Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 302-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__302_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.63.

(*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mai* 1926, *p.* 253.)

SOLUTION.

1° Les équations finies des multiplicités caractéristiques de l'équation proposée

$$(1+q^2)z = px$$

peuvent s'écrire

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = ab\cos^2\varphi + c, \qquad z = ab\sin\varphi\cos\varphi;$$
$$p = b\,\text{séc}\,\varphi, \qquad q = \text{tang}\,\varphi.$$

2° Pour déterminer, en suivant la *méthode de Cauchy*, les surfaces intégrales passant par la parabole $x^2 = 2z$, $y = 0$, on notera que, sur cette parabole, c'est-à-dire pour

$$(1) \qquad a\sin\varphi = 2b\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad ab\cos^2\varphi + c = 0,$$

on doit avoir

$$x\,\delta x = \delta z, \qquad \delta y = 0,$$

équations qui entraînent $p = x$, ou

$$(2) \qquad b = a\sin\varphi\cos\varphi.$$

On tire de (1) et (2)

$$a = 2\varepsilon b \qquad (\varepsilon = \pm 1), \qquad \sin 2\varphi = \varepsilon, \qquad 2\cos^2\varphi = 1,$$

et $c = -\varepsilon b^2$, ce qui donne les deux surfaces

$$x = a \sin\varphi, \qquad y = \frac{\varepsilon a^2}{4}\cos 2\varphi, \qquad z = \frac{\varepsilon a^2}{4}\sin 2\varphi$$

d'équations

$$(3) \qquad x^4 + 4\varepsilon x^2 y - 4z^2 = 0.$$

Si l'on suit la *méthode de Lagrange*, on partira, par exemple, de l'intégrale complète

$$(4) \qquad (y - c)^2 + z^2 = b^2 x^2;$$

la condition de contact de cette surface avec la parabole de l'énoncé s'écrit $b^2 = \varepsilon c$; et l'enveloppe de la famille ∞^1 de surfaces ainsi obtenues s'obtient immédiatement sous la forme (3).

3° Les surfaces intégrales développables vérifient une relation

$$F(p, q) = \text{const.};$$

or les seules fonctions F admissibles sont des intégrales premières de

$$\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{1 + q^2}$$

déduite des équations différentielles des caractéristiques et l'intégration de cette dernière équation ramène aux surfaces intégrales (4). Ainsi les seules surfaces intégrales développables sont des cônes de révolution de sommets sur Oy, d'axes parallèles à Ox.

Autre solution par M. J. LAUREAU.

Question C.64.

(*Calcul différentiel et intégral*, *épreuve théorique; énoncé publié en mai* 1926, *p.* 253.)

SOLUTION,

Par M. R. ODILE.

1° On donne les équations

$$(1) \quad x = \frac{u - v}{2} + \rho\,\frac{u + v}{2}, \qquad y = \frac{u + v}{2} - \rho\,\frac{u - v}{2}, \qquad z = \rho\,\frac{u^2 + v^2}{2a},$$

où ρ est paramètre variable, et qui représentent une droite (D) dépendant des deux paramètres u et v et l'on demande d'abord d'établir entre u et v une relation telle que les droites D correspondantes soient tangentes à une courbe (Γ).

Les équations de la droite (D) étant prises sous la forme

$$x = \alpha z + p, \qquad y = \beta z + q$$

avec

$$\alpha = a\frac{u+v}{u^2+v^2}, \qquad \beta = -a\frac{u-v}{u^2+v^2}, \qquad p = \frac{1}{2}(u-v), \qquad q = \frac{1}{2}(u+v),$$

la condition demandée est

$$d\alpha\, dq - d\beta\, dp = 0,$$

d'où aisément

$$[(u+v)\,du - (u-v)\,dv][(u-v)\,du + (u+v)\,dv] = 0.$$

On est donc amené aux deux équations différentielles

$$(2) \qquad (u+v)\,du - (u-v)\,dv = 0,$$

$$(3) \qquad (u-v)\,du + (u+v)\,dv = 0,$$

pour définir les développables de la congruence (1).

L'une ou l'autre s'intègre immédiatement, l'équation (2) ayant pour intégrale générale

$$(2') \qquad \frac{u}{v} = \operatorname{tang}\left(\log\frac{k}{\sqrt{u^2+v^2}}\right),$$

tandis que (3) conduit à

$$(3') \qquad \frac{u}{v} = \operatorname{tang}\left(\log\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{k}\right).$$

Dans l'un ou l'autre cas la droite D touche son enveloppe en un point dont le z est donné par

$$z = -\frac{dp}{d\alpha},$$

c'est-à-dire, après un calcul simple et s'il s'agit de l'équation (2),

$$z = -\frac{u^2+v^2}{2a}, \qquad \text{ou encore} \qquad \rho = -1.$$

Dans ce cas le point de contact de (D) avec son enveloppe a les coordonnées

$$x = -v, \qquad y = u, \qquad z = -\frac{u^2+v^2}{2a}$$

et l'équation (2') donne la projection de la courbe enveloppe sur le plan xOy : c'est une spirale logarithmique.

On a des résultats tout à fait analogues dans le cas de l'équation (3), les coordonnées du point de contact étant

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2a} \qquad (\rho = +1).$$

2° On demandait l'équation des nappes focales de la congruence des droites D. Ce qui précède montre que ce sont les deux paraboloïdes

$$x^2 + y^2 - 2az = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2az = 0.$$

3° On demandait s'il existe des surfaces (Σ) admettant pour normales les droites (D). Or les plans focaux passant par une droite (D), c'est-à-dire les plans passant par cette droite et tangents respectivement à chacun des paraboloïdes en leurs points de contact avec (D), ont pour coefficients $v, -u, -a$ et $u, v, -a$. La somme des doubles produits est $+a^2$, nécessairement différente de zéro.

Autrement dit, les plans focaux passant par une droite (D) ne sont pas rectangulaires, ce qui serait la condition nécessaire et suffisante pour que les droites (D) forment une congruence de normales. Conclusion : il n'y a pas de surfaces Σ admettant pour normales les droites (D).