Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__287_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe*

$$x = \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi.$$

Interprétation géométrique du paramètre φ. *Longueur du segment* MT *de la tangente compris entre* M *point de contact et* T *point d'intersection avec* Ox. *Arc de la courbe* $\left(\textit{prendre } s = 0 \textit{ pour } \varphi = \frac{\pi}{2} \textit{ et } \frac{ds}{d\varphi} > 0\right)$. *Équation paramétrique des développantes de cette courbe au moyen de* φ.

2° *On se propose de déterminer une courbe telle que le segment compris entre le centre de courbure et le pied sur* Ox *de la normale soit constant et égal à* 1. *Expliquer* sans calcul *comment la première partie conduit à la solution de cette question et expliquer le rôle des deux constantes arbitraires.*

3° *Mettre en équation la question proposée au n°* 2°. *Prendre* $y'^2 = z$ *pour nouvelle inconnue et former l'équation différentielle liant* y *et* z : *l'intégrer.*

4° *Soit l'équation différentielle* (λ *constante*)

$$y = \frac{\mathrm{L}(1 + y'^2)}{2\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

où L *est le symbole des logarithmes népériens et* $y' = \frac{dy}{dx}$. *On pose* $y' = -\cot\varphi$ *et* $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\sin\varphi}$. *Former l'équation différentielle qui lie* x *à* φ; *l'intégrer.*

Indications sur la solution. — 1° La courbe donnée est une *tractrice;* le segment MT vaut 1; φ désigne l'angle de cette tangente MT avec Ox. L'arc s vaut L$(\sin\varphi)$. Les équations paramétriques des développantes sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi + (\mathrm{C} - \mathrm{L}\sin\varphi)\cos\varphi. \\ y = \sin\varphi + (\mathrm{C} - \mathrm{L}\sin\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

2° Les courbes cherchées sont ces développantes à une translation près, le long de Ox.

3° Leur équation différentielle ne contient que y et y'; une première intégration conduit à l'équation indiquée au n° 4°.

4° Le changement de variable indiqué permet de retrouver les équations (1) à une constante additive près pour x.

Épreuve pratique. — 1° *On considère le cercle* (C) $x^2 + y^2 = 1$. *On pose* $x + iy = z$, $Z = \sqrt{z} = X + iY$. *Indiquer le position du point* Z *correspondant à un point* z *pris sur* C; *on prend pour* ($x = 1$, $y = 0$), $X = 1$, $Y = 0$ *et le point* m (x, y) *parcourt le cercle* C *dans le sens direct une fois à partir de* $x = 1$, $y = 0$; *quel chemin a parcouru le point* M(X, Y)?

2° *Soit* φ *l'argument de* M : *on projette* M *sur* Om *en* μ; *trouver, en fonction de* φ, *les coordonnées de* μ. *Évaluer l'aire balayée par* Oμ *quand* m *parcourt la demi-circonférence supérieure* C; *construire la courbe lieu de* μ.

3° *Calculer avec approximation par défaut et excès l'arc décrit par* μ *quand* m *parcourt la demi circonférence supérieure. Partager l'intervalle d'intégration en six parties égales.*

Indications sur la solution. — 1° Le point M est le milieu de l'arc am, a désignant le point $z = 1$. Le point μ décrit la courbe

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2}.$$

L'aire demandée vaut $\frac{\pi}{4}$.

(Lille, novembre 1925.)