varphi(\theta)$ *de manière que les expressions*

$$f(r)\,dx - \varphi(\theta)\,dy \qquad \text{et} \qquad \varphi(\theta)\,dx + f(r)\,dy$$

soient simultanément des différentielles totales.

C.68. — III. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *une courbe* C *sur laquelle on a fixé un sens positif des arcs,* MT *la demi-tangente dans ce sens,* Ou *l'une des demi-droites qu'on peut distinguer sur le rayon vecteur du point* M (*indéfiniment prolongé*), r *la valeur algébrique* (*rapportée à* Ou) *de* $\overline{OM}$. *On pose*

$$(\widehat{Ox, MT}) = \alpha, \qquad (\widehat{Ou, MT}) = V, \qquad (\widehat{Ox, Ou}) = \theta.$$

A l'aide des formules qui permettent d'exprimer les coordonnées cartésiennes de M *en fonction de* r *et de* θ *et à l'aide des expressions classiques de* $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, R (*rayon de courbure affecté d'un signe*), *calculer* $\cos V$, $\sin V$ *et* R *en coordonnées polaires. Calculer la distance* OK *du point* O *au centre de courbure* K, *relatif au point* M. *Déterminer la courbe* C *de manière que la longueur* OK *et la longueur* MK *soient toujours égales.*

C.69. — Épreuve pratique. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires,* M *un point de coordonnées* (x, y, z), V *le volume intérieur à la sphère de centre* O *et de rayon un. On pose* $x + y + z = u\sqrt{3}$. *Transformer l'intégrale triple*

$$I = \iiint_V f(x + y + z)\,dx\,dy\,dz$$

en une intégrale simple $\int_{+2}^{+1} \varphi(u)\,du$.

Calculer complètement I, *lorsqu'on fait successivement*

$$f = L\left(1 + \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}\right),$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{3 - (x + y + z)^2}}.$$

(Poitiers, juin 1924.)

Épreuve théorique. — Première question. — *On a une surface fermée* S *limitant un volume* V. *Établir la formule qui remplace l'intégrale triple*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

appliquée à ce volume par une intégrale de surface appliquée à S. *Interprétation vectorielle.*

Deuxième question. — *Axes rectangulaires. Déterminer les courbes telles que le milieu de la normale en* M, MN *limitée à l'axe des x soit sur la parabole*

$$y^2 = 2px.$$

Position de ces courbes par rapport à la parabole. Peut-on donner n'importe quelle valeur à la constante entrant dans l'équation de la famille de courbes trouvée.

C.70. — Mécanique. — *Une plaque ayant la forme d'un triangle rectangle isoscèle* OAB *tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour du côté de l'angle droit* OA *placé suivant la verticale ascendante.*

Une masse pesante de valeur m glisse sur le côté hypoténuse AB, *elle ne peut quitter son support et elle est reliée au point* A *par un fil inextensible de masse négligeable.*

La longueur naturelle du fil sans tension est l; si l'on exerce une tension T, *le fil s'allonge de x et la tension est proportionnelle à l'allongement :* $T = kx$, *k constante donnée.*

A l'instant initial la longueur du fil est l et la vitesse relative de la masse m sur AB *est nulle.*

1° *Former en projetant sur* AB *l'équation définissant le mouvement relatif de la masse pesante m sur le support mobile* AB.

Étudier et caractériser ce mouvement suivant la grandeur de la rotation d'entraînement ω.

2° *La plaque tournant à la vitesse de* 300 *tours à la minute, on constate que la masse m a un mouvement relatif d'oscillation de* 150 *tours à la minute.*

Le poids de la masse m étant de 5^{kg}, *on demande de calculer la constante k et l'amplitude de l'oscillation en supposant l'allongement x exprimé en mètres, la tension* T *en kilogrammes et en prenant*

$$g = 10 \text{ mèt./sec.}^2, \qquad l = 5^{\text{m}}.$$

On définira la position de la masse m en prenant comme origine la position initiale m_0 et un axe m_0x descendant.

(Nancy, octobre 1923.)

C.71 Épreuve théorique. — I. *Déterminer r de façon que la dérivée de $e^{rx}\cos x$ soit $ae^{rx}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, a étant une constante. Quelle est, pour cette valeur de r, la dérivée d'ordre m de $e^{rx}\cos x$? Trouver le* *développement en série entière de cette fonction et montrer que, pour x négatif, en négligeant les termes nuls, on a une série alternée.*

II. *Pour tout point* M *d'une ellipse donnée de foyers* A *et* B, *on pose*

$$(\widehat{AB, AM}) = \alpha, \qquad (\widehat{BA, BM}) = \beta.$$

Trouver la relation qui existe entre α *et* β. *Calculer* $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ *en fonction de* α. *Trouver les points pour lesquels l'angle géométrique* AMB *est maximum.*

III. *On considère la courbe définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, par l'équation*

$$x(x^2 - 3y^2) = ay^2$$

où a *est une constante. Construire cette courbe. Trouver le lieu des points* M *tels que les tangentes menées de* M *à la courbe aient leurs points de contact en ligne droite. En appelant* Δ *la droite des points de contact, trouver l'enveloppe des droites* Δ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule est constitué par une sphère, de* 12^{cm} *de diamètre, fixée à l'extrémité d'une tige cylindrique, de* $0^m,90$ *de long et de* 4^{mm} *de diamètre. Cette tige est elle-même fixée à un couteau prismatique, de* 6^{cm} *de long et dont la section droite est un triangle isoscèle, ayant* 15^{mm} *de base et* 20^{mm} *de hauteur. Ces trois pièces sont construites avec le même métal.*

1° *Calculer, à* $\frac{1}{10}$ *de seconde près, la durée de* 1000 *oscillations du pendule.*

2° *Calculer approximativement l'erreur que l'on commettrait en négligeant la masse du couteau et celle de la tige.*

On donne $g = 9^m,81$.

