NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Sur la constante *C* d'Euler

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 289-290

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__289_0>

SUR LA CONSTANTE C D'EULER ;

PAR PAUL APPELL.

On peut poser, d'après la définition même de C,

$$C = H(h) - \log h + S(h),$$

où h est un entier $\geqq 2$,

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{h-1},$$

$S(h)$ tendant vers zéro quand h croît indéfiniment. M. Ser a donné l'expression de $S(h)$ dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (2[e] série, t. IV, novembre-décembre 1925, p. 126-128):

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{p_3}{h}\frac{1}{h+1} + \frac{p_4}{h}\frac{1.2}{(h+1)(h+2)} + \ldots,$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + \frac{1}{h}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_{\nu+2}\frac{1.2\ldots\nu}{(h+1)(h+2)\ldots(h+\nu)},$$

où

$$p_{\nu+1} = \int^1 \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(\nu-1-x)}{1.2\ldots\nu}\,dx.$$

On a aussi, en vertu de l'identité

$$\frac{1.2\ldots\nu}{(h+1)\ldots(h+\nu)} = \frac{1.2\ldots h}{(\nu+1)\ldots(\nu+h)},$$

$$S(h) = \frac{p_2}{h} + (h-1)!\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{p_{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)};$$

on peut également calculer les quantités

$$\lambda_h = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{p_{\nu+1}}{\nu+h},$$

dont M. Ser donne les deux premières λ_0 et λ_1 (*loc. cit.*, p. 127) en retrouvant la formule de Fontana-Bessel :

$$C = \lambda_0 = S(1) = \frac{p_2}{1} + \frac{p_3}{2} + \frac{p_4}{3} + \ldots.$$

Nous ferons ici quelques remarques sur $S(h)$. On a aussi

$$C = H(k) - \log k + S(k),$$

où k est un entier différent de $h (k \geqq 2)$. Alors en retranchant, on a, quel que soit C,

$$H(k) - H(h) - \log\frac{k}{h} + S(k) - S(h) = 0.$$

Donc, comme $H(k) - H(h)$ est commensurable, $\log\frac{k}{h}$ incommensurable, le logarithme étant népérien,

$$(1) \qquad S(k) - S(h) = \text{incomm.} \qquad (k \neq h).$$

Dans ces conditions il est impossible que $S(h)$ soit commensurable pour deux valeurs différentes de l'entier h, $h = h_1$, $h = h_2$, car

$$S(h_1) - S(h_2),$$

qui devrait être incommensurable, d'après (1), serait commensurable. Il peut exister une seule valeur de h, $h = h_1$, rendant $S(h)$ commensurable. Si cette valeur existe, C est incommensurable d'après l'équation de définition où $h = h_1$. Mais il est probable que h_1 n'existe pas et que $S(h)$ est incommensurable pour toutes les valeurs de l'entier h.

On conclut de là que, quel que soit C, commensurable ou incommensurable, $C + \log h$ est incommensurable pour toutes les valeurs de h, sauf une $h = h_1$ au plus. Si h_1 existe, C est incommensurable; s'il n'existe pas, on ne peut rien dire sur la nature arithmétique de C.