

J. SUDRIA

## **Sur un théorème de calcul vectoriel et ses applications**

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 298-300

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_298\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__298_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME DE CALCUL VECTORIEL ET SES APPLICATIONS ;**

PAR J. SUDRIA.

1. Soient une grandeur scalaire  $u$ , fonction d'un point  $P$ , et d'autre part une surface  $S$  ayant deux côtés et limitée par un contour  $C$  orienté; considérons le côté de cette surface tel que les sens de la demi-normale et du contour forment une association sinistrogire;  $\mathbf{n}$  désignant un vecteur unité dirigé suivant cette demi-normale, on a

$$(\alpha) \quad \int_S \text{grad } u \wedge \mathbf{n} \, dS = \int_C u \, dP.$$

Nous avons donné une démonstration directe de ce théorème<sup>(1)</sup> sans faire intervenir les axes de coordonnées; signalons, pour éviter des redites, une autre démonstration qui consiste à *projeter* l'égalité vectorielle sur les trois axes; on trouve ainsi trois égalités qui résultent simplement du théorème de Stokes.

La formule de Stokes et la formule que nous donnons plus haut ont donc la même origine, mais leurs formes différentes peuvent les rendre diversement propices à certaines applications.

2. Considérons deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ : la première, lieu d'un point  $P_1$ ; la deuxième, d'un point  $P_2$ . Ces surfaces étant limitées par des contours  $C_1$  et  $C_2$ , on établit le sens de parcours d'après les conventions précédentes.

Dans ce qui suit, l'opération  $\text{grad}$  ou  $\text{rot}$  sera affectée des indices 1 ou 2, suivant que cette opération sera faite par rapport à un point  $P_1$  ou un point  $P_2$ ;  $r$  est la distance de ces deux points.

Posons

$$v = \text{grad}_1 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1$$

et

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \wedge \text{grad}_1 \frac{1}{r},$$

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 février 1926.

nous allons démontrer que

$$(\beta) \quad \text{grad}_2 v = \text{rot}_2 \mathbf{q}.$$

Mais on vérifie aisément, puisque  $\mathbf{n}_1$  ne dépend pas des points  $P_2$ , que

$$\begin{aligned} v &= - \text{grad}_2 \frac{1}{r} \times \mathbf{n}_1 = - \text{div}_2 \left( \frac{\mathbf{n}_1}{r} \right), \\ \mathbf{q} &= - \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_2 \frac{1}{r} = - \text{rot}_2 \left( \frac{\mathbf{n}_1}{r} \right); \end{aligned}$$

il s'agit de montrer que

$$\text{grad}_2 \text{div}_2 \left( \frac{\mathbf{n}_1}{r} \right) = \text{rot}_2 \text{rot}_2 \left( \frac{\mathbf{n}_1}{r} \right).$$

Or, la différence des deux membres est

$$\Delta'_2 \left( \frac{\mathbf{n}_1}{r} \right),$$

lequel se réduit, puisque  $\mathbf{n}_1$  ne dépend pas de  $P_2$ , à

$$\mathbf{n}_1 \Delta_2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0,$$

.....

*Application des théorèmes précédents.* — Supposons que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  soient celles de deux feuillettes de puissances  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ ; la face choisie sur chacune d'elles étant celle chargée de magnétisme positif; le potentiel créé par un élément de  $S_1$  en  $P_2$  est, d'après un résultat dont l'interprétation, sinon la forme, est classique :

$$\Pi_1 \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_1 \left( \frac{1}{r} \right) dS_1,$$

et, pour tout le feuillet,

$$V = \Pi_1 \int_{S_1} \mathbf{n}_1 \times \text{grad}_1 \left( \frac{1}{r} \right) dS_1.$$

Le vecteur induction en  $P_2$ , provenant du feuillet  $S_1$ , est

$$\mathbf{B} = \text{grad}_2 V.$$

Le flux de  $\mathbf{B}$  sortant par la face positive de  $S_2$  peut se remplacer par une circulation

$$\Phi_1 = - \Pi_1 \int_{C_2} \mathbf{Q} \times dP_2,$$

$Q$  étant, d'après ( $\beta$ ),

$$\int_{S_1} \mathbf{n}_1 \wedge \text{grad}_1 \left( \frac{1}{r} \right) dS_1,$$

c'est-à-dire, d'après ( $\alpha$ ),

$$- \int_{C_1} \frac{dP_1}{r},$$

ou enfin

$$\Phi_1 = \Pi_1 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

L'énergie potentielle des deux feuillettes en présence est

$$- \Pi_2 \Phi_1 = - \Pi_1 \Pi_2 M$$

avec

$$M = \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dP_1 \times dP_2}{r}.$$

C'est la formule de Neumann démontrée sans l'intervention des coordonnées.