(Clermont-Ferrand, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Les axes étant rectangulaires et* θ *étant un paramètre arbitraire, on donne la surface* Σ *définie par*

$$x = \cos^3\theta + z\sin\theta,$$
$$y = \sin^3\theta + z\cos\theta.$$

1° *Montrer que* Σ *est une surface développable et trouver son arête de rebroussement* Γ. *Quelle est la projection* Γ' *de* Γ *sur* xOy *et la relation de cette courbe* Γ' *avec la trace de* Σ *sur ce plan ;*

2° *Quelle est la pente du plan tangent à* Σ *par rapport au plan* xOy. *Montrer que la courbe* Γ *est une hélice (au sens général de ce mot); peut-on déduire ce résultat sans nouveau calcul de ce qui précède, ou, inversement, peut-on déduire certains des résultats précédents de cette dernière propriété établie directement;*

3° *On limite* Σ *à* Γ *et au plan* xOy *et l'on ne considère que la portion pour laquelle* x, y, z *sont positifs. Calculer la longueur de l'arc correspondant de* Γ *et l'aire de* Σ.

C.72. — II. *Soit le trièdre de référence trirectangle* $Oxyz$. *Un point matériel* M, *de masse* m, *est soumis à une force* constante F *parallèle à* Ox *et à une force* F' *obtenue de la manière suivante. Par* M, *on mène le vecteur vitesse* $\overrightarrow{MV}$ *et, par* V, *un vecteur* $\overrightarrow{VH}$ *parallèle à* Oz *et de mesure algébrique constante* h. *La force* F' *est le moment de* $\overrightarrow{VH}$ *par rapport au point* M.

Cela posé, on lance M, *au temps zéro, à partir de l'origine et avec le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V_0}$, *de composantes* a, b, c.

1° *Calculer les coordonnées de* M *au temps* t. *Calculer également sa vitesse en fonction de son abscisse* x. *Chercher l'hodographe. Dire dans quels cas la trajectoire* Γ *de* M *est une hélice ou bien une cycloïde.*

2° *On suppose* V_0 *dans le plan* xOy. *Calculer le rayon de courbure* R *de la trajectoire* Γ *en* O. *Montrer que si* $\overrightarrow{V_0}$ *tourne autour de* O, *en gardant une grandeur constante* v_0, *le centre de courbure de* Γ *en* O *décrit une conique de foyer* O. *Vérifier que le produit du paramètre de cette conique par son excentricité est indépendant de* v_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire la courbe.*

$$y = e^{-x} \sin x$$

dans l'intervalle $0 < x < \pi$.

On déterminera, en particulier, le point le plus haut, le point d'inflexion, les tangentes en ces points et les tangentes aux deux extrémités de la courbe. On prendra pour échelles :

Pour $x = 1$, $u = 20^{\text{mm}}$; *pour* $y = 1$, $u = 20^{\text{cm}}$.

Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x, *en supposant cette aire homogène. Marquer ce point sur le graphique.*

(Clermont, juin 1926.)

EPREUVE THÉORIQUE. — 1. *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int\int\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$

étendue à l'aire de l'ellipse

$$(\mathrm{E})\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

1° *En rassemblant les éléments situés sur chaque parallèle à* Oy;
2° *En rassemblant les éléments situés sur chaque ellipse* E_λ, *homothétique et concentrique à* E, *dans le rapport* λ;
3° *En ramenant l'intégrale double proposée à une intégrale curviligne, prise le long de* E, *et calculant cette dernière à l'aide d'une représentation paramétrique.*

C.73. — II. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Sur chaque axe* $u'Ou$ *mené par* O, *tel que* $\widehat{Ox, Ou}=\omega$, *on prend un point* M *tel que* $\overline{OM}=\rho$. *Soit* $v'Ov$ *l'axe mené par* O, *tel que* $\widehat{Ou, Ov}=+\frac{\pi}{2}$. *Le point* M *décrivant une courbe* $\rho=f(\omega)$, *on appelle* K *le centre de courbure en* M, MT *la demi-tangente dans le sens des arcs croissants,* V *l'angle* $\widehat{Ou, MT}$.

1° *Rappeler les expressions de* $\cos V$, $\sin V$, dV, *en précisant les conventions de signe. En déduire les composantes de* $\overrightarrow{MK}$ *suivant* Ou *et* Ov.
2° *En appelant* H *la projection orthogonale de* O *sur la normale en* M, *évaluer les composantes de* MH *suivant* Ou *et* Ov.
3° *Déterminer la courbe* $\rho=f(\omega)$ *de manière que l'on ait* $\overrightarrow{MK}=\frac{8}{9}\overrightarrow{MH}$.
4° *Pour quelle valeur de m l'enveloppe de la droite*

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a\cos m\theta$$

répond-elle à la question?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Faire le changement de fonction inconnue* $z=\frac{1}{y}$ *dans l'équation différentielle*

$$2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-z\frac{d^2z}{dx^1}+3z\frac{dz}{dx}+2z^2=e^xz^3.$$

En déduire l'intégrale générale de cette équation.

(Poitiers, juin 1926.)