NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Sur un point du programme de la classe de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 290-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__290_1>

SUR UN POINT DU PROGRAMME DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES;

PAR G. VALIRON.

Les remarques suivantes, faites après l'audition d'une leçon d'un candidat à l'agrégation, intéresseront peut-être quelques lecteurs. Il s'agit de la démonstration des théorèmes qui servent dans l'étude de la variation des fonctions, tels que le suivant : *Une fonction $f(x)$ dérivable sur le segment a, b, $a \leqq x \leqq b$, et dont la dérivée est positive, est croissante.* Dans la classe de mathématiques, cette proposition doit être admise sans démonstration; mais dans certains Ouvrages à l'usage de cette classe, celui de M. Commissaire par exemple, elle est établie comme dans les cours d'analyse en s'appuyant sur la formule des accroissements finis, rendue intuitive par des considérations graphiques. Dans un cours où l'emploi des dérivées est restreint à l'étude de la variation des fonctions élémentaires et à la recherche des extrema, la méthode directe suivante est peut-être plus instructive ([1]). On s'appuie sur ce lemme, qui est une conséquence immédiate de la définition de la dérivée et de l'hypothèse faite sur son signe :

Si x_0 est un point du segment a, b, il existe un intervalle $\mathrm{I}(x_0)$ ayant pour centre ce point, dont les points x (appartenant à a, b) donnent à $f(x)-f(x_0)$ le signe de $x-x_0$.

On peut alors admettre que le segment a, b peut être couvert par un nombre fini d'intervalles $\mathrm{I}(x)$, alors $f(a)<f(b)$, ce qui est bien la proposition à démontrer. La proposition admise est le théorème de Borel-Lebesgue.

On peut se ramener à une proposition plus intuitive en utilisant le procédé des subdivisions. Supposons que l'on ait $f(b)\leqq f(a)$. Si c est la moyenne arithmétique de a et b, l'une au moins des différences $f(c)-f(a)$, $f(b)-f(c)$ est encore négative ou nulle; on a donc un nouveau segment a_1, b_1, qui coïncide avec a, c ou c, b, pour lequel on a les mêmes hypothèses que pour a, b. On le divise en deux, et ainsi de suite, ce qui donne une suite infinie de segments

$$a_n, \quad b_n,$$

pour lesquels

$$f(b_n)\leqq f(a_n),$$

$$a_{n-1}\leqq a_n, \qquad b_n\leqq b_{n-1}, \qquad b_n-a_n=2^{-n}(b-a).$$

On peut admettre que les nombres a_n et b_n ont un même point limite ξ tel que

$$a_n\leqq \xi \leqq b_n \quad ([2]).$$

Le point ξ est le centre d'un intervalle $\mathrm{I}(\xi)$ dans lequel les points

---

([1]) La démonstration qui suit est à rapprocher des considérations développées par M. Denjoy dans son Mémoire *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*J. de Math.*, 1915, p. 105-240, en particulier p. 176).

([2]) C'est ce que l'on admet déjà, dans la même classe, dans la définition de la longueur de la circonférence.

a_n et b_n sont compris à partir d'une valeur de n; d'après le lemme on a, à partir de cette valeur,

$$f(a_n) < f(b_n).$$

Cette contradiction établit le théorème.

La proposition relative aux fonctions dont la dérivée est nulle sur un segment a, b est une conséquence de la précédente. Car, si l'on supposait $f(b) < f(a)$, la fonction

$$g(x) = f(x) + \frac{x-a}{b-a}[f(a) - f(b)]$$

aurait une dérivée positive sur a, b, alors que $g(a) = g(b)$, ce qui est impossible. En changeant $f(x)$ en $-f(x)$, on voit de même que l'on ne peut avoir $f(a) > f(b)$